Scritto del 02 febbraio 2023
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II, a.a. 2022/23
Prof.ssa Claudia Ceci

1. Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes.

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0,$$

con μ, e $\sigma > 0$ costanti e $\{W_t\}_{t\geq 0}$ moto browniano. Si indichi con $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente.

(i) Determinare il prezzo $v_n(t,x)$ (al tempo t se $S_t = x$) del derivato di payoff finale $F_n(S_T) = (S_T)^{\frac{1}{n}}$.

(iii) Applicare la formula di Ito per determinare la dinamica del processo $v_n(t,S_t)$ rispetto a Q (Q misura martingala equivalente). E' possibile dedurre che $v_n(t,S_t)e^{-rt}$ é una Q-martingala?

(iv) Costruire un portafoglio in azioni e derivati di payoff finale $F_2(S_T) = (S_T)^{\frac{1}{2}}$ e $F_3(S_T) = (S_T)^{\frac{1}{3}}$ che sia gamma neutrale.

Suggerimento: Determinare $\frac{\beta_2}{\beta_1}$, ove β_1 é la quota del derivato di prezzo $v_2(t,x)$ e β_2 é la quota del derivato di prezzo $v_3(t,x)$.

2. Siano $\{S^i_t\}_{t\geq 0}$, $i = 1,2$, i prezzi di due azioni descritti dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS^1_t = S^1_t(\mu_1 dt + \sigma_{11}dW^1_t + \sigma_{12}dW^2_t) \quad S^1_0 > 0.$$
$$dS^2_t = S^2_t(\mu_2 dt + \sigma_{21}dW^1_t + +\sigma_{22}dW^2_t + \sigma_{23}dW^3_t), \quad S^2_0 > 0.$$

con μ_ie $\sigma_{ij} > 0$, costanti e $\{W^i_t\}_{t\geq 0}$, $i = 1,2,3$, moti browniani indipendenti.

(i) Dare la definizione di misura martingala e di mercato completo.

(ii) Determinare le misure martingala equivalenti. In quali circostanze il mercato é libero da arbitraggi e completo? (giustificare la risposta).

(iii) E' possibile rendere il mercato completo?

(iii) Calcolare
$$v(t,x_1,x_2) = e^{-r(T-t)}E^Q\Big[\log(S^1_T)log(S^2_T)|S^1_t = x_1, S^2_t = x_2\Big]$$

Suggerimento:
$S^1_t = S^1_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2_{11}-\frac{1}{2}\sigma^2_{12})t+\sigma_{11}W^{Q,1}_t+\sigma_{12}W^{Q,2}_t}$,
$S^2_t = S^2_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2_{21}-\frac{1}{2}\sigma^2_{22}-\frac{1}{2}\sigma^2_{23})t+\sigma_{21}W^{Q,1}_t+\sigma_{22}W^{Q,2}_t+\sigma_{23}W^{Q,3}_t}$.

3. Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente.

i) Determinare il prezzo $p_{RT}(0,T)$ al tempo $t = 0$ di un DZCB con recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1-\delta$, di valore nominale x e maturitá T.

ii) Sia oggi il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 100 euro, maturitá $T = 3$ anni, pari a $p_0 = 95$ euro e quello di un DZCB, di stesso valore nominale e maturitá, con $\delta = 70\%$ pari a $p_{RT} = 93$ euro. Determinare l'intensitá di default λ e la probabilitá di default in un anno dell'istituzione finanziaria.

Scritto Titoli Derivati e Gestione del rischio II 02/02/23

Valutazione neutrale al rischio

(i) $v_n(t,x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(S_T)^{\frac{1}{n}} \mid S_t = x \right]$

$S_T = S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})}$

$\{W_t^{\mathbb{Q}}\}_{t\geq 0}$ $\mathbb{Q}$ - moto browniano

$$v_n(t,x) = e^{-r(T-t)} \sqrt[n]{x}\, e^{\frac{1}{n}(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\frac{\sigma}{n}(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})}\right]}$$

$W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}} \sim \sqrt{T-t}\, N$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\frac{\sigma}{n}\sqrt{T-t}\, N}\right] = e^{\frac{\sigma^2}{2n^2}(T-t)}$$

$N \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\mathbb{E}[e^{\sigma N}] = e^{\frac{\sigma^2}{2}}$

$$v_n(t,x) = \sqrt[n]{x}\; e^{-r(1-\frac{1}{n})(T-t)}\, e^{-\frac{\sigma^2}{2n}(1-\frac{1}{n})(T-t)}$$

$$v_n(t,x) = \sqrt[n]{x}\; e^{-(1-\frac{1}{n})\{r + \frac{\sigma^2}{2n}\}(T-t)}$$

$n=2$ $\quad v_2(t,x) = \sqrt{x}\; e^{-\frac{1}{2}\{r + \frac{\sigma^2}{4}\}(T-t)}$

$n=3$ $\quad v_3(t,x) = \sqrt[3]{x}\; e^{-\frac{2}{3}\{r + \frac{\sigma^2}{6}\}(T-t)}$

(ii) Formula di Itô: $\quad df(t,S_t) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,S_t)\right\} dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t) \underbrace{dS_t}_{S_t \cdot r\, dt + S_t \cdot \sigma\, dW_t^{\mathbb{Q}}}$

$\mathbb{Q}$: $\quad dS_t = S_t(r\, dt + \sigma\, dW_t^{\mathbb{Q}})$

$$f(t,x) = v_n(t,x) = x^{\frac{1}{n}} e^{-(1-\frac{1}{n})\{r+\frac{\sigma^2}{2n}\}(T-t)}$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} = \left(1-\frac{1}{n}\right) e^{-(1-\frac{1}{n})\{r+\frac{\sigma^2}{2n}\}(T-t)} \left\{r + \frac{\sigma^2}{2n}\right\} x^{\frac{1}{n}} = +\left(1-\frac{1}{n}\right)\left\{r+\frac{\sigma^2}{2n}\right\} v_n(t,x)$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial x} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} e^{-(1-\frac{1}{n})\{r+\frac{\sigma^2}{2n}\}(T-t)} \Rightarrow r x \frac{\partial v_n}{\partial x} = \frac{r}{n} v_n(t,x)$$

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right) x^{\frac{1}{n}-2} e^{-(1-\frac{1}{n})\{r+\frac{\sigma^2}{2n}\}(T-t)} \Rightarrow \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right) v_n(t,x)$$

$$dv_n(t,S_t) = \left\{ \frac{\partial v_n}{\partial t}(t,S_t) + r S_t \frac{\partial v_n}{\partial x}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}(t,S_t) \right\} dt + \sigma S_t \frac{\partial v}{\partial x}(t,S_t)\, dW_t^Q$$

$$dv_n(t,S_t) = \left\{ +\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(r+\frac{\sigma^2}{2n}\right) v_n(t,S_t) + \frac{r}{n} v_n(t,S_t) + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right) v_n(t,S_t) \right\} dt$$

$$+ \frac{\sigma}{n} v_n(t,S_t)\, dW_t^Q$$

$$dv_n(t,S_t) = v_n(t,S_t)\left\{ r\, dt + \frac{\sigma}{n} dW_t^Q \right\}$$ è un moto browniano geometrico di rendimento atteso r e volatilità $\frac{\sigma}{n}$

Sappiamo che:

$dS_t = S_t\{r\,dt + \sigma\, dW_t^Q\}$ $\qquad \tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$

$\Downarrow$

$\Rightarrow \quad d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma\, dW_t^Q \qquad$ è una Q-mg

In modo analogo possiamo dire che $v_n(t,S_t)e^{-rt}$ è una Q-mg

e $\quad d\tilde{v}_n(t,S_t) = \tilde{v}_n(t,S_t)\cdot \frac{\sigma}{n}\, dW_t^Q$

(iii) $\quad V(t,x) = \alpha x + \beta_1 v_2(t,x) + \beta_3 v_3(t,x)$: $\qquad \Delta_V = \frac{\partial V}{\partial x} = \alpha + \beta_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial v_3}{\partial x} = 0$

$$\Gamma_V = \beta_1 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} = 0$$

$$\beta_1 \Gamma_{v_2} = -\beta_2 \Gamma_{v_3} \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = -\beta_1 \frac{\Gamma_{v_2}}{\Gamma_{v_3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta_2}{\beta_1} = -\frac{\Gamma_{v_2}}{\Gamma_{v_3}} = -\frac{\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}} = -\frac{\frac{1}{2}\overbrace{\left(\frac{1}{2}-1\right)}^{-1/2} x^{\frac{1}{2}-2} e^{-\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(r+\frac{\sigma^2}{4}\right)(T-t)}}{\frac{1}{3}\underbrace{\left(\frac{1}{3}-1\right)}_{-2/3} x^{\frac{1}{3}-2} e^{-\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(r+\frac{\sigma^2}{6}\right)(T-t)}} \qquad -\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)$$

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{2}\, x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) r (T-t)} \cancel{e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\frac{\sigma^2}{4}}} e^{-\frac{\sigma^2}{8}(T-t)} e^{\frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma^2}{6}(T-t)} \Rightarrow \frac{\beta_2}{\beta_1} = -\frac{9}{8} x^{\frac{1}{6}} e^{\frac{1}{6} r (T-t)} e^{-\frac{\sigma^2}{81}(T-t)}$$

$$\alpha = -\beta_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} - \beta_2 \frac{\partial v_3}{\partial x} = -\beta_1 \Delta_{v_2} - \left(-\beta_1 \frac{\Gamma_{v_2}}{\Gamma_{v_3}}\right) \cdot \Delta_{v_3}$$

$$\alpha = \beta_1 \left\{ -\Delta_{v_2} + \underbrace{\frac{\Gamma_{v_2}}{\Gamma_{v_3}}}_{-\frac{9}{8} x^{\frac{1}{6}} e^{\frac{1}{6} r(T-t)} e^{-\frac{\sigma^2}{81}(T-t)}} \cdot \Delta_{v_3} \right\}$$ quota in azioni che rende il port. delta neutrale

2) $$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1 (\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1 + \sigma_{12} dW_t^2) \\ dS_t^2 = S_t^2 (\mu_2 dt + \sigma_{21} dW_t^1 + \sigma_{22} dW_t^2 + \sigma_{23} dW_t^3) \end{cases}$$

(i) vedere altri compiti (es: 12/01/23)

(ii) Le mis. mg equivalenti sono associate alle sol. $\underline{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$ del sistema lineare

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{\theta} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{pmatrix}}_{\underline{b}} \qquad \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \end{pmatrix}$$

$rg\, \underline{\sigma} = 2$ in quanto $\begin{vmatrix} \sigma_{12} & 0 \\ 0 & \sigma_{23} \end{vmatrix} = \sigma_{12} \cdot \sigma_{23} \neq 0$ $\longrightarrow$ scelgo θ_1 come variabile libera

$\Rightarrow rg(\underline{\sigma}, \underline{b}) = 2$ e per il Teorema di Rouché-Capelli ammette ∞^1-soluzioni : per il I e II Teorema fondamentale dell'Asset Pricing il mercato è libero da arbitraggi ma incompleto

$$\begin{cases} \sigma_{11}\theta_1 + \sigma_{12}\theta_2 = 0 \\ \sigma_{21}\theta_1 + \sigma_{22}\theta_2 + \sigma_{23}\theta_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_2 = -\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}\theta_1 \qquad \theta_1 \in \mathbb{R} \\ \theta_3 = \frac{1}{\sigma_{23}}\left\{ -\sigma_{21}\theta_1 - \sigma_{22}\left(-\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}\theta_1\right)\right\} = \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{23}} \cdot \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}} - \frac{\sigma_{21}}{\sigma_{23}}\right)\theta_1 \end{cases}$$

(iii) Si può rendere il mercato completo aggiungendo un terzo titolo negoziato sul mercato

$$dS_t^3 = S_t^3 \left(\mu_3 \, dt + \sigma_{31} \, dW_t^1 \right)$$

nuova matrice di volatilità: $\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \underline{\sigma} = \sigma_{31} \begin{vmatrix} \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{22} & \sigma_{23} \end{vmatrix} = \sigma_{31} \cdot \sigma_{12} \cdot \sigma_{23} \neq 0$

Cramer

$\exists! \ \underline{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} : \quad \underline{\sigma} \cdot \underline{\theta} = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \\ \mu_3 - r \end{pmatrix}$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3^a \text{ eq. } \ \sigma_{31} \theta_1 = \mu_3 - r \Rightarrow \theta_1 = \dfrac{\mu_3 - r}{\sigma_{31}} \\[2ex] \theta_2 = -\dfrac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}} \cdot \dfrac{\mu_3 - r}{\sigma_{31}} \\[2ex] \theta_3 = \dfrac{1}{\sigma_{23}} \left(\dfrac{\sigma_{22}\sigma_{11}}{\sigma_{12}} - \sigma_{21} \right) \cdot \dfrac{\mu_3 - r}{\sigma_{31}} \end{array} \right\} \text{ unica soluzione}$$

(iv)

$$v(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\lg(S_T^1) \cdot \lg(S_T^2) \mid S_t^1 = x_1, S_t^2 = x_2 \right]$$

$$= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \Big[\Big\{ \underbrace{\lg x_1 + \left(r - \tfrac{\sigma_{11}^2}{2} - \tfrac{\sigma_{12}^2}{2}\right)(T-t)}_{a} + \underbrace{\sigma_{11}\left(W_T^{\mathbb{Q},1} - W_t^{\mathbb{Q},1}\right) + \sigma_{12}\left(W_T^{\mathbb{Q},2} - W_t^{\mathbb{Q},2}\right)}_{X} \Big\} \Big\{ \underbrace{\lg x_2 + \left(r - \tfrac{\sigma_{21}^2}{2} - \tfrac{\sigma_{22}^2}{2} - \tfrac{\sigma_{23}^2}{2}\right)(T-t)}_{b}$$

$$+ \underbrace{\sigma_{21}\left(W_T^{\mathbb{Q},1} - W_t^{\mathbb{Q},1}\right) + \sigma_{22}\left(W_T^{\mathbb{Q},2} - W_t^{\mathbb{Q},2}\right) + \sigma_{23}\left(W_T^{\mathbb{Q},3} - W_t^{\mathbb{Q},3}\right)}_{Y} \Big\} \Big]$$

$$= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left\{ a \cdot b + aY + bX + XY \right\}$$

$$= e^{-r(T-t)} \left\{ a \cdot b + a \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y]}_{=0} + b \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X]}_{=0} + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[XY] \right\}$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] = \sigma_{11} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[W_T^{\mathbb{Q},1} - W_t^{\mathbb{Q},1}\right] + \sigma_{12} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[W_T^{\mathbb{Q},2} - W_t^{\mathbb{Q},2}\right] = 0$$

$$\mathbb{E}[Y] = 0$$

Rimane da calcolare $\mathbb{E}[XY]$. Teniamo conto che $W^{1,\mathbb{Q}} \perp W^{2,\mathbb{Q}} \perp W^{3,\mathbb{Q}}$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(W_T^{\mathbb{Q},i} - W_t^{\mathbb{Q},i})(W_T^{\mathbb{Q},j} - W_t^{\mathbb{Q},j})\right] = \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[W_T^{\mathbb{Q},i} - W_t^{\mathbb{Q},i}\right]}_{=0} \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[W_T^{\mathbb{Q},j} - W_t^{\mathbb{Q},j}\right]}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_i Y] = \sigma_{11}\sigma_{21} \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(W_T^{\mathbb{Q},1} - W_t^{\mathbb{Q},1})^2\right]}_{=T-t} + \sigma_{12}\cdot\sigma_{22}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\underbrace{\left[(W_T^{\mathbb{Q},2} - W_t^{\mathbb{Q},2})\right]}_{=T-t}$$

$$\Rightarrow v(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)}\left\{\left(\lg x_1 + \left(r - \frac{\sigma_{11}^2}{2} - \frac{\sigma_{12}^2}{2}\right)(T-t)\right)\left(\lg x_2 + \left(r - \frac{\sigma_{21}^2}{2} - \frac{\sigma_{22}^2}{2} - \frac{\sigma_{23}^2}{2}\right)(T-t)\right) + \right.$$

$$\left. + \sigma_{11}\sigma_{21}(T-t) + \sigma_{12}\cdot\sigma_{22}(T-t)\right\}$$

3) $\tau \sim \exp(\lambda) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{Q}(\tau > T) = e^{-\lambda T} \qquad \mathbb{Q}(\tau \le T) = 1 - e^{-\lambda T}$

(i) $P_{RT}(0,T) = e^{-rT}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[x\,\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + x(1-\delta)\,\mathbb{1}_{\{\tau \le T\}}\right]$

$$= x\, e^{-rT}\left\{e^{-\lambda T} + (1-\delta)(1 - e^{-\lambda T})\right\} = x\, e^{-rT}\left\{1 - \delta + \delta e^{-\lambda T}\right\}$$

$\cancel{1 - e^{-\lambda T}}$
$-\delta + \delta e^{-\lambda T}$

(ii) $P_0 = 95\,€ \qquad P_{RT} = 93\,€$

$$P_{RT} = P_0\left\{1 - \delta + \delta e^{-\lambda T}\right\} \qquad \frac{P_{RT}}{P_0} = (1-\delta) + \delta e^{-\lambda T}$$

$$\delta e^{-\lambda T} = \frac{P_{RT}}{P_0} - 1 - \delta \qquad e^{-\lambda T} = \frac{P_{RT}}{\delta P_0} - \frac{1-\delta}{\delta} \qquad \lambda = -\frac{1}{T}\lg\left(\frac{P_{RT}}{\delta P_0} - \frac{1-\delta}{\delta}\right) \qquad \begin{array}{l} T = 3 \text{ anni} \\ \delta = 70\% \end{array}$$

$$\lambda = -\frac{1}{3}\lg\left(\frac{93}{0.7\cdot 95} - \frac{0.3}{0.7}\right) \simeq 0.0102 \simeq 1\% \qquad q = \mathbb{Q}(\tau \le 1) = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-0.0102} =$$

1.39