**Esercizi:** Formulare in termini di programmazione lineare (intera) i seguenti problemi

**A1.** Presso un Ente per la protezione civile stanno organizzando dei soccorsi da portare a 8 diverse zone, siano 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 devastate da un cataclisma. A disposizione ci sono 7 squadre di soccorso, A, B, C, D, E, F, G ognuna specializzata per particolari evenienze. Ogni squadra può soccorrere solo una zona. Inoltre, non ogni squadra risulta adeguata per una qualsiasi zona (a seconda dei danni provocati dal cataclisma in ciascuna zona). In particolare: A può soccorrere adeguatamente solo 3, 5, 6, 8; B solo 3, 7; C solo 2, 3, 7; D solo 2, 4; E solo 1, 3, 4, 5, 6, 7; F solo 1, 4, 5; G solo 3, 8. Il problema è determinare il maggior numero di zone a cui si può inviare una squadra di soccorso adeguata.

(Nota: tale problema è equivalente a massimizzare il numero di abbinamenti compatibili)

**A2.** Una multinazionale decide di aprire nuove filiali, avendo a disposizione un budget pari a 15. In particolare, c’è la possibilità di scegliere fra 7 potenziali filiali, A, B, C, D, E, F, G. Ognuno di tale potenziale filiale richiede un costo di avvio, come di seguito: *c*A = 7, *c*B = 5, *c*C = 3, *c*D = 9, *c*E = 4, *c*F = 8, *c*G = 10. D’altro canto, si stima che ognuno di esse possa garantire dopo un anno un profitto, come di seguito: *p*A = 4, *p*B = 5, *p*C = 7, *p*D = 8, *p*E = 3, *p*F = 5, *p*G = 9. Si intende che una filiale non può essere aperta parzialmente (cioè, o una filiale si apre oppure no). Il problema è scegliere quali filiali aprire in modo da massimizzare la somma dei profitti dopo un anno.

**A3.** Una manifattura che lavora tabacco desidera produrre due tipi di sigari: uno di qualità elevata (Originale), l’altro di qualità media (Antico). Il profitto che l’azienda presume di trarre dalla produzione di una unità di sigaro Originale è 10, mentre dalla produzione di una unità di sigaro Antico è 5. Tale produzione necessita di una particolare combinazione di due tipi di tabacco, diciamo di tipo A e di tipo B rispettivamente. Per produrre 1 unità di sigaro Originale, si ha bisogno di 7 unità di tabacco di tipo A, e di 3 unità di tabacco di tipo B. Per produrre 1 unità di sigaro Antico, si ha bisogno di 2 unità di tabacco di tipo A, e di 8 unità di tabacco di tipo B. Infine, la manifattura ha a disposizione 1000 unità di tabacco di tipo A e 2400 unità di tabacco di tipo B. Il problema è determinare le quantità di Originale e di Antico da produrre in modo da massimizzare il profitto totale.

**A4.** A causa di un blocco ferroviario, quattro concessionarie, diciamo A, B, C, D, rimangono sprovviste di autovetture di un certo tipo. Si può ovviare a tale imprevisto rifornendo tali concessionarie da altre due concessionarie vicine, che hanno a disposizione (in giacenza) quel tipo di autovetture. Tali concessionarie hanno a disposizione rispettivamente 8 e 15 autovetture. Le concessionarie A, B, C, D hanno bisogno rispettivamente di 3, 4, 7, 2 autovetture. La consegna di ogni singola autovettura dal concessionario *i =* 1, 2 al concessionario *j =* A, B, C, D richiede un costo *cij*. In dettaglio: *c*1A = 4; *c*1B = 4; *c*1C = 5; *c*1D = 5; *c*2A = 2; *c*2B = 7; *c*2C = 5; *c*2D = 7. Il problema è pianificare le consegne ai concessionari A, B, C, D in modo da minimizzare il costo totale.

**A5.** Il lavoro di una certa ditta consiste nel ricavare 3 materie prime, siano A, B, C, decomponendo il materiale che essa estrae da 2 cave, siano cava 1 e cava 2. In particolare:

per ogni unità di materiale estratto dalla cava 1, la ditta ricava 5 u. di A, 3 u. di B, 0 u. di C;

per ogni unità di materiale estratto dalla cava 2, la ditta ricava 3 u. di A, 2 u. di B, 3 u. di C.

Il costo di estrazione di 1 unità di materiale dalla cava 1 è 30.

Il costo di estrazione di 1 unità di materiale dalla cava 2 è 40.

Il piano di produzione richiede che vengano ottenuti almeno 70 u. di A, 40 u. di B e 20 u. di C.

Il problema è determinare il numero di unità di materiale da estrarre rispettivamente dalla cava 1 e dalla cava 2 in modo da minimizzare il costo totale (soddisfacendo il piano di produzione).

**A6.** Una persona riceve in eredità cinque ville. In generale pensa di venderle, ma vuole tenerne per sé un certo sottoinsieme S tale che: almeno una delle ville in S stia al mare; almeno una delle ville in S stia in un posto tranquillo; almeno una delle ville in S stia vicino a un ospedale; almeno una delle ville in S sia verde. La situazione è la seguente:

Villa 1: non al mare; non in posto tranquillo; vicino ospedale; verde;

Villa 2: non al mare; in posto tranquillo; vicino ospedale; non verde;

Villa 3: al mare; non in posto tranquillo; non vicino ospedale; verde;

Villa 4: al mare; in posto tranquillo; non vicino ospedale; non verde.

Villa 5: al mare; non in posto tranquillo; vicino ospedale; non verde.

Il problema è massimizzare il numero delle ville da vendere.

(Nota: tale problema è equivalente a minimizzare il numero delle ville da tenere)

**A7.** Una TV privata vuole decidere il palinsesto delle sue trasmissioni per una delle prossime settimane, focalizzando in particolare sui programmi di prima serata. Ci sono a disposizione 10 programmi: quindi la TV privata vuole determinare per ognuna delle 7 sere della settimana quale programma mandare in onda (si intende che ogni programma può andare in onda solo una sera). Ogni programma *i*, se messo in onda, comporta un costo *ci*, per *i* = 1, …, 10 (per la realizzazione, per l’acquisto dall’esterno, …). In base a contatti già presi con vari sponsor, la TV privata sa con buona approssimazione che se il programma *i* andrà in onda la sera *j* allora otterrà (grazie agli sponsor) un ricavo *rij*, per *i* = 1, …, 10 e per *j* = 1, …, 7.

Il problema è determinare per ognuna delle 7 sere della settimana quale programma mandare in onda in modo da massimizzare il profitto totale (dato da ricavo totale meno costo totale).

**Esercizi:** Formulare in termini di programmazione lineare (intera) i seguenti problemi

**Z1.** Un’azienda produce due prodotti, siano A e B. La produzione avviene mediante lavorazione sull’unica macchina M che l’azienda possiede: M può produrre solo 1 unità (di ogni prodotto) alla volta, e può lavorare al massimo 1500 ore in una settimana. Inoltre la produzione di ciascun prodotto richiede un certo quantitativo di prodotto grezzo P, che l’azienda possiede in quantità di 1200 unità.

Per produrre 1 unità di A c’è bisogno di 5 ore di lavorazione di M e di 4 unità di P. Per produrre 1 unità di B c’è bisogno di 4 ore di lavorazione di M e di 3 unità di P. Inoltre l’azienda: (i) riguardo A, vuole che se ne producano almeno 100 unità ma non più di 250 unità; (ii) riguardo B, vuole che, nel caso in cui se ne produca qualcosa, se ne producano almeno 100 unità. Il profitto che l’azienda trae dalla produzione di 1 unità di A è 25, mentre il profitto che trae dalla produzione di 1 unità di B è 15.

Il problema è determinare le unità di A e B da produrre in modo da massimizzare il totale dei profitti in una settimana.

**Z2.** Il Comune di una città ha bandito 4 appalti, siano A, B, C, D (per rispettivi 4 lavori). In città ci sono 7 ditte, siano 1, 2, …, 7. Ogni ditta *i*, per *i* = 1, 2, …, 7, presenta un preventivo di spesa *sij* per ogni appalto *j*, per *j* = A, B, C, D. Per motivi precauzionali/legislativi, il Comune non vuole/può assegnare più di 2 appalti a una stessa ditta.

Il problema è determinare a quale ditta assegnare ogni appalto, in modo da minimizzare il totale delle spese.

**Z3.** Una ditta farmaceutica produce vitamine B e C, estraendole da tre tipi di alimento, siano A1, A2, A3. Da 1 unità dell’alimento A1, si estraggono 3 u. di B, e 2 u. di C. Da 1 unità dell’alimento A2, si estraggono 2 u. di B, e 3 u. di C. Da 1 unità dell’alimento A3, si estraggono 1 u. di B, e 5 u. di C. Tali alimenti sono da acquistare. Acquistare A1 e A2 è semplice (basta recarsi vicino la ditta) e il loro costo unitario è rispettivamente 3 e 4. Acquistare A3 è complicato, nel senso che: il costo unitario è 2, però nel caso di acquisto (maggiore di 0 unità), bisogna acquistarne almeno 30 unità e bisogna pagare un costo fisso pari a 200 per il trasporto. La ditta deve produrre almeno 150 unità di vitamina B, e almeno 300 unità di vitamina C.

Il problema è determinare quante unità di A1, A2, A3 acquistare in modo da minimizzare il totale dei costi.

**Z4.** Un’agenzia di collocamento riceve una mattina via email un insieme *M* di *m* richieste di lavoro. Nel suo database ci sono *n* persone. Ogni persona *i*, per *i* = 1, …, *n*,può essere collocata solo per 1 lavoro nell’ambito di un certo sottoinsieme *Mi* di *M* (cioè *Mi* è il sottoinsieme dei lavori in *M* che la persona *i* saprebbe svolgere).

Il problema è collocare più persone possibili - cioè massimizzare il numero di accoppiamenti persona/lavoro [indicato con *P* l’insieme delle persone, si può indicare con *Pj* il sottoinsieme di *P*, per *j* = 1, …, *m*, che indica quali sono le persone che saprebbero svolgere il lavoro *j*].

**Z5.** In un museo bisogna istallare delle telecamere in modo che tutti i corridoi siano visualizzati. Nel grafo *G* = (*V*, *E*) sottostante [*V* è l’insieme dei nodi, *E* è l’insieme degli archi] ogni arco rappresenta un corridoio, e ogni nodo il punto di incrocio fra i corridoi che incidono su di esso. Istallando una telecamera su un nodo, si visualizzano tutti e soltanto gli archi che incidono su di esso.

Il problema è determinare i nodi su cui istallare le telecamere, garantendo tutti gli archi siano visualizzati, in modo da istallare il minor numero possibile di telecamere.

[per ogni arco *e* di *G*, si può indicare con *V*(*e*) l’insieme (cioè la coppia) dei nodi che lo formano: allora posizionando una telecamera su un nodo *v* di *G*, si visualizzano tutti e soltanto gli archi *e* tali che *v* ∈ *V*(*e*)].



**Z6.** Una casa automobilistica ha 3 impianti di produzione, uno in Italia (I), uno in Polonia (P), uno in Slovenia (S). La casa automobilistica produce 4 tipi di autovetture, siano 1, 2, 3, 4. Ciascun impianto può produrre indifferentemente ognuno di questi tipi di autovetture. In generale si stima che ogni impianto (in un anno) possa produrre al più rispettivamente *d*I, *d*P, *d*S, autovetture (indipendentemente dal tipo di autovetture). D’altro canto si stima che (in un anno) debbano essere prodotte rispettivamente *r*1, *r*2, *r*3, *r*4 autovetture di tipo 1, 2, 3, 4. Il costo per produrre in un impianto *i* (peri = I, P, S) 1 autovettura di tipo *j* (per *j* = 1, 2, 3, 4) è *cij*. Inoltre tenere aperto ognuno di questi impianti (in un anno) costa rispettivamente CI, CP, CS [nota: un impianto è da tenere aperto solo se vi si produce almeno 1 autovettura di un qualunque tipo].

Il problema è determinare la produzione in ciascun stabilimento di ciascuna autovettura, in modo da minimizzare il totale dei costi (in un anno).

**Z7.** Una ditta ha la possibilità di effettuare degli investimenti, da scegliere fra *n* possibili investimenti. Ciascun investimento *i =* 1, …, *n*, è finanziabile in due anni, diciamo anno 1 e anno 2, cioè investire in *i* significa dover versare una somma *ai*1 all’inizio dell’anno 1 e una somma *ai*2 all’inizio dell’anno 2: poi, alla fine dell’anno 2, l’investimento *i* garantisce un profitto *pi*. La ditta può investire una somma *b*1 all’inizio dell’anno 1, e una somma *b*2 all’inizio dell’anno 2 (tali disponibilità non consentono di effettuare tutti gli investimenti). Ogni investimento non può essere effettuato parzialmente, cioè o si effettua oppure no.

Il problema è scegliere gli investimenti da effettuare in modo da massimizzare il profitto totale alla fine dell’anno 2.

**Soluzioni**

**A.1** Riconducibile a “matching”

**A.2** Riconducibile a “riempimento”

**A.3** Riconducibile a “combinando risorse”

**A.4** Riconducibile a “trasporti”

**A.5** Riconducibile a “decomponendo risorse”

**A.6** Riconducibile a “covering”

**A.7** Riconducibile a “assegnamento”.

**Z.1**

Variabili decisionali:

*x*A = quantità prodotta di A

*x*B = quantità prodotta di B

*y*B variabile binaria

*y*B = 1 se si produce qualcosa di B (cioè se *x*B > 0)

*y*B = 0 altrimenti (cioè se *x*B = 0)

 max 25*x*A +15 *x*B

 5*x*A + 4*x*B < 1500

 4*x*A + 3*x*B < 1200

 100 < *x*A < 250

 *x*B < M*y*B (dove M è uno scalare molto grande)

 *x*B > 100*y*B

 *x*A, *x*B > 0

 0 < *y*B < 1

 *y*B intero

**Z.2**

Variabili decisionali:

*xij* per *i* = 1, …, 7 e *j* = 1, …, 4

*xij* = 1 se l’appalto *i* è assegnato alla ditta *j*

*xij* = 0 altrimenti

 min 

 = 1 per *j* = 1, …, 4

 < 2 per *i* = 1, …, 7

 0 < *xij* < 1 per *i* = 1, …, 7 e per *j* = 1, …, 4

 *xij* intero per *i* = 1, …, 7 e per *j* = 1, …, 4

**Z.3**

Variabili decisionali:

*xi* = quantità di alimento A*i* da acquistare, per *i* = 1, 2, 3

*y*3 variabile binaria

*y*3 = 1 se si acquista qualcosa di A3 (cioè se *x*3 > 0)

*y*3 = 0 altrimenti (cioè se *x*3 = 0)

 min 3*x*1 + 4*x*2 + 2*x*3 + 200*y*3

 3*x*1 + 2*x*2 + *x*3 > 150

 2*x*1 + 3*x*2 + 5*x*3 > 300

 *x*3 < M*y*3 (dove M è uno scalare molto grande)

 *x*3 > 30*y*3

 *x*1, *x*2, *x*3 > 0

 0 < *y*3 < 1

 *y*3 intero

**Z.4**

### Sia *F* l’insieme delle coppie (*i*, *j*) “compatibili” [cioè, la persona *i* può svolgere il lavoro *j*]

Variabili decisionali:

*xij* per ogni coppia (*i*, *j*) ∈ *F*

*xij* = 1 se la persona *i* è collocata per lavoro *j*

*xij* = 0 altrimenti

 max 

 < 1 per ogni *i* = 1, …, *n*

 < 1 per ogni *j* = 1, …, *m*

 0 < *xij* < 1 per ogni (*i*, *j*) ∈ *F*

 *xij* intero per ogni (*i*, *j*) ∈ *F*

**Z.5**

Variabili decisionali:

*xv* per ogni nodo *v* di *G*.

*xv*= 1 se sul nodo *v* è istallata una telecamera

*xi*= 0 altrimenti.

 min 

  > 1 per ogni arco *e* di *G*

 0 < *xv* < 1 per ogni nodo *v* di *G*

 *xv* intero per ogni nodo *v* di *G*

**Z.6**

Variabili decisionali: *xij* per ogni *i* = I, P, S e *j* = 1, …, 4;

*xij* indica la quantità di autovetture di tipo *j* prodotte nello stabilimento *i*

*yi* variabile binaria, per *i* = I, P, S

*yi* = 1 se in impianto *i* si produce qualcosa (cioè se  > 0)

*yi* = 0 altrimenti (cioè se  = 0)

 min  + 

 < *di* per ogni *i* = I, P, S

 > *rj* per ogni *j* = 1, …, 4

 *xij* > 0 per ogni *i* = I, P, S e *j* = 1, …, 4;

 *xij* intero per ogni *i* = I, P, S e *j* = 1, …, 4;

  < M*yi* per ogni *i* = I, P, S (dove M è uno scalare molto grande)

 0 < *yi* < 1 per ogni *i* = I, P, S

 *yi* intero per ogni *i* = I, P, S

**Z.7**

Variabili decisionali:

*xi* per *i =* 1, …, *n*

*xi*= 1 se l’investimento *i* è effettuato

*xi*= 0 altrimenti

 max 

 < *b*1

 < *b*2

 0 < *xi* < 1 per ogni *i* = 1, …, *n*

 *xi* intero per ogni *i* = 1, …, *n*