ERRATA CORRIGE

$\boxed{\text{9. Mercati multidimensionali}}$

P. 12

$$f(t,x_1,x_2) = e^{-r(T-t)}\,Q\left(N > \frac{\ln\left(\frac{K}{x_1x_2}\right) - \left(2r - \frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}\,\sqrt{T-t}}\right) =$$

$$= e^{-r(T-t)}\,\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{x_1x_2}{K}\right) + \left(2r - \frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}\,\sqrt{T-t}}\right)$$

abbiamo utilizzato che $P(N > x) = P(N < -x) = \Phi(-x)$

e che $-\ln\left(\frac{K}{x_1x_2}\right) = \ln\left(\frac{x_1x_2}{K}\right)$

• Valutare un derivato di payoff finale $F(S_T^1, S_T^2) = S_T^1\sqrt{S_T^2}$

$$f(t,x_1,x_2) = e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^Q\left[S_T^1\sqrt{S_T^2} \mid S_t^1 = x_1,\ S_t^2 = x_2\right] =$$

$$= e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^Q\Big[S_t^1\, e^{(r-\sigma_1^2/2)(T-t) + \sigma_1(W_T^{1,Q} - W_t^{1,Q})} \cdot \sqrt{S_t^2}\, e^{\frac{1}{2}(r-\sigma_2^2/2)(T-t) + \frac{1}{2}\sigma_2\rho(W_T^{1,Q} - W_t^{1,Q})} \cdot$$

$$e^{\frac{1}{2}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}(W_T^{2,Q} - W_t^{2,Q})} \mid S_t^1 = x_1,\ S_t^2 = x_2\Big] =$$

$\{W_t^{1,Q}\} \perp\!\!\!\perp \{W_t^{2,Q}\}$

$$= x_1\sqrt{x_2}\, e^{-r(T-t)}\,\underbrace{\mathbb{E}^Q\left[e^{(\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{2}\rho)(W_T^{1,Q} - W_t^{1,Q})}\right]}_{e^{\frac{1}{2}(\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{2}\rho)^2(T-t)}}\,\underbrace{\mathbb{E}^Q\left[e^{\frac{1}{2}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}(W_T^{2,Q} - W_t^{2,Q})}\right]}_{e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_2}{2}\sqrt{1-\rho^2}\right)^2(T-t)}} =$$

$$\times\ e^{(r-\sigma_1^2/2)(T-t)}\, e^{\frac{1}{2}(r-\sigma_2^2/2)(T-t)}$$

$$f(t,x_1,x_2) = x_1\sqrt{x_2}\; e^{\frac{1}{2}\left(r - \sigma_1^2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t)}\; e^{\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{4}\rho^2 + \sigma_1\sigma_2\rho\right)(T-t)}\; e^{\frac{\sigma_2^2}{8}(1-\rho^2)(T-t)}$$

$$\cancel{-\tfrac{1}{2}\sigma_1^2} - \frac{\sigma_2^2}{4} \cancel{+\tfrac{1}{2}\sigma_1^2} \cancel{+ \tfrac{1}{8}\sigma_2^2\rho^2} + \frac{\sigma_2^2}{8} \cancel{- \rho^2\frac{\sigma_2^2}{8}} + \sigma_1\sigma_2\frac{\rho}{2}$$

$$-\frac{1}{8}\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2\frac{\rho}{2} = \frac{\sigma_2}{2}\left(\sigma_1\rho - \frac{\sigma_2}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f(t,x_1,x_2) = x_1\sqrt{x_2}\; e^{\underbrace{\frac{1}{2}\left[r + \sigma_2\left(\sigma_1\rho - \frac{1}{4}\sigma_2\right)\right]}_{c}(T-t)}$$

Calcoliamo il delta del portafoglio di copertura: $f(t,x_1,x_2) = x_1\sqrt{x_2}\, e^{c(T-t)}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \sqrt{x_2}\, e^{c(T-t)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_1}{2\sqrt{x_2}}\, e^{c(T-t)}$$

OSS:
La quota in S^1 dipende solo dal valore di S^2, mentre quella in S^2 dipende dai valori di S^1 e S^2

rappresentano le quote in azioni di tipo 1 e di tipo 2 da detenere nel portafoglio di copertura. Rendono il portafoglio $V(t,x_1,x_2) = -f(t,x_1,x_2) + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ delta neutrale (insensibile rispetto alle variazione di prezzo di entrambe le azioni)

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -\frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_1 = 0 \qquad \alpha_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = -\frac{\partial f}{\partial x_2} + \alpha_2 = 0 \qquad \alpha_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

APPROFONDIMENTO

Si può anche dimostrare che $f(t,x_1,x_2)$ risolve la PDE di valutazione di B&S bidimensionale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + r x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \dfrac{1}{2} \sigma_1^2 x_1^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + r x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \dfrac{1}{2} \sigma_2^2 x_2^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \underbrace{\rho \sigma_1 \sigma_2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}} - r f = 0 \\ f(T, x_1, x_2) = F(x_1, x_2) \end{cases}$$

se è moti browniani sono indipendenti $\rho = 0$, questo

termine non c'è