

ESERCIZI foglio 6
 Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II, a.a. 2021/22
 Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

1.

Siano $\{S_t^1\}_{t \geq 0}$ e $\{S_t^2\}_{t \geq 0}$ i prezzi di due azioni descritti dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1 + \sigma_{12} dW_t^2), \quad S_0^1 > 0.$$

$$dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_{21} dW_t^1 + \sigma_{23} dW_t^3), \quad S_0^2 > 0.$$

con $\mu_i, i = 1, 2$ e $\sigma_{ij} > 0, i = 1, 2, j = 1, 2, 3$ costanti, $\{W_t^i\}_{t \geq 0}, i = 1, 2, 3$, moti browniani indipendenti.

Considerare un mercato finanziario costituito da i due titoli ed il bond con tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.

(i) Determinare le misure martingala equivalenti. Il mercato é libero da arbitraggi? é completo o incompleto?

(ii) E' possibile aggiungere un terzo titolo negoziato sul mercato in modo da rendere completo il mercato?

2. Sia $\{S_t\}_{t \geq 0}$ il prezzo di un'azione descritto dalla seguente equazione differenziale stocastica, rispetto alla misura neutrale al rischio Q :

$$dS_t = S_t(r dt + \sigma_t dW_t), \quad S_0 > 0.$$

Con $\sigma_t > 0$ processo stocastico. Mostrare che se $0 < \sigma_1 \leq \sigma_t \leq \sigma_2$ allora

$$c_{BS}(t, S_t, \sigma_1) \leq e^{-r(T-t)} E^Q[(S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t] \leq c_{BS}(t, S_t, \sigma_2)$$

ove $c_{BS}(t, x, \sigma)$ indica il prezzo nel modello Black & Scholes di una call di maturità T , prezzo d'esercizio K scritta su un titolo di volatilità σ .

Suggerimento: applicare la formula di Ito alla funzione $f(t, x) = e^{-rt} c_{BS}(t, x, \sigma)$ e determinare $df(t, S_t)$, tenendo conto che $c_{BS}(t, x, \sigma)$ risolve la EDP di Black & Scholes, integrare $df(t, S_t)$ tra t e T .

3. Siano $\{S_t^1\}_{t \geq 0}$ e $\{S_t^2\}_{t \geq 0}$ i prezzi di due azioni descritti rispetto alla misura neutrale al rischio P dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t^1 = S_t^1(r dt + \sigma_1 dW_t^1), \quad S_0^1 > 0.$$

$$dS_t^2 = S_t^2(r dt + \sigma_2 dW_t^2), \quad S_0^2 > 0.$$

con $\sigma_i > 0, i = 1, 2$ costanti e $\{W_t^i\}_{t \geq 0}, i = 1, 2$, moti browniani correlati con coefficiente di correlazione $\rho \in (-1, 1)$.

(i) Calcolare

$$v(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)} E[S_T^1 S_T^2 | S_t^1 = x_1, S_t^2 = x_2]$$

(**Suggerimento:** scrivere in modo esplicito $\{S_t^i\}_{t \geq T}, i = 1, 2$ e $W_t^2 = \rho W_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} B_t$ con $\{B_t\}_{t \geq 0}$ moto browniano indipendente da $\{W_t^1\}_{t \geq 0}$).

(ii) Calcolare il delta del portafoglio di copertura del derivato di payoff finale $F(S_T^1, S_T^2) = S_T^1 S_T^2$.