# Esempi di modelli di programmazione lineare (intera) 2016

1. *Combinando risorse*

Una ditta produce due tipi di prodotto, A e B, combinando e lavorando opportunamente tre risorse, R, S e T. In dettaglio:

per produrre 1 unità di A servono: 2 u. di R, 3 u. di S, 1 u. di T;

per produrre 1 unità di B servono: 0 u. di R, 1 u. di S, 3 u. di T.

Il ricavo unitario dalla vendita di A e B è rispettivamente 15 e 20.

Il costo unitario delle risorse R, S e T è rispettivamente 2, 1, 3.

1a – *massimizzare ricavi, con risorse date*

Si hanno rispettivamente 100, 70, 80 unità di R, S, T. Il problema è determinare le quantità di A e B da produrre in modo da massimizzare il ricavo totale.

Variabili decisionali: *x*A, *x*B (unità rispettivamente di A e B da produrre).

Modello: max 15 *x*A + 20 *x*B

2 *x*A  < 100 (disponibilità R)

 3 *x*A + 1 *x*B < 70 (disponibilità S)

 1 *x*A + 3 *x*B < 80 (disponibilità T)

 *x*A, *x*B > 0

 *x*A, *x*B interi (eventualmente)

1b – *minimizzare costi, con produzione data*

Si ha il compito di produrre rispettivamente 50 e 70 unità di A e B. Il problema è determinare le quantità di R, S, T da acquistare in modo da minimizzare il costo totale. Tale problema si risolve direttamente mediante moltiplicazioni (le quantità sono: 2 · 50 + 0 · 70; 3 · 50 + 1 · 70; 1 · 50 + 3 · 70), cioè ha una soluzione “forzata”, non c’è da modellare.

1. *Decomponendo risorse*

Una ditta produce due tipi di prodotto, A e B, decomponendo e lavorando opportunamente tre risorse, R, S e T. In dettaglio:

da 1 unità di R si ricavano: 2 u. di A, 3 u. di B;

da 1 unità di S si ricavano: 7 u. di A, 2 u. di B;

da 1 unità di T si ricavano: 4 u. di A, 0 u. di B.

Il ricavo unitario dalla vendita di A e B è rispettivamente 30 e 25.

Il costo unitario delle risorse R, S e T è rispettivamente 20, 40, 30.

2a – *massimizzare ricavi, con risorse date*

Si hanno rispettivamente 40, 80, 50 unità di R, S, T. Il problema è determinare le quantità di A e B da produrre in modo da massimizzare il ricavo totale.

Tale problema si risolve direttamente mediante moltiplicazioni (le quantità sono: 2 · 40 + 7 · 80 + 4 · 50; 3 · 40 + 2 · 80 + 0 · 50), cioè ha una soluzione “forzata”, non c’è da modellare.

2b – *minimizzare costi, con produzione data*

Si ha il compito di produrre rispettivamente 80 e 100 unità di A e B. Il problema è determinare le quantità di R, S, T da acquistare in modo da minimizzare il costo totale.

Variabili decisionali: *x*R, *x*S, *x*T (unità rispettivamente di R, S, T da acquistare)

Modello: min 20 *x*R + 40 *x*S + 30 *x*T

2 *x*R + 7 *x*S + 4 *x*T > 80 (produzione di A)

 3 *x*R + 2 *x*S + 0 *x*T > 100 (produzione di B)

 *x*R, *x*S, *x*T > 0

 *x*R, *x*S, *x*T  interi (eventualmente)

1. *Assegnamento*

Bisogna eseguire *n* lavori. A tal fine sono disponibili *n* macchine. Ogni macchina esegue un solo lavoro, ed ogni lavoro è eseguito da una sola macchina. Per eseguire il lavoro *i* la macchina *j* richiede un costo *cij*. Il problema è assegnare a ciascuna macchina un lavoro al fine di minimizzare il costo totale.

Variabili decisionali: *xij* per ogni *i* = 1, …, *n* e *j* = 1, …, *n*;

*xij* avrà valore 1 se il lavoro *i* è assegnato alla macchina *j*;

*xij* avrà valore 0 se il lavoro *i* non è assegnato alla macchina *j*.

Modello: min 

 = 1 per ogni *j* = 1, …, *n*

(ogni macchina esegue un solo lavoro)

 = 1 per ogni *i* = 1, …, *n*

(ogni lavoro è eseguito da una sola macchina)

 *xij* > 0 per ogni *i* = 1, …, *n* e *j* = 1, …, *n*;

 *xij* < 1 per ogni *i* = 1, …, *n* e *j* = 1, …, *n*;

 *xij* intero per ogni *i* = 1, …, *n* e *j* = 1, …, *n*.

1. *Matching*

Un insieme *N* di *n* donne e un insieme *M* di *m* uomini si recano presso un’agenzia matrimoniale. Mediante interviste, si stabilisce che presumibilmente ogni donna *i* è compatibile con un certo sottoinsieme *Mi* di *M* e che di conseguenza ogni uomo *j* è compatibile con un certo sottoinsieme *Nj* di *N*. Il problema è accoppiare il maggior numero possibile di persone.

### Sia *F* l’insieme delle coppie (*i*, *j*) *compatibili*, cioè, *F =* {(*i*, *j*) : *i* ∈ *Nj* e *j* ∈ *Mi*}

Variabili decisionali: *xij* per ogni coppia (*i*, *j*) ∈ *F*.

*xij* avrà valore 1 se la donna *i* è accoppiata all’uomo *j*;

*xij* avrà valore 0 se la donna *i* non è accoppiata all’uomo *j*.

Modello: max 

 < 1 per ogni *i* = 1, …, *n*

 (ogni donna è accoppiata al più a un uomo)

 < 1 per ogni *j* = 1, …, *m*

 (ogni uomo è accoppiato al più a una donna)

 *xij* > 0 per ogni (*i*, *j*) ∈ *F*;

 *xij* < 1 per ogni (*i*, *j*) ∈ *F*;

 *xij* intero per ogni (*i*, *j*) ∈ *F*.

1. *Riempimento (packing)*

Un’azienda ha a disposizione un budget *b* per finanziare alcuni progetti. E’ possibile scegliere fra *n* progetti. Ognuno di tali progetti ha un costo *ai*, per *i* = 1, …, *n*. D’altro canto, ognuno di tali progetti garantisce dopo un anno un profitto *pi*, per *i* = 1, …, *n*. Non è possibile finanziare un progetto solo in parte. Il problema è scegliere quali progetti finanziare in modo da massimizzare il profitto totale dopo un anno.

Variabili decisionali: *xi* per ogni *i* = 1, …, *n*;

*xi* avrà valore 1 se il progetto *i* è scelto;

*xi* avrà valore 0 se il progetto *i* non è scelto.

Modello: max *p*1*x*1 + *p*2*x*2 + … + *pnxn*

 *a*1*x*1 + *a*2*x*2 + … + *anxn* < *b*

 *xi* > 0 per ogni *i* = 1, …, *n*;

 *xi* < 1 per ogni *i* = 1, …, *n*;

 *xi* intero per ogni *i* = 1, …, *n*.

1. *Copertura (covering)*

In una scuola-lingue si insegnano *m* lingue. La scuola vuole convocare degli interpreti esterni in modo che per ognuna delle lingue insegnate sia convocato almeno un interprete qualificato. E’ possibile scegliere fra un insieme *N* di *n* di interpreti, ognuno dei quali è qualificato solo per alcune lingue. In altri termini, per ogni lingua *j* sia *Nj* il sottoinsieme di *N* degli interpreti qualificati per la lingua *j*. Il problema è convocare il minor numero possibile di interpreti.

Variabili decisionali: *xi* per ogni *i* = 1, …, *n*;

*xi* avrà valore 1 se l’interprete *i* è scelto;

*xi* avrà valore 0 se l’interprete *i* non è scelto.

Modello: min 

 > 1 per ogni *j* = 1, …, *m*

(per ogni lingua esiste almeno un interprete)

 *xi* > 0 per ogni *i* = 1, …, *n*;

 *xi* < 1 per ogni *i* = 1, …, *n*;

 *xi* intero per ogni *i* = 1, …, *n*.

1. *Trasporti*

Sono assegnate *s* località sorgente e *t* località destinazione. Ogni località sorgente *i* ∈ {1, …, *s*} ha a disposizione *di* > 0 unità di un certo tipo di merce, ed ogni destinazione *j* ∈ {1, …, *t*} richiede almeno *rj* > 0 unità della stessa merce. Per ogni coppia *i* ∈ {1, …, *s*} e *j* ∈ {1, …, *t*} è inoltre stabilito il costo unitario di trasporto *cij* e la quantità massima trasportabile *qij*. Il problema è pianificare i trasporti in modo da minimizzare il costo totale.

Variabili decisionali: *xij* per ogni *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

*xij* indica la quantità trasportata dalla sorgente *i* alla destinazione *j*.

Modello: min 

 < *di* per ogni *i* = 1, …, *s* (vincoli di disponibilità)

> *rj* per ogni *j* = 1, …, *t* (vincoli di richiesta)

*xij* < *qij* per ogni *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

(vincoli di capacità)

 *xij* > 0 per ogni *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

 *xij* intero per ogni *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*. (eventualmente)

# Esercizi su esempi precedenti

Formulare ognuno dei seguenti sette problemi in termini di programmazione lineare (intera). Ognuno di tali problemi è riconducibile ad uno dei sette esempi trattati.

**1.** Un libero professionista ha a disposizione ogni settimana 10 ore che pensa di dedicare all'allargamento della propria attività. In particolare, c'è la possibilità di prestare consulenza a cinque nuovi clienti, A, B, C, D, E. Ognuno di essi richiede una quantità di tempo lavorativo settimanale, come di seguito: *t*A = 4, *t*B = 5, *t*C = 4, *t*D = 3, *t*E = 1. Quindi comunque non potrebbe prestare consulenza per tutti loro. In base al tipo di consulenza da svolgere, ad ognuno può chiedere una parcella settimanale che comporta un ricavo come di seguito: *p*A = 70, *p*B = 30, *p*C = 70, *p*D = 40, *p*E = 30.

Il problema è scegliere i clienti a cui prestare servizio in modo da massimizzare il ricavo totale.

**2.** Una ditta decide di intraprendere 4 attività. A tale scopo, sono a disposizione 4 agenzie già operanti. Per diversi motivi, ogni agenzia può gestire al più una sola di queste attività, e ogni attività non può essere gestita da più di una agenzia. Infine, si stima a priori che assegnare ad un’agenzia *i* un’attività *j* garantisca un profitto *pij*. Il problema è assegnare ad ogni agenzia una attività in modo da massimizzare il profitto totale.

Variante: Con le ipotesi sopra indicate, si supponga che una delle agenzie debba essere chiusa per certi motivi. Il problema è scegliere quali attività intraprendere (dato che ora se ne possono intraprendere solo tre) in modo da massimizzare il profitto totale.

**3.** Una persona vuole fare una dieta. In particolare deve assumere due tipi di sostanze, cioè proteine e vitamine, che può ricavare comprando tre tipi di alimenti, cioè frutta, latte, uova. In dettaglio:

1 unità di frutta contiene: 0 u. di proteine, 7 u. di vitamine;

1 unità di latte contiene: 2 u. di proteine, 3 u. di vitamine;

1 unità di uova contiene: 5 u. di proteine, 1 u. di vitamine.

Il costo unitario della frutta, del latte e delle uova è rispettivamente di 10, 20, 10.

La dieta richiede di assumere almeno 15 unità di proteine e 25 unità di vitamine.

Il problema è determinare le quantità di frutta, latte, uova da acquistare in modo da minimizzare il costo totale.

**4.** Un’azienda vinicola desidera produrre due tipi di vino: uno da tavola, uno da dessert. Il profitto che l’azienda trae dalla produzione di una unità di vino da tavola è 3, mentre dalla produzione di una unità di vino da dessert è 7. Tale produzione necessita di una particolare combinazione di due tipi di uva: diciamo di tipo A e di tipo B rispettivamente. Per produrre 1 unità di vino da tavola, si ha bisogno di 3 unità di uva di tipo A, e di 2 unità di uva di tipo B. Per produrre 1 unità di vino da dessert, si ha bisogno di 1 unità di uva di tipo A, e di 4 unità di uva di tipo B. Infine, l’azienda ha a disposizione 1000 unità di uva di tipo A e 400 unità di uva di tipo B.

Il problema è determinare le quantità di vino da tavola e da dessert da produrre in modo da massimizzare il profitto totale.

**5.** Una ditta che tratta sale marino ha 2 depositi A e B che riforniscono 4 suoi negozi. La disponibilità di sale di ogni deposito è pari rispettivamente a *d*A = 190 e *d*B = 370 unità. La richiesta di sale da parte di ogni negozio è pari rispettivamente a *r*1 = 130, *r*2 = 140, *r*3 = 100, *r*4 = 70 unità. Il costo unitario *cij* di trasporto dal deposito *i* al negozio *j* è pari a: *c*A1 = 2, *c*A2 = 3, *c*A3 = 3, *c*A4 = 1, *c*B1 = 3, *c*B2 = 2, *c*B3 = 1, *c*B4 = 2. (Opzionale: Inoltre, per motivi logistici, il deposito A non può rifornire ogni singolo negozio con più di 100 unità, mentre il deposito B non può rifornire ogni singolo negozio con più di 150 unità). Il problema è pianificare i rifornimenti dei negozi in modo da minimizzare il costo totale.

**6.** Un’agenzia vuole aprire delle filiali in una certa regione, che ha cinque province, siano 1, 2, 3, 4, 5. Per ogni provincia *i* = 1, …, 5 c’è la possibilità di aprire una filiale *Fi* nel capoluogo della provincia *i*. In base alle caratteristiche di tali eventuali filiali e del territorio, si stima che:

la eventuale filiale *F*1 servirebbe solo le province 1, 3;

la eventuale filiale *F*2 servirebbe solo le province 2, 3;

la eventuale filiale *F*3 servirebbe solo la provincia 3;

la eventuale filiale *F*4 servirebbe solo le province 2, 4;

la eventuale filiale *F*5 servirebbe solo le province 2, 3, 5.

Il problema è determinare quali filiali aprire, garantendo che ogni provincia sia servita, in modo da minimizzare il totale delle filiali aperte (cioè in modo da aprirne il meno possibile);

Variante: si assuma che aprire la filiale *Fi* comporti un costo *ci* (*i* = 1, …, 5): determinare quali filiali aprire, garantendo che ogni provincia sia servita, in modo da minimizzare il costo totale.

**7.** In un'agenzia di viaggio si presentano 5 clienti. Le offerte dell'agenzia riguardano un insieme di 3 località di villeggiatura. Ogni cliente gradirebbe recarsi in vacanza solo in un certo sottoinsieme delle località: il cliente 1 solo nella località 3; il cliente 2 solo nelle località 1, 3; il cliente 3 solo nella località 1; il cliente 4 solo nelle località 1, 3; il cliente 5 solo nelle località 1, 2. Per ogni località c’è a disposizione solo 1 posto.

Il problema è accontentare il maggior numero possibile di clienti.

Variante 1: Con le ipotesi sopra indicate, si supponga che per ogni località *j* ci siano a disposizione solo *bj* posti: nello specifico, per la località 1 ci sono 4 posti, per la località 2 ci sono 2 posti, per la località 3 di sono 2 posti. Il problema è accontentare il maggior numero possibile di clienti.

Variante 2: Con le ipotesi sopra indicate, si supponga che mandare un cliente in una località *j* renda all’agenzia un profitto *pj*: nello specifico, la località 1 rende un profitto 150, la località 2 rende un profitto 250, la località 3 rende un profitto 100. Un problema alternativo da risolvere può essere il seguente: massimizzare il profitto dell'agenzia.

**Altri esempi di modelli di programmazione lineare (intera)**

**8.** *Produzione su 1 macchina*. Una macchina M che lavora non più di 45 ore alla settimana può produrre 3 tipi di prodotto, *P*1, *P*2, *P*3. Per ciascun tipo di prodotto sono noti: il ricavo unitario, la produzione effettuata da M in 1 ora, la produzione massima effettuabile da M in una settimana (come di seguito).

ricavo unitario produzione in 1 ora produzione max settimanale

*P*1 4 50 pezzi 1000 pezzi

*P*2  12 25 pezzi 500 pezzi

*P*33 75 pezzi 1500 pezzi

Determinare le quantità di *P*1, *P*2, *P*3 da produrre in una settimana in modo da massimizzare il ricavo totale.

**9.** *Produzione in 2 stabilimenti*.Una casa automobilistica dispone di 2 stabilimenti dove vengono prodotti 4 tipi di automobili. La capacità produttiva dei 2 stabilimenti è rispettivamente pari a 8000 e 12000 automobili (si intende che, riguardo la capacità produttiva, per ogni stabilimento è indifferente produrre una automobile di un certo tipo oppure di un altro), mentre la quantità da produrre per ogni tipo di automobile è rispettivamente pari a 5000, 4800, 3800, 6400 unità. Produrre nello stabilimento *i* una automobile di tipo *j* garantisce un profitto *pij*: tali valori sono riportati nella tabella di seguito.

 automobili

1 2 3 4

stabilimenti 1 2 3 4 1

 2 2 2 6 2

Determinare le quantità di automobili da produrre in ogni stabilimento in modo da massimizzare il profitto totale.

**10.** *Programmazione della produzione*. Un’azienda deve produrre un bene per soddisfare un piano di vendita di 4 mesi che stabilisce le vendite da effettuare alla fine di ogni mese (di una certa quantità di bene). La capacità produttiva varia da mese a mese, così come il costo unitario di produzione e il costo unitario di giacenza alla fine di ogni mese nel magazzino di cui l’azienda può servirsi. Non ci sono giacenze in magazzino all’inizio, né si desidera averne alla fine dei 4 mesi.

Mese vendite da effettuare capacità prod. costo prod. costo giacenza

1 20 unità 40 unità 34 2

2 30 unità 50 unità 36 3

3 50 unità 30 unità 32 2

4 40 unità 50 unità 38

Determinare le quantità di bene da produrre in ogni mese in modo da minimizzare il costo totale.

**11.** *Cammino di costo minimo*. Sia *G =* (*V*, *A*) un grafo orientato e siano *s* e *t* due vertici di *G*. Ad ogni arco (*i*, *j*) ∈ *A* è associato un costo *qij* > 0. Il costo di un cammino da *s* a *t* è dato dalla somma dei costi degli archi che formano il cammino.

Determinare un cammino da *s* a *t* di costo minimo.

**12.** *Massimo flusso*. Sia *G =* (*V*, *A*) un grafo orientato e siano *s* e *t* due vertici di *G*. Ad ogni arco (*i*, *j*) ∈ *A* è associata una capacità *bij* > 0. Un flusso da *s* a *t* è un’assegnazione di valori *xij* > 0 per ogni arco (*i*, *j*) ∈ *A* tale che:  = 0 per ogni vertice *i* *≠ s*, *t* di *G* (cioè per ogni vertice *i* *≠ s*, *t* di *G*, la somma di ciò che entra è pari alla somma di ciò che esce); e *xij <* *bij* per ogni arco (*i*, *j*) ∈ *A*. Il valore di un flusso da *s* a *t* è .

Determinare un flusso da *s* a *t* di valore massimo.

**13.** *Pianificazione di progetti*. Un *progetto* è un insieme di *n* attività *Ai*, *i* = 1, …, *n*, ciascuna con una durata *di* > 0 nota. Fra alcune attività sono specificate relazioni di precedenza *Ai* < *Aj* ad indicare che l’istante di completamento dell’attività *Ai* deve precedere l’istante di inizio dell’attività *Aj*.

Pianificare le attività in modo da minimizzare il tempo di completamento del progetto.

**14.** *Localizzazione di impianti*. Bisogna attivare un certo numero di impianti, da scegliere fra *m* potenziali impianti, che dovranno rifornire *n* clienti. Attivare il potenziale impianto *j* costa *fj*. Ogni impianto si intende abbia capacità di rifornimento illimitata. Ogni cliente sarà collegato ad un unico impianto; in particolare collegare un cliente *i* ad un impianto *j* comporta un costo *cij*.

Scegliere quali impianti attivare in modo da minimizzare i costi complessivi di attivazione e di collegamento ai clienti.

## Soluzioni

**8.** Variabili decisionali: *xi* per ogni *i* = 1, 2, 3;

*xi* indica la quantità di prodotto *Pi* da produrre (in una settimana).

Modello: max 4*x*1 + 12*x*2 + 3*x*3

*x*1 *<* 1000

 *x*2 *<* 500

 *x*3 *<* 1500

(1/50) *x*1 + (1/25) *x*2 +(1/75) *x*3 *<* 45

 *xi* > 0 per ogni *i* = 1, 2, 3;

 *xi* intero per ogni *i* = 1, 2, 3.

**9.** Variabili decisionali: *xij* per ogni *i* = 1, 2, e *j* = 1, 2, 3, 4;

*xij* indica la quantità prodotta nello stabilimento *i* di automobili di tipo *j*.

Modello: max 2*x*11 + 3*x*12 + 4*x*13 + 1*x*14 + 2*x*21 + 2*x*22 + 6*x*23 + 2*x*24

*x*11 + *x*12 *+ x*13 + *x*14 *<* 8000

 *x*21 + *x*22 *+ x*23 + *x*24 *<* 12000

 *x*11 + *x*21  *>* 5000

 *x*12 + *x*22  *>* 4800

 *x*13 + *x*23 *>* 3800

 *x*14 + *x*24 *>* 6400

 *xij* > 0 per ogni *i* = 1, 2, e *j* = 1, 2, 3, 4;

 *xij* intero per ogni *i* = 1, 2, e *j* = 1, 2, 3, 4. (eventualmente)

**10.** Variabili decisionali: *xi* per ogni *i* = 1, 2, 3, 4;

*xi* indica la quantità di prodotto da produrre nel mese *i*.

Modello: min 34*x*1 + 36*x*2 + 32*x*3 + 38*x*4 + 2(*x*1 - 20) + 3(*x*1 + *x*2 - 50) +

 + 2(*x*1 + *x*2 + *x*3 - 100)

*x*1 *<* 40

 *x*2 *<* 50

 *x*3 *<* 30

 *x*4 *<* 50

 *x*1 *>* 20

 *x*1+ *x*2 *>* 50

 *x*1+ *x*2 + *x*3 *>* 100

 *x*1+ *x*2 + *x*3 *+ x*4 *=* 140

 *xi* > 0 per ogni *i* = 1, 2, 3, 4;

 *xi* intero per ogni *i* = 1, 2, 3, 4. (eventualmente)

**11.** Variabili decisionali: *xij* per ogni arco (*i*, *j*) ∈ *A*;

*xij* avrà valore 1 se l’arco (*i*, *j*) sta nel cammino;

*xij* avrà valore 0 se l’arco (*i*, *j*) non sta nel cammino.

Modello: min 

  = 1

  = 0 per ogni vertice *i* *≠ s*, *t* di *G*

  *xij* > 0 per ogni (*i*, *j*) ∈ *A*;

 *xij* < 1 per ogni (*i*, *j*) ∈ *A*;

 *xij* intero per ogni (*i*, *j*) ∈ *A*.

**12.** Variabili decisionali: *xij* per ogni arco (*i*, *j*) ∈ *A*;

*xij* indica l’assegnazione di flusso per l’arco (*i*, *j*).

Modello: max 

 = 0 per ogni vertice *i* *≠ s*, *t* di *G*

 *xij* < *bij* per ogni (*i*, *j*) ∈ *A*;

  *xij* > 0 per ogni (*i*, *j*) ∈ *A*;

 *xij* intero per ogni (*i*, *j*) ∈ *A*. (eventualmente)

**13.** Variabili decisionali: *ti*- e *ti*+ per ogni *i* = 1, …, *n*;

*ti*- indica l’istante in cui l’attività *Ai* ha inizio;

*ti*+ indica l’istante in cui l’attività *Ai* ha termine;

si introduce anche una variabile ausiliaria *y* che avrà valore *y* = max{*ti*+: *i* = 1, …, *n*}

Modello: min *y*

*ti*+ *> ti*- + *di* per ogni *i* = 1, …, *n*;

 *ti*+ *< tj*- per ogni relazione di precedenza *Ai* < *Aj*

 *ti*- *>* 0 per ogni *i* = 1, …, *n*;

 *ti*+ *< y* per ogni *i* = 1, …, *n*.

**14.** Variabili decisionali: *xij* per ogni *i* = 1, …, *n*, e *j* = 1, …, *m*; *yj* per ogni *j* = 1, …, *m*;

*xij* avrà valore 1 se il cliente *i* è collegato all’impianto *j*;

*xij* avrà valore 0 se il cliente *i* non è collegato all’impianto *j*;

*yj* avrà valore 1 se l’impianto *j* è attivato;

*yj* avrà valore 0 se l’impianto *j* non è attivato.

Modello: min 

 = 1 per ogni *i* *=* 1, …, *n*;

 (ogni cliente è collegato ad un unico impianto)

 *xij* < *yj* per ogni *i* = 1, …, *n*, e *j* = 1, …, *m*;

 (ogni impianto si attiva se c’è almeno un cliente collegato)

  *xij* > 0 per ogni *i* = 1, …, *n*, e *j* = 1, …, *m*;

 *xij* < 1 per ogni *i* = 1, …, *n*, e *j* = 1, …, *m*;

 *xij* intero per ogni *i* = 1, …, *n*, e *j* = 1, …, *m*;

 *yj* > 0 per ogni *j* = 1, …, *m*;

 *yj* < 1 per ogni *j* = 1, …, *m*;

 *yj* intero per ogni *j* = 1, …, *m*.

**Altri esempi di modelli di programmazione lineare (intera): casi particolari**

**C1.** *Prima variante a “problema dei trasporti”:* ***costi fissi****.*

Nel problema dei trasporti la funzione costo per il trasporto di merce da sorgente *i* a deposito *j* è *cijxij*. Si consideri la variante in cui tale funzione sia *Fij* + *cijxij* dove *Fij* > 0 rappresenta un costo fisso (un costo di avviamento), tale che *Fij* > 0 a se *xij* > 0 (cioè se il trasporto fra *i* e *j* avviene) e *Fij* = 0 se *xij* = 0 (cioè se il trasporto fra *i* e *j* non avviene).

#### Soluzione

Si introducono nuove variabili decisionali: *yij* per ogni *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

*yij* avrà valore 1 se si trasporta merce da sorgente *i* a destinazione *j* (cioè se *xij* > 0)

*yij* avrà valore 0 se non si trasporta merce da sorgente *i* a destinazione *j* (cioè se *xij* = 0)

Modello: min +  [variazione in funzione obiettivo]

 < *di* per ogni *i* = 1, …, *s*  (vincoli di disponibilità)

> *rj* per ogni *j* = 1, …, *t* (vincoli di richiesta)

 *xij* > 0 per ogni *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

 *xij* intero per ogni *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*. (eventualmente)

 [aggiunta di vincoli]

*xij* < *M* *yij* per ogni *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

 *yij* > 0 per ogni *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

 *yij* < 1 per ogni *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

 *yij* intero per ogni *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*.

Commento sul vincolo *xij* < *M* *yij* (per ogni *i* e *j*):

*M* è un numero molto grande (più grande di ogni possibile termine della formulazione);

se *xij >* 0, allora *xij* < *M* *yij* implica *yij* = 1(quindi il costo fisso nella f. obiettivo è attivato);

se *xij =* 0, allora *xij* < *M* *yij* è sempre soddisfatto, non crea problemi (si osservi che essendo il termine *Fij* positivo, la f. obiettivo determinerà *yij =* 0).

**C2.** *Seconda variante a “problema dei trasporti”:* ***lotti minimi****.*

Nel problema dei trasporti ogni quantità trasportata *xij* per cui si ha *xij* > 0 non è vincolata ad assumere almeno un certo valore. Si consideri la variante in cui ogni quantità trasportata *xij* per cui si ha *xij* > 0 debba essere maggiore o uguale a un valore *Lij*.

#### Soluzione

Si introducono nuove variabili decisionali: *yij* per ogni *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

*yij* avrà valore 1 se si trasporta merce da sorgente *i* a destinazione *j* (cioè se *xij* > 0)

*yij* avrà valore 0 se non si trasporta merce da sorgente *i* a destinazione *j* (cioè se *xij* = 0)

Modello: min 

 < *di* per ogni *i* = 1, …, *s* (vincoli di disponibilità)

> *rj* per ogni *j* = 1, …, *t* (vincoli di richiesta)

 *xij* > 0 per ogni *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

 *xij* intero per ogni *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*. (eventualmente)

 [aggiunta di vincoli]

 *xij* < *M* *yij* per ogni *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

 *xij* > *Lij* *yij* per ogni *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

 *yij* > 0 per ogni *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

 *yij* < 1 per ogni *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

 *yij* intero per ogni *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*.

Commento sui vincoli *xij* < *M* *yij*  e *xij* > *Lij* *yij* (per ogni *i* e *j*):

*M* è un numero molto grande (più grande di ogni possibile termine della formulazione);

se *xij >* 0, allora *xij* < *M* *yij* implica *yij* = 1 e di conseguenza *xij* > *Lij* *yij* diventa *xij* > *Lij*;

se *xij =* 0, allora nessun problema è creato (si osservi che 0 > *Lij* *yij* implica *yij* = 0, mentre 0 < *M* *yij* è sempre soddisfatto).

**C3.** *Schedulazione su 1 processore (con deadlines e release times):* ***vincoli disgiuntivi****.*

Bisogna far eseguire *n* lavori ad un processore, che ne può eseguire uno alla volta. Ogni lavoro *i* è caratterizzato da:

*pi* = tempo di processamento;

*ri* = istante prima del quale il lavoro *i* non può iniziare (*release time*);

*di* = istante entro il quale il lavoro *i* deve essere completato (*deadline*).

Problema: assegnare al processore una sequenza dei lavori, rispettando i release times e i deadlines, in modo da minimizzare la somma degli istanti di completamento delle lavorazioni.

#### Soluzione

Variabili decisionali: *Ci* per *i =* 1, …, *n*; *xij* per ogni *i* = 1, …, *n* e *j* = 1, …, *n* (≠ *i*);

*Ci* = istante di completamento del lavoro *i*;

*xij* avrà valore 1 se il lavoro *i* è eseguito prima del lavoro *j*

*xij* avrà valore 0 se il lavoro *i* non è eseguito prima del lavoro *j*

 min 

 *Ci* > *ri* + *pi* per ogni *i* = 1, …, *n*

 *Ci* < *di* per ogni *i* = 1, …, *n*

 *Ci* < *Cj* – *pj + M* (1 – *xij*) per ogni *i* = 1, …, *n* e *j* = 1, …, *n* (≠ *i*)

*Cj* < *Ci* – *pi + M xij* per ogni *i* = 1, …, *n* e *j* = 1, …, *n* (≠ *i*)

 *xij* > 0 per ogni *i* = 1, …, *n* e *j* = 1, …, *n* (≠ *i*)

*xij* < 1 per ogni *i* = 1, …, *n* e *j* = 1, …, *n* (≠ *i*)

 *xij* interoper ogni *i* = 1, …, *n* e *j* = 1, …, *n* (≠ *i*)

Commento sui due vincoli *Ci* < *Cj* – *pj + M* (1 – *xij*) e *Cj* < *Ci* – *pi + M xij* (per ogni *i* e *j*):

*M* è un numero molto grande (più grande di ogni possibile termine della formulazione);

se *xij =* 1 (cioè *i* precede *j*), allora si ha *Ci* < *Cj* – *pj* (che è un vincolo sensato/utile per il problema)e *Cj* < *Ci* – *pi + M* (che diventa un vincolo sempre soddisfatto);

se *xij =* 0 (cioè *i* è preceduto da *j*), allora si ha *Ci* < *Cj* – *pi + M* (che diventa un vincolo sempre soddisfatto) e *Cj* < *Ci* – *pi* (che è un vincolo sensato/utile per il problema).

**Altri esempi**

**E1.** Una raffineria ha a disposizione due procedimenti di raffinazione. Nel procedimento A, 1 u. di greggio libico e 2 u. di greggio nigeriano producono 5 u. di benzina e 2 u. di gasolio. Nel procedimento B, 4 u. di greggio libico e 2 u. di greggio nigeriano producono 3 u. di benzina e 8 u. di gasolio. Le disponibilità di greggio sono: 100 u. di greggio libico e 150 u. di greggio nigeriano. Le vendite previste (cioè le quantità minime da produrre) sono: 200 u. di benzina e 75 u. di gasolio; i profitti unitari sono *p*B e *p*G rispettivamente. Il problema della raffineria è stabilire quante volte usare ognuno dei processi A e B (si indichino questi due numeri con *x*1 e *x*2) in modo da massimizzare il profitto totale.

**E2.** Un’agenzia pubblicitaria ha annunciato di essere in grado di investire in modo ottimo il denaro dei suoi clienti mediante la programmazione lineare. L’approccio consiste nell’identificare le varie “audience” che interessano al cliente quali i single, le coppie sposate ecc. Per ogni audience *i*, il cliente desidera un livello di esposizione *Ei* ( = numero di persone appartenenti all’audience *i* che vengono raggiunte). Per ogni mezzo pubblicitario *j* (periodici, radio, TV, ecc.) e per ogni audience *i* si definisce un coefficiente *aij* che indica il numero di persone appartenenti alla *i-*esima audience che vendono raggiunte quando si spende 1 Euro nel *j*-esimo mezzo pubblicitario. Assumendo che le audience siano 3 e i mezzi pubblicitari 5, in che modo l’agenzia usa la programmazione lineare? (Come variabili decisionali, si possono prendere *xj* = somma destinata al mezzo pubblicitario *j*).

**E3.** Due cantieri navali di una stessa ditta hanno rispettivamente 7 e 8 motoscafi. Bisogna effettuare delle consegne presso 3 porti, i quali richiedono rispettivamente 5, 3 e 3 motoscafi. La consegna di ogni singolo motoscafo dal cantiere *i* al porto *j* richiede un costo *cij*. In dettaglio: *c*11 = 5; *c*12 = 4; *c*13 = 8; *c*21 = 1; *c*22 = 3; *c*23 = 7.

Il problema è definire un piano di consegne in modo da minimizzare il costo totale.

**E4.** Un insieme *N* di *n* persone deve essere ricoverata in un ospedale. L’ospedale ha un insieme *M* di *m* reparti. Ogni reparto *j* ha disponibili *dj* posti. Per diversi motivi, ogni persona *i* puòessere ricoverata in un reparto appartenente a un sottoinsieme *Mi* di *M*; di conseguenza, ogni reparto *j* può accogliere solo persone appartenenti a un sottoinsieme *Nj* di *N*. Il problema è ricoverare il maggior numero possibile di persone.

**E5.** Una ditta di alimenti produce bottiglie di olio da 1 litro, miscelando oli sfusi che ottiene direttamente da produttori suoi soci: in dettaglio, può contare su tre tipi di olio sfuso in quantità rispettivamente pari a 2.000, 5.000, 7.000 litri. La ditta produce: bottiglie di olio fruttato (più pregiato) il cui ricavo unitario è 12 Euro, bottiglie di olio comune (più economico) il cui ricavo unitario è 7 Euro. Inoltre: ogni bottiglia di olio fruttato è ottenuta miscelando i tre tipi di olio sfuso in quantità rispettivamente pari a 0,3 - 0,5 - 0,2 litri; ogni bottiglia di olio comune è ottenuta miscelando i tre tipi di olio sfuso in quantità rispettivamente pari a 0,2 - 0,3 - 0,5 litri. Infine per non rischiare che parte della produzione rimanga invenduta, si stima che non si debbano produrre più di 5.000 e 4.000 bottiglie rispettivamente di olio fruttato e di olio comune.

Il problema è determinare le quantità di bottiglie di olio fruttato e di olio comune da produrre rispettivamente in modo da massimizzare il ricavo totale.

**Soluzioni**

**E1.** max *p*B (5*x*1 + 3*x*2) + *p*G (2*x*1 + 8*x*2)

 *x*1 + 4*x*2 < 100

 2*x*1 + 2*x*2 < 150

 5*x*1 + 3*x*2 > 200

 2*x*1 + 8*x*2 > 75

 *x*1, *x*2 > 0

**E2.** min 

 > *Ei* *i* = 1, …, 3

*xj* > 0 *j* = 1, …, 5

**E3.** Variabili decisionali: *xij* per ogni *i* = 1, 2, e *j* = 1, 2, 3;

*xij* indica la quantità di motoscafi trasportati dal cantiere *i* al porto *j*.

Modello: min 5*x*11 *+* 4*x*12 *+* 8*x*13 *+* 1*x*21 *+* 3*x*22 *+* 7*x*23

 *x*11 *+ x*12 *+ x*13 < 7

 *x*21 *+ x*22 *+ x*23 < 8

  *x*11 *+ x*21 > 5

  *x*12 *+ x*22 > 3

  *x*13 *+ x*31 > 3

 *x*11, *x*12, *x*13, *x*21, *x*22, *x*23 > 0

 *x*11, *x*12, *x*13, *x*21, *x*22, *x*23 interi

### **E4.** Sia *F* l’insieme delle coppie (*i*, *j*) *compatibili*, cioè, *F =* {(*i*, *j*) : *i* ∈ *Nj* e *j* ∈ *Mi*};

Variabili decisionali: *xij* per ogni (*i*, *j*) ∈ *F*;

*xij* avrà valore 1 se il ricoverando *i* è assegnato al reparto *j*;

*xij* avrà valore 0 se il ricoverando *i* non è assegnato al reparto *j*.

Modello: max 

 < 1 per ogni *i* = 1, …, *n*

 (ogni persona va al più a un reparto)

 < *dj* per ogni *j* = 1, …, *m*

 (ogni reparto *j* accoglie al più *dj* persone)

 *xij* > 0 per ogni (*i*, *j*) ∈ *F*;

 *xij* < 1 per ogni (*i*, *j*) ∈ *F*;

 *xij* intero per ogni (*i*, *j*) ∈ *F*.

**E5.** Associando l’olio fruttato all’indice 1, e l’olio comune all’indice 2:

Variabili decisionali: *xi* per ogni *i* = 1, 2,

*xi* indica la quantità di bottiglie di olio *i* da produrre.

Modello: max 12*x*1 *+* 7*x*2

 0,3 *x*1 *+*0,2 *x*2 < 2.000

0,5 *x*1 *+*0,3 *x*2 < 5.000

 0,2 *x*1 *+*0,5 *x*2 < 7.000

  *x*1< 5.000

 *x*2< 4.000

 *x*1, *x*2 > 0

 *x*1, *x*2 interi