

Scritto del 22 giugno 2023
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II, a.a. 2022/23
Prof.ssa Claudia Ceci

1. Sia $\{S_t\}_{t \geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes. Si indichi con $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente.

(i) Determinare il prezzo $v_n(t, x)$ (al tempo t se $S_t = x$) del derivato di payoff finale $F_n(S_T) = \left(\frac{S_T}{S_0}\right)^n$.

(ii) Applicare la formula di Ito per determinare la dinamica del processo $Y_t = \left(\frac{S_t}{S_0}\right)^n$. Si tratta di un moto browniano geometrico?

(iii) Costruire un portafoglio in azioni e derivati di payoff finale $F_3(S_T) = \left(\frac{S_T}{S_0}\right)^3$ e $F_4(S_T) = \left(\frac{S_T}{S_0}\right)^4$ che sia gamma neutrale. Indicato con β_1 la quota nel derivato di prezzo $v_3(t, S_t)$ e β_2 quella nel derivato $v_4(t, S_t)$, calcolare $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ al tempo $t = 0$.

2. Siano $\{S_t^i\}_{t \geq 0}$, $i = 1, 2, 3$, i prezzi di tre azioni descritti dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$\begin{aligned} dS_t^1 &= S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1 + \sigma_{12} dW_t^2) \quad S_0^1 > 0 \\ dS_t^2 &= S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_{21} dW_t^1 + \sigma_{22} dW_t^2), \quad S_0^2 > 0 \\ dS_t^3 &= S_t^3(\mu_3 dt + \sigma_{33} dW_t^3) \quad S_0^3 > 0. \end{aligned}$$

con $\mu_i > r$ e $\sigma_{ij} > 0$, costanti, $\{W_t^i\}_{t \geq 0}$, $i = 1, 2, 3$, moti browniani indipendenti.

(i) Dare la definizione di misura martingala e di mercato completo.

(ii) Determinare le misure martingala equivalenti. Discutere in quali circostanze il mercato é libero da arbitraggi, completo e incompleto.

(iii) Nel caso in cui il mercato sia libero da arbitraggi e completo calcolare

$$v_0 = e^{-rT} E^Q \left[S_T^1 S_T^2 S_T^3 \right]$$

Suggerimento: $S_t^i = S_0^i e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_{i1}^2 - \frac{1}{2}\sigma_{i2}^2)t + \sigma_{i1}W_t^{Q,1} + \sigma_{i2}W_t^{Q,2}}$, $i = 1, 2$.

3. Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda^Q > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente. Il valore di mercato al $t = 6$ mesi di un free-defaultable ZCB di maturità $T = 12$ mesi e valore nominale 100 euro é pari a $p_0(t, T) = 98$ euro.

(i) Sia il prezzo $p(t, T)$ al $t = 6$ mesi di un DZCB di maturità $T = 12$ mesi e di valore nominale 100 euro é pari a 88 euro. Determinare l'intensità di default λ^Q dell'istituzione finanziaria.

(ii) Determinare il prezzo $p_{RT}(t, T)$ con $t = 6$ mesi e $T = 12$ mesi di un DZCB di valore nominale 100 euro e recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta = 0,75$.

(iii) Sia il prezzo al $t = 6$ mesi di un DZCB (senza recovery) emesso da un'altra istituzione finanziaria di maturità $T = 12$ mesi e di valore nominale 100 euro pari a 80 euro. Determinare lo spread tra le due istituzioni.

22/6/23

Scuola

Titsei

Bevoni

e

Gestione

del

Rischio II

AA 2022-23

prof. C. CECI

1)

$$S_t = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma \omega_t^Q}$$

 $\Rightarrow$

$$S_T = S_t e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(\omega_T^Q - \omega_t^Q)}$$

 $\forall \omega_t^Q, t \geq 0$ Q -moto browniano

$$F_n(S_T) = \left(\frac{S_T}{S_0}\right)^n$$

$$\begin{aligned} (i) \quad S_n(t, x) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q \left[\left(\frac{S_T}{S_0}\right)^n \mid S_t = x \right] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q \left[\left(\frac{S_t}{S_0}\right)^n e^{n(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + n\sigma(\omega_T^Q - \omega_t^Q)} \mid S_t \right] \\ &= \frac{x^n}{S_0^n} e^{(n-1)r(T-t)} e^{-n\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \underbrace{\mathbb{E}^Q \left[e^{n\sigma(\omega_T^Q - \omega_t^Q)} \right]}_{e^{\frac{n^2\sigma^2}{2}(T-t)}} \\ &= \frac{x^n}{S_0^n} e^{(n-1)(r + n\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \end{aligned}$$

(ii) Formula di Itô:

$$Y_t = \left(\frac{S_t}{S_0}\right)^n$$

$$f(x) = \frac{x^n}{S_0^n}$$

$$f'(x) = n \frac{x^{n-1}}{S_0^n}$$

$$f''(x) = n(n-1) \frac{x^{n-2}}{S_0^n}$$

$$df(S_t) = \frac{1}{2} \sigma_t^2 f''(S_t) dt + f'(S_t) dS_t$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{S_t^{n-2}}{S_0^n} n(n-1) dt + \frac{n}{S_0^n} S_t^{n-1} S_t (\mu dt + \sigma d\omega_t)$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_t^2 n(n-1) \left(\frac{S_t}{S_0}\right)^n dt + n \left(\frac{S_t}{S_0}\right)^n (\mu dt + \sigma d\omega_t) \Rightarrow$$

$$dY_t = Y_t \int (\mu + \frac{1}{2} \sigma^2 n(n-1)) dt + n \sigma d\omega_t$$

r_t è un moto browniano geometrico di rendimento $\overline{cure}$

$$m\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 m(n-1) \quad e \quad \text{volatilità} \quad m\sigma$$

$$(iii) \quad V_3(t, x) = \frac{x^3}{S_0^3} e^{2(r + \frac{3}{2}\sigma^2)(T-t)}$$

$$V_4(t, x) = \frac{x^4}{S_0^4} e^{3(r + 2\sigma^2)(T-t)}$$

$$V(t, x) = \alpha S_t + \beta_1 V_3(t, x) + \beta_2 V_4(t, x)$$

Il portafoglio è Π -neutrale se $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \Pi_V = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \beta_1 \frac{\partial^2 V_3}{\partial x^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 V_4}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = - \frac{\Pi_{V_4}}{\Pi_{V_3}} = - \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{\beta_1} \frac{x^2}{S_0^4} e^{3(r + 2\sigma^2)(T-t)}}{\cancel{\beta_1} \cdot \cancel{2} \frac{x}{S_0^3} e^{2(r + \frac{3}{2}\sigma^2)(T-t)}} < 0$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = - 2 \frac{S_t}{S_0} e^{(r + 3\sigma^2)(T-t)} < 0$$

Osserviamo che al tempo $t=0$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = - 2 e^{(r + 3\sigma^2)(T-t)}$$

non dipende
dal prezzo azionario
al tempo $t=0$, S_0

$$3) \begin{cases} dS_t^1 = S_t^1 (\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1 + \sigma_{12} dW_t^2) \\ dS_t^2 = S_t^2 (\mu_2 dt + \sigma_{21} dW_t^1 + \sigma_{22} dW_t^2) \\ dS_t^3 = S_t^3 (\mu_3 dt + \sigma_{33} dW_t^3) \end{cases} \quad \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Per $\underline{\sigma} = \sigma_{33} (\sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12} \sigma_{21})$

Le misure $\mathbb{Q}^0$ associate alle soluzioni $\underline{\theta}$ del sistema
Eincione: $\underline{\sigma} \cdot \underline{\theta} = \underline{\mu} - r$

CASO 1)

Per $\underline{\sigma} \neq 0 \quad \sigma_{11} \sigma_{22} \neq \sigma_{12} \sigma_{21}$

$$\begin{aligned} \text{I: } \underline{\theta} &= \begin{cases} \theta_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mu_1 - r & \sigma_{12} \\ \mu_2 - r & \sigma_{22} \end{vmatrix}}{\sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12} \sigma_{21}} \\ \theta_2 = \frac{\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \mu_1 - r \\ \sigma_{21} & \mu_2 - r \end{vmatrix}}{\sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12} \sigma_{21}} \\ \theta_3 = \frac{\mu_3 - r}{\sigma_{33}} \end{cases} \\ &= \frac{\sigma_{22} (\mu_1 - r) - \sigma_{12} (\mu_2 - r)}{\sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12} \sigma_{21}} \\ &= \frac{\sigma_{11} (\mu_2 - r) - \sigma_{21} (\mu_1 - r)}{\sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12} \sigma_{21}} \\ &\quad \sigma_{33} \theta_3 = \mu_3 - r \end{aligned}$$

II misura $\mathbb{Q}$ equivalente e
secondo teorema fondamentale
dell'Asset Pricing: il mercato è
libero da arbitraggi e completo

CASO 2)

$\sigma_{11} \sigma_{22} = \sigma_{12} \sigma_{21}$

matrice completa

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \\ \mu_3 - r \end{pmatrix}$$

~~matrice completa~~

eq $\underline{\theta} = 2$

$\begin{vmatrix} \sigma_{22} & 0 \\ 0 & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_{22} \cdot \sigma_{33} \neq 0$

$= \sigma_{33} (\mu_1 - r) + \sigma_{22} (\mu_2 - r) = 0$

$\mu_1 - r = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}}$

$\mu_2 - r = \sigma_{33} (\mu_3 - r)$

$\text{reg } A = \text{reg } C = 2$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni

$\sigma_{22} \theta_2 = \mu_2 - r - \sigma_{21} \theta_1$

$\theta_3 = \frac{\mu_3 - r}{\sigma_{33}}$

$\theta_1 \in \mathbb{R}$

$\theta_2 = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}} - \frac{\sigma_{21}}{\sigma_{22}} \theta_1$

reg $(C) = 3$ se $\frac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} \neq \frac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}}$
il sistema non
ammette soluzioni
 $\Rightarrow$ per il primo teorema
fondamentale dell'Asset
Pricing il mercato ammette

Il mercato è libero da
arbitraggi ma è
incompleto

$$(iii) \quad S_0 = e^{-rT} E^Q [S_1^1 S_2^2 S_3^3] =$$

$$= e^{-rT} E^Q [S_0^1 (r - \sigma_{11}^2 - \sigma_{12}^2)T + \sigma_{11} \omega_T^{1Q} + \sigma_{12} \omega_T^{2Q} \cdot S_0^2 (r - \sigma_{21}^2 - \sigma_{22}^2)T + \sigma_{21} \omega_T^{1Q} + \sigma_{22} \omega_T^{2Q} \\ \cdot S_0^3 (r - \sigma_{31}^2 - \sigma_{32}^2)T + \sigma_{33} \omega_T^{3Q}]$$

$$= e^{-2rT} e^{-(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2)T} E^Q [e^{(\sigma_{11} + \sigma_{21}) \omega_T^{1Q}}] E^Q [e^{(\sigma_{12} + \sigma_{22}) \omega_T^{2Q}}] E^Q [e^{\sigma_{33} \omega_T^{3Q}}] \\ \underbrace{E[e^{(\sigma_{11} + \sigma_{21}) \omega_T^{1Q}}]}_{\parallel} \underbrace{E[e^{(\sigma_{12} + \sigma_{22}) \omega_T^{2Q}}]}_{\parallel} \underbrace{E[e^{\sigma_{33} \omega_T^{3Q}}]}_{\parallel} \\ \parallel \parallel \parallel \\ E[e^{(\sigma_{11} + \sigma_{21})^2 T}] \quad E[e^{\frac{1}{2}(\sigma_{12} + \sigma_{22})^2 T}] \quad E[e^{\frac{1}{2}\sigma_{33}^2 T}] \\ \parallel \parallel \parallel \\ e^{\frac{(\sigma_{11} + \sigma_{21})^2}{2} T} \quad e^{\frac{(\sigma_{12} + \sigma_{22})^2}{2} T} \quad e^{\frac{\sigma_{33}^2}{2} T}$$

$$= e^{2rT} e^{(\sigma_{11} \cdot \sigma_{21} + \sigma_{12} \cdot \sigma_{22})T}$$

$$\textcircled{3} \quad \tau \sim \exp(\lambda) \quad P_0(t, T) = 100 e^{-r \frac{T-t}{2}} = 98 \text{ €}$$

$$T-t = 6 \text{ mesi}$$

$$(i) \quad P_+(t, T) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q \left[100 \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + 100 \mathbb{Q}(\tau > T | \tau > t) \right] = e^{-r(T-t)} \underbrace{100 \mathbb{Q}(\tau > T | \tau > t)}_{e^{-\lambda(T-t)}}$$

$$P_-(t, T) = 100 e^{-r(T-t)} e^{-\lambda(T-t)} = P_0(t, T) e^{-\lambda(T-t)}$$

$$\frac{P_-(t, T)}{P_0(t, T)} = e^{-\lambda(T-t)} \quad \lambda = -\frac{1}{T-t} \log \left(\frac{P_-(t, T)}{P_0(t, T)} \right) = -\frac{1}{6} \log \left(\frac{88}{98} \right) = 0.2153$$

$$(ii) \quad P_{RT}(t, T) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q \left[100 \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + \underbrace{100(1-\delta)}_{0.75} \mathbb{1}_{\{\tau < T\}} \right]$$

$$= 100 e^{-r(T-t)} e^{-\lambda(T-t)} + 75 e^{-r(T-t)}$$

$$= 75 e^{-r(T-t)} + (100 - 75) e^{-r(T-t)} e^{-\lambda(T-t)}$$

$$P_{RT}(t, T) = 75 e^{-r(T-t)} + 25 e^{-(r+\lambda)(T-t)}$$

$$\text{poiché } P_0(t, T) = 100 e^{-r(T-t)} = 98 \Rightarrow e^{-r(T-t)} = \frac{98}{100}$$

$$\text{quindi } P_-(t, T) = 100 e^{-(r+\lambda)(T-t)} = 88 \Rightarrow e^{-(r+\lambda)(T-t)} = \frac{88}{100}$$

$$P_{RT}(t, T) = \frac{75 \cdot 98}{100} + \frac{25 \cdot 88}{100} = 95.5 \text{ €}$$

$$\frac{\mathbb{Q}(\tau < T | \tau > t)}{1 - \mathbb{Q}(\tau > T | \tau > t)} = 1 - e^{-\lambda(T-t)}$$

cii) lo spread tra le due istinzioni è calcolato dalla differenza dei loro rendimenti (oppoimici)

$$P_1(t, T) = P_0 e^{-(\lambda_1^T - \lambda_1)(T-t)}$$

$$= 88$$

$$P_2(t, T) = P_0(t, T) e^{-\lambda_2(T-t)}$$

$$= 80$$

$$\frac{P_1(t, T)}{P_2(t, T)} = \frac{e^{-(\lambda_1^T - \lambda_1)(T-t)}}{e^{-\lambda_2(T-t)}} = e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)(T-t)}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = - \frac{1}{T-t} \ln \left(\frac{P_1(t, T)}{P_2(t, T)} \right) = - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{88}{80} \right) = -0.13$$

$$\Rightarrow \lambda_2 - \lambda_1 = 0.13 = 13\% \text{ spread}$$

Questo significa che l'intensità di default dopo secondo istinzione è pari a $0.13 + 0.2153 = 0.4$