ESERCIZI foglio 5

Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II, a.a. 2021/22

Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

1. Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes ed r il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente, $c_t = c(t, S_t)$ il prezzo di una call di maturitá T, prezzo d'esercizio K, con sottostante $\{S_t\}_{t\geq 0}$.

(i) Tramite la formula di Ito determinare l'equazione differenziale stocastica di cui $\{c_t\}_{t\in[0,T]}$ é soluzione. Piú precisamente determinare μ_t^c e σ_t^c tale che:

$$dc_t = c_t(\mu_t^c dt + \sigma_t^c dW_t).$$

(ii) Tenendo conto che $c(t,x)$ é soluzione dell'equazione di valutazione di Black & Scholes mostrare che

$$\mu_t^c - r = \eta_t(\mu - r), \quad \sigma_t^c = \eta_t \sigma, \quad \eta_t > 1.$$

2. Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes ed r il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente, $c_t = c(t, S_t)$ il prezzo di una call di maturitá T, prezzo d'esercizio K, con sottostante $\{S_t\}_{t\geq 0}$. Mostrare che il prezzo di una call é una funzione decrescente e convessa del prezzo d'esercizio.

3. Sia il prezzo oggi del titolo $S_0 = 10$ euro, il tasso d'interesse privo di rischio $r = 0\%$. Considerate un portafoglio con 10 derivati di prezzo $f(t,x) = x^2 e^{2(T-t)}$ (al tempo t se $S_t = x$) e maturitá $T = 6$ mesi.
(i) Determinare la quota di azioni nel portafoglio affinché sia delta-neutrale (al tempo t se $S_t = x$) e al tempo $t = 0$;
(ii) Quanti derivati di prezzo $g(t,x) = x^3 e^{6(T-t)}$ e maturitá $T = 6$ mesi dovete aggiungere oggi al portafoglio affinché sia gamma-neutrale?
(iii) Quante azioni dovete avere nel nuovo portafoglio affinché sia delta-neutrale?

4. (Modello di Vasicek) Sia $\{X_t\}_{t\geq 0}$ il processo unica soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = c(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x$$

con c e σ costanti. (i) Mostrare che

$$X_t = xe^{-ct} + \mu(1 - e^{-ct}) + \sigma e^{-ct} \int_0^t e^{cs} dW_s$$

(suggerimento: applicare Ito per determinare la dinamica di $X_t e^{ct}$).
(ii) Mostrare che la distribuzione del processo al tempo t, é gaussiana con media e varianza date da

$$E[X_t] = \mu + (x - \mu)e^{-ct}, \quad Var(X_t) = \frac{\sigma^2}{2c}(1 - e^{-2ct}).$$

(iv) Calcolare il limite per t che tende a $+\infty$ di $E[X_t]$ e di $Var(X_t)$.