

## Esempi sull'interpretazione economica della dualità

### 1) Componendo risorse

Un'azienda vinicola desidera produrre due tipi di vino: uno da tavola, uno da dessert. Il profitto che l'azienda trae dalla produzione di 1 unità di vino da tavola è 3, mentre dalla produzione di 1 unità di vino da dessert è 7. Tale produzione necessita di una particolare combinazione di due tipi di uva: diciamo di tipo A e di tipo B rispettivamente. Per produrre 1 unità di vino da tavola, si ha bisogno di 3 unità di uva di tipo A e di 2 unità di uva di tipo B. Per produrre 1 unità di vino da dessert, si ha bisogno di 1 unità di uva di tipo A e di 4 unità di uva di tipo B. Infine l'azienda ha a disposizione 1000 unità di uva di tipo A e 400 unità di uva di tipo B. Il problema è determinare le quantità di vino da tavola e da dessert da produrre in modo da massimizzare il profitto totale.

Variabili decisionali:  $x_1, x_2$

$x_1$  = quantità di vino da tavola prodotta

$x_2$  = quantità di vino da dessert prodotta

$$(1) \quad \begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 7x_2 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 1000 \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 400 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La soluzione ottima è  $x^*_1 = 0, x^*_2 = 100$ , con valore 700.

Si consideri di seguito il problema duale del problema (1).

$$(2) \quad \begin{aligned} \min \quad & 1000 y_1 + 400 y_2 \\ & 3y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 7 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La soluzione ottima è  $y^*_1 = 0, y^*_2 = 7/4$ , con valore 700.

Sia  $y_j^*$  una componente della soluzione ottima del problema duale. Ricordando che a ogni vincolo del problema primale è associato una variabile del problema duale, sia  $b_j$  il termine noto del vincolo del problema primale associato alla variabile  $y_j$ , cioè la disponibilità della risorsa  $j$ . In particolare  $b_j y_j^*$  è un termine della funzione obiettivo del problema duale: all'ottimo esso vale  $b_j y_j^*$ .

Ora si assuma di poter far variare  $b_j$ : sia  $b_j + \Delta b_j$ .

- Se  $\Delta b_j > 0$  (che significa un acquisto della risorsa  $j$ ), allora per il Teorema della Dualità Forte il profitto ottimo varia di  $y_j^* \Delta b_j \geq 0$  (nel caso di acquisto gratuito); ma in generale varia di  $y_j^* \Delta b_j - y'_j \Delta b_j$ , dove  $y'_j$  è il prezzo unitario di acquisto della risorsa  $j$ ; perciò tale acquisto è conveniente solo se  $y_j^* \Delta b_j - y'_j \Delta b_j > 0$ , cioè solo se  $y'_j < y_j^*$ .
- Se  $\Delta b_j < 0$  (che significa una vendita della risorsa  $j$ ), allora per il Teorema della Dualità Forte il profitto ottimo varia di  $y_j^* \Delta b_j \leq 0$  (nel caso di vendita gratuita); ma in generale varia di  $y_j^* \Delta b_j + y'_j |\Delta b_j| = y_j^* \Delta b_j - y'_j \Delta b_j$ , dove  $y'_j$  è il prezzo unitario di vendita della risorsa  $j$ ; perciò tale vendita è conveniente solo se  $y_j^* \Delta b_j - y'_j \Delta b_j > 0$ , cioè solo se  $y'_j > y_j^*$  (essendo  $\Delta b_j < 0$ ).

Quindi la soluzione ottima del problema duale  $(y_1^*, \dots, y_m^*)$  rappresenta il valore intrinseco di ogni risorsa  $j$ , per  $j = 1, \dots, m$ . Tale valore è detto anche *prezzo ombra*, nel senso che:

- è conveniente acquistare la risorsa  $j$  (entro un certo limite di quantità), se la si acquista a un prezzo unitario che è al di sotto del prezzo ombra  $y_j^*$ .
- è conveniente vendere la risorsa  $j$  (entro un certo limite di quantità), se la si vende a un prezzo unitario che è al di sopra del prezzo ombra  $y_j^*$ .

Osservazione: i limiti di quantità entro i quali conviene acquistare/vendere una risorsa dipendono dal fatto che la soluzione ottima di base può cambiare per variazioni della disponibilità della risorsa, cioè del termine noto corrispondente; tali limiti sono calcolabili mediante semplici operazioni riportate nell'analisi di sensitività (o di post-ottimalità) e comunque sono calcolati dai software che risolvono i problemi di PL.

Tornando al nostro esempio si ha che:

$y_1^*$  = prezzo ombra dell'uva A

$y_2^*$  = prezzo ombra dell'uva B

Consideriamo ad esempio il prezzo ombra  $y_2^* = 7/4$  dell'uva di tipo B.

E' conveniente acquistare tale risorsa (entro un certo limite di quantità) ad un prezzo unitario

inferiore a  $7/4$ , dato che ciò garantisce un aumento del profitto totale.

E' conveniente vendere tale risorsa (entro un certo limite di quantità) ad un prezzo unitario superiore a  $7/4$ , dato che ciò garantisce un aumento del profitto totale.

E' indifferente acquistare o vendere tale risorsa (entro un certo limite di quantità) ad un prezzo unitario pari a  $7/4$ , dato che ciò non cambia il profitto totale.

## 2) Decomponendo risorse

Una persona vuole fare una dieta. In particolare deve assumere due tipi di sostanze, cioè proteine e vitamine, che può ricavare comprando tre tipi di alimenti, cioè frutta, latte, uova. In dettaglio:

1 unità di frutta contiene: 0 u. di proteine, 7 u. di vitamine;

1 unità di latte contiene: 2 u. di proteine, 3 u. di vitamine;

1 unità di uova contiene: 5 u. di proteine, 1 u. di vitamine.

Il costo unitario della frutta, del latte e delle uova è rispettivamente di 10, 20, 10.

La dieta richiede di assumere almeno 15 unità di proteine e 25 unità di vitamine.

Il problema è determinare le quantità di frutta, latte, uova da acquistare in modo da minimizzare il costo totale.

Variabili decisionali:  $x_F, x_L, x_U$

$x_F$  = quantità di frutta da acquistare

$x_L$  = quantità di latte da acquistare

$x_U$  = quantità di uova da acquistare

$$\begin{aligned} (1) \quad \min \quad & 10x_F + 20x_L + 10x_U \\ & 0x_F + 2x_L + 5x_U \geq 15 \\ & 7x_F + 3x_L + 1x_U \geq 25 \\ & x_F, x_L, x_U \geq 0 \end{aligned}$$

La soluzione ottima è  $x^*_F = 3,14$ ,  $x^*_L = 0$ ,  $x^*_U = 3$ , con valore 61,42.

Si consideri di seguito il problema duale del problema (1).

$$\begin{aligned} (2) \quad \max \quad & 15 y_1 + 25 y_2 \\ & 0y_1 + 7y_2 \leq 10 \end{aligned}$$

$$2y_1 + 3y_2 \leq 20$$

$$5y_1 + 1y_2 \leq 10$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

La soluzione ottima è  $y^*_1 = 1,71$  e  $y^*_2 = 1,42$ , con valore 61,42.

Con un'argomentazione simile a quella dell'Esempio 1, si può verificare che la soluzione ottima del problema duale ( $y^*_1, \dots, y^*_m$ ) rappresenta il valore intrinseco  $y_j^*$  di ogni produzione  $j$ , per  $j = 1, \dots, m$  (proteine, vitamine). Tale valore è detto anche *prezzo ombra*, nel senso che:

- è conveniente acquistare la produzione  $j$  (entro un certo limite di quantità), se la si acquista a un prezzo unitario che è al di sotto del prezzo ombra  $y_j^*$ .

Osservazione: i limiti di quantità entro i quali conviene acquistare una produzione dipendono dal fatto che la soluzione ottima di base può cambiare per variazioni della richiesta della produzione, cioè del termine noto corrispondente; tali limiti sono calcolabili mediante semplici operazioni riportate nell'analisi di sensitività (o di post-ottimalità) e comunque sono calcolati dai software che risolvono i problemi di PL.

Tornando al nostro esempio si ha che:

$y^*_1$  = prezzo ombra delle proteine

$y^*_2$  = prezzo ombra delle vitamine

Consideriamo ad esempio il prezzo ombra  $y^*_2 = 1,42$  delle vitamine.

E' conveniente acquistare tale produzione – cioè vitamine, ad esempio sotto forma di integratore alimentare – (entro certi limiti di quantità) ad un prezzo unitario inferiore a 1,42, dato che ciò garantisce una diminuzione della spesa totale.

E' indifferente acquistare tale produzione (entro un certo limite di quantità) ad un prezzo unitario pari a 1,42, dato che ciò non cambia la spesa totale.