Scritto del 12 gennaio 2023

Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II, a.a. 2022/23

Prof.ssa Claudia Ceci

10

1. Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes.

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0,$$

con μ, e $\sigma > 0$ costanti e $\{W_t\}_{t\geq 0}$ moto browniano. Si indichi con $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente.

(i) Determinare il prezzo $v(t,x)$ (al tempo t se $S_t = x$) del derivato di payoff finale $F(S_T) = (S_T - S_0)^2$.

(ii) Verificare che $v(t,x)$ risolve l'equazione di valutazione di Black & Scholes.

(iii) Applicare la formula di Ito per determinare la dinamica dei processi $Z_t = S_t^2$ e $Y_t = (S_t - S_0)^2$. Si tratta di moti browniani geometrici?

13

2. Siano $\{S_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1,2,3$, i prezzi di tre azioni descritti dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1) \quad S_0^1 > 0.$$
$$dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_{21} dW_t^1), \quad S_0^2 > 0.$$
$$dS_t^3 = S_t^3(\mu_3 dt + \sigma_{31} dW_t^1 + \sigma_{32} dW_t^2), \quad S_0^3 > 0.$$

con μ_ie $\sigma_{ij} > 0$, costanti, $\{W_t^1\}_{t\geq 0}$ e $\{W_t^2\}_{t\geq 0}$ moti browniani indipendenti.

(i) Dare la definizione di misura martingala e di mercato completo.

(ii) Determinare le misure martingala equivalenti. In quali circostanze il mercato é libero da arbitraggi e completo? (giustificare la risposta).

(iii) Calcolare

$$v(t,x_1,x_3) = e^{-r(T-t)} E^Q\Big[\frac{S_T^1}{S_T^3} | S_t^1 = x_1, S_t^3 = x_3\Big]$$

Suggerimento: $S_t^3 = S_0^3 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_{31}^2 - \frac{1}{2}\sigma_{32}^2)t + \sigma_{31} W_t^{Q,1} + \sigma_{32} W_t^{Q,2}}$, $t \in [0,T]$.

(iv) Un investitore ha venduto 1000 derivati europei di payoff finale $F(S_T^1 S_T^3) = \frac{S_T^1}{S_T^3}$, determinare il delta del portafoglio di copertura investendo nelle azioni S^1 e S^3.

9

3. Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ con Q misura di pricing. Sia τ il tempo di default di una determinata istituzione finanziaria. Si assuma hazard rate deterministico $\gamma^Q(t)$ e tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.

(i) Calcolare $Q(\tau \leq T | \tau > t)$ e $Q(\tau > T | \tau > t)$.

(ii) Determinare il prezzo, $p_1(t,T)$, di un DZCB di valore nominale x e con recupero $1-\delta$ $(0 < \delta < 1)$ alla maturitá T.

(iii) Sia oggi $(t = 0)$ il prezzo di un free-defaultable ZCB di maturitá $T = 2$ anni e valore nominale 100 euro pari a $p_0 = 50$ euro e quello di un DZCB (di stessa maturitá e valore nominale) e recupero $1 - \delta = 60\%$, pari a $p_1 = 40$ euro. Fornire una stima $\overline{\gamma}^Q$ dell'hazard rate medio su 2 anni.

Scritto di Titoli Derivati e Gestione del Rischio II 12/01/23

1. (i) Per il principio di valutazione neutrale al rischio

$$v(t,x) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{Q}\left[(S_T - S_0)^2 \mid S_t = x \right]$$

Q misura martingala equivalente

$$S_t = S_0\, e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t^Q}$$

$$S_T = S_t\, e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q)}$$

$\{W_t^Q\}_{t\in[0,T]}$ Q - moto browniano

$$v(t,x) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{Q}\left[S_T^2 + S_0^2 - 2S_0 S_T \mid S_t = x \right] =$$

$$\mathbb{E}^Q[S_T \mid S_t = x] = x\, e^{r(T-t)}$$

$$= e^{-r(T-t)}\left\{ \mathbb{E}^{Q}\left[S_T^2 \mid S_t = x\right] + S_0^2 - 2S_0\, \mathbb{E}^Q[S_T \mid S_t = x] \right\} =$$

$$= e^{-r(T-t)}\left\{ x^2 e^{2(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \underbrace{\mathbb{E}^{Q}\left[e^{2\sigma(W_T^Q - W_t^Q)}\right]} + S_0^2 - 2S_0\, x\, e^{r(T-t)} \right\}$$

$$\mathbb{E}^Q\left[e^{2\sigma\sqrt{T-t}\,N} \right] = e^{\frac{4\sigma^2(T-t)}{2}}$$

$W_T^Q - W_t^Q \sim \mathcal{N}(0, T-t)$

$W_T^Q - W_t^Q \sim \sqrt{T-t}\, N$

$N \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\Rightarrow v(t,x) = x^2\, e^{(r+\sigma^2)(T-t)} - 2S_0 x + S_0^2\, e^{-r(T-t)}$$

(ii) Eq. di valutazione di Black & Scholes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + rx\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rv = 0 \\ v(T,x) = (x - S_0)^2 \end{cases}$$

$v(T,x) = x^2 - 2S_0 x + S_0^2 = (x - S_0)^2$ verificato

$\frac{\partial v}{\partial t} = -(r+\sigma^2)x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} + r S_0^2 e^{-r(T-t)}$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x e^{(r+\sigma^2)(T-t)} - 2S_0$

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$

$-(r+\sigma^2)x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} + \cancel{r S_0^2 e^{-r(T-t)}} + 2r x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} - \cancel{2S_0 r x} + \sigma^2 x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$

$- r x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} + \cancel{2S_0 x r} - \cancel{S_0^2 r e^{-r(T-t)}} \overset{?}{=} 0$ sì

(iii) $Z_t = S_t^2 \qquad Z_t = f(S_t) \qquad f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x \qquad f''(x) = 2$

formula di Itô

$dZ_t = df(S_t) = \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f''(S_t)\,dt + f'(S_t)\,dS_t$

$dZ_t = \sigma^2 S_t^2\,dt + 2S_t \cdot S_t \{\mu\,dt + \sigma\,dW_t\} = S_t^2\{(2\mu + \sigma^2)\,dt + 2\sigma\,dW_t\}$

$dZ_t = Z_t\{(2\mu+\sigma^2)\,dt + 2\sigma\,dW_t\}$ $\qquad Z_t$ è un moto browniano geometrico

con rendimento atteso $\bar{\mu} = 2\mu + \sigma^2$

e volatilità 2σ

$Y_t = (S_t - S_0)^2 = S_t^2 - 2S_0 S_t + S_0^2 = Z_t - 2S_0 S_t + S_0^2$

$\Rightarrow dY_t = dZ_t - 2S_0\,dS_t = S_t^2\{(2\mu+\sigma^2)\,dt + 2\sigma\,dW_t\} - 2S_0 S_t\{\mu\,dt + \sigma\,dW_t\}$

$= [(2\mu+\sigma^2)S_t^2 - 2S_0 S_t \mu]\,dt + 2S_t(S_t - S_0)\sigma\,dW_t$

non è un moto browniano geometrico

2.
$$\begin{cases} dS^1_t = S^1_t(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW^1_t) \\ dS^2_t = S^2_t(\mu_2 dt + \sigma_{21} dW^1_t) \\ dS^3_t = S^3_t(\mu_3 dt + \sigma_{31} dW^1_t + \sigma_{32} dW^2_t) \end{cases}$$

(i) • $\mathbb{Q}$ misura di probabilità equivalente a $\mathbb{P}$: $\mathbb{P}(A) = 0 \iff \mathbb{Q}(A) = 0 \quad A \in \mathcal{F}$

è una misura mg se $S^i_t e^{-rt}$ $i = 1,2,3$ sono $\mathbb{Q}$-mg, ossia

$\forall\ s > t \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S^i_s e^{-rs} \mid \mathcal{F}_t] = S^i_t e^{-rt}$

Questa relazione è equivalente a: $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S^i_s \mid \mathcal{F}_t] = S^i_t e^{r(s-t)} \quad \forall s > t$

ossia rispetto a $\mathbb{Q}$ il rendimento atteso dell'azione è r

• Un mercato si dice completo se è libero da arbitraggi e ogni derivato può essere replicato da una strategia autofinanziante

(ii) Per il I Teorema fondamentale dell'Asset Pricing un mercato è libero da arbitraggi se e solo se esiste almeno una misura mg equivalente.

Per il II Teorema fondamentale dell'Asset Pricing un mercato libero da arb. è completo se e solo se esiste una unica misura mg equivalente.

Le misure mg equivalenti si ottengono determinando le soluzioni del sistema lineare:

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{\theta} = \underline{\mu} - r \qquad \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} \end{pmatrix} \qquad \underline{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mu} - r = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \\ \mu_3 - r \end{pmatrix}$$

$rg\,\underline{\sigma} = 2$ in quanto $\begin{vmatrix} \sigma_{21} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} \end{vmatrix} = \sigma_{21} \cdot \sigma_{32} > 0$

· Caso 1

$rg\begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & \mu_1 - r \\ \sigma_{21} & 0 & \mu_2 - r \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \mu_3 - r \end{pmatrix} = 3$ se $\det \neq 0 \iff -\sigma_{32}\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \mu_1 - r \\ \sigma_{21} & \mu_2 - r \end{vmatrix} \neq 0 \iff \sigma_{11}(\mu_2 - r) \neq \sigma_{21}(\mu_1 - r)$

se $\boxed{\dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} \neq \dfrac{\mu_2 - r}{\sigma_{21}}}$ in tal caso per il Teorema di Rouché-Capelli non esiste Q ed il mercato ammette arbitraggi

· Caso 2

se $\boxed{\dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} = \dfrac{\mu_2 - r}{\sigma_{21}}}$ per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema ammette una sola soluzione $rg\,A = rg(\text{completa}) = 2$ #incognite $= 2$

$$\begin{cases} \sigma_{11}\theta_1 = \mu_1 - r \\ \sigma_{21}\theta_1 = \mu_2 - r \\ \sigma_{31}\theta_1 + \sigma_{32}\theta_2 = \mu_3 - r \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} = \dfrac{\mu_2 - r}{\sigma_{21}} \\ \theta_2 = \dfrac{\mu_3 - r}{\sigma_{32}} - \dfrac{\sigma_{31}}{\sigma_{32}}\theta_1 = \dfrac{\mu_3 - r}{\sigma_{32}} - \dfrac{\sigma_{31}}{\sigma_{32}}\dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} \end{cases}$$

$\exists!\ Q^\theta$ associata a questa soluzione e il mercato è libero da arbitraggi e completo.

$W_t^{Q,1} = W_t^1 + \theta_1 t \qquad W_t^{Q,2} = W_t^2 + \theta_2 t \qquad$ Q-moti browniani e

$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1(r\,dt + \sigma_{11}\,dW_t^{Q,1}) \\ dS_t^2 = S_t^2(r\,dt + \sigma_{21}\,dW_t^{Q,1}) \\ dS_t^3 = S_t^3(r\,dt + \sigma_{31}\,dW_t^{1,Q} + \sigma_{32}\,dW_t^{2,Q}) \end{cases}$$

(iii) $v(t,x_1,x_3) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{Q}\left[\frac{S^1_T}{S^3_T} \,\middle|\, S^1_t = x_1,\ S^3_t = x_3 \right]$

$$S^1_T = S^1_t\, e^{\left(r - \sigma_{11}^2/2\right)(T-t) + \sigma_{11}\left(W^{1,Q}_T - W^{1,Q}_t\right)}$$

$$S^3_T = S^3_t\, e^{\left(r - \sigma_{31}^2/2 - \sigma_{32}^2/2\right)(T-t) + \sigma_{31}\left(W^{1,Q}_T - W^{1,Q}_t\right) + \sigma_{32}\left(W^{2,Q}_T - W^{2,Q}_t\right)}$$

$$v(t,x_1,x_3) = e^{-r(T-t)}\, \frac{x_1}{x_3}\, e^{-\sigma_{11}^2/2\,(T-t)}\, e^{\left(\sigma_{31}^2/2 + \sigma_{32}^2/2\right)(T-t)}\, \underbrace{\mathbb{E}^{Q}\left[e^{(\sigma_{11}-\sigma_{31})\left(W^{1,Q}_T - W^{1,Q}_t\right)}\, e^{-\sigma_{32}\left(W^{2,Q}_T - W^{2,Q}_t\right)} \right]}$$

essendo $W^{1,Q}$ e $W^{2,Q}$ indipendenti

$$\mathbb{E}^{Q}\left[e^{(\sigma_{11}-\sigma_{31})\left(W^{1,Q}_T - W^{1,Q}_t\right)} \right]\ \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-\sigma_{32}\left(W^{2,Q}_T - W^{2,Q}_t\right)} \right]$$

$$\mathbb{E}^{Q}\left[e^{(\sigma_{11}-\sigma_{31})\sqrt{T-t}\, N} \right] \qquad \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-\sigma_{32}\sqrt{T-t}\, N} \right]$$

$$e^{\frac{(\sigma_{11}-\sigma_{31})^2}{2}(T-t)} \cdot e^{\sigma_{32}^2/2\,(T-t)}$$

$$v(t,x_1,x_3) = \frac{x_1}{x_3}\, e^{-r(T-t)}\, e^{-\frac{1}{2}\cancel{\sigma_{11}^2(T-t)}}\, e^{\frac{1}{2}\left(\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2\right)(T-t)}\, e^{\frac{1}{2}\left(\cancel{\sigma_{11}^2} + \sigma_{31}^2 - 2\sigma_{11}\sigma_{31}\right)(T-t)}\, e^{\frac{1}{2}\sigma_{32}^2(T-t)}$$

$$= \frac{x_1}{x_3}\, e^{-r(T-t)}\, e^{-\sigma_{11}\cdot\sigma_{31}(T-t)}\, e^{\left(\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2\right)(T-t)}$$

(iv) $\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{1}{x_3}\, e^{-r(T-t)}\, e^{-\sigma_{11}\cdot\sigma_{31}(T-t)} \cdot e^{\left(\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2\right)(T-t)}$

$1000\,\frac{\partial v_t}{\partial x_1}$ quota di azioni S^1 da detenere al tempo t se $S^3_t = x_3$ [non dipende da x_1!]

$\frac{\partial v}{\partial x_3} = -\frac{x_1}{x_3^2}\, e^{-r(T-t)}\, e^{-\sigma_{11}\cdot\sigma_{31}(T-t)} \cdot e^{\left(\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2\right)(T-t)}$

$1000\,\frac{\partial v}{\partial x_3}$ quota di azioni S^3 da detenere al tempo t se $S^1_t = x_1$ e $S^3_t = x_3$

(3) τ hazard rate $\gamma^{Q}(t)$ $\quad F(t)=Q(\tau\leq t) = 1 - e^{-\int_0^t \gamma^{Q}(s)ds}$ $\quad t\geq 0$

$\downarrow$
f. di distribuzione

(i) $$Q(\tau\leq T \mid \tau>t) = \frac{Q\left((\tau\leq T)\cap(\tau>t)\right)}{Q(\tau>t)} = \frac{Q(\ t<\tau\leq T\ )}{Q(\tau>t)} = \frac{F(T)-F(t)}{1-F(t)}$$

$$= \frac{\left(1-e^{-\int_0^T \gamma^{Q}(s)ds}\right)-\left(1-e^{-\int_0^t \gamma^{Q}(s)ds}\right)}{e^{-\int_0^t \gamma^{Q}(s)ds}} = \frac{-e^{-\int_0^T \gamma^{Q}(s)ds}+e^{-\int_0^t \gamma^{Q}(s)ds}}{e^{-\int_0^t \gamma^{Q}(s)ds}}$$

$$= 1 - e^{-\int_t^T \gamma^{Q}(s)ds}$$

$$Q(\tau>T\mid\tau>t) = 1 - Q(\tau\leq T\mid \tau>t) = e^{-\int_t^T \gamma^{Q}(s)ds}$$

(ii)
$$P_1(t,T) = e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^{Q}\left[x\mathbb{1}_{\{\tau>T\}} + x(1-\delta)\mathbb{1}_{\{\tau\leq T\}} \mid \mathcal{H}_t\right] \qquad \mathcal{H}_t=\sigma\{\mathbb{1}_{\{\tau\leq s\}};\ s\leq t\}$$

$$= xe^{-r(T-t)}\{Q(\tau>T\mid\mathcal{H}_t) + (1-\delta)\underbrace{Q(\tau\leq T\mid \mathcal{H}_t)}_{1-Q(\tau>T\mid\mathcal{H}_t)}\}$$

$$= xe^{-r(T-t)}\{1-\delta + Q(\tau>T\mid\mathcal{H}_t)(1-1+\delta)\} \qquad Q(\tau>T\mid\mathcal{H}_t) = e^{-\int_t^T \gamma^{Q}(s)ds}\,\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}$$

$$= xe^{-r(T-t)}\{(1-\delta) + \delta\, e^{-\int_t^T \gamma^{Q}(s)ds}\,\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\}$$

(iii) $P_0(0,T) = 50 = 100\, e^{-rT}$ $\qquad P_1(0,T) = \underbrace{100\, e^{-rT}}_{50}\{1-\delta + \delta\, e^{-\int_0^T \gamma^{Q}(s)ds}\} = 40$

$1-\delta = 0.6$
$\delta = 0.4$

$$\Rightarrow\ 1-\delta+\delta e^{-\int_0^T \gamma^{Q}(s)ds} = \frac{40}{50} \qquad e^{-\int_0^T \gamma^{Q}(s)ds} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{4}{5}-(1-\delta)\right) \Rightarrow \int_0^T \gamma^{Q}(s)ds = -\ln\left\{\frac{4}{5\delta}-\frac{1-\delta}{\delta}\right\}$$

$$\bar{\gamma}^{Q} = \frac{1}{T}\int_0^T \gamma^{Q}(s)ds = -\frac{1}{T}\ln\left\{\frac{4}{5\delta}-\frac{1-\delta}{\delta}\right\} = -\frac{1}{2}\ln\left\{\frac{4}{5\cdot 0.4}-\frac{0.6}{0.4}\right\} = -\frac{1}{2}\ln(0.5) = 0.325$$