9. Mercati finanziari con più titoli rischiosi

- Mercati finanziari con N titoli rischiosi e d moti browniani
- Misure martingala equivalenti
- Mercati completi e incompleti
- Esempi

Mercati finanziari con N titoli rischiosi (Pascucci p. 378)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ filtrazione

$\underline{W}_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)$ moto browniano d-dimensionale ossia $W_t^1, \dots, W_t^d$ sono d moti browniani indipendenti

N titoli rischiosi $\quad \boxed{dS_t^i = S_t^i \left(\mu_i \, dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} \, dW_t^j \right) \quad i = 1, \dots, N}$

$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{pmatrix}$ vettore dei rendimenti attesi $\quad \mathbb{E}[S_t^i] = S_0^i e^{\mu_i t}$ (*)

$(\sigma_{ij})_{\substack{i=1,\dots,N \\ j=1,\dots,d}}$ matrice $N \times d$ di volatilità

Titolo privo di rischio $\quad dB_t = r B_t \, dt$, $B_0 = 1$ $\quad B_t = e^{rt}$ bond

Def. Q è una misura martingala per il mercato finanziario se

- $Q \sim P$ (equivalente a P) ossia $Q(A) = 0 \iff P(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$
- $\tilde{S}_t = (e^{-rt} S_t^1, \dots, e^{-rt} S_t^N)$ vettore dei prezzi scontati è una martingala
  $\forall t > s \quad \mathbb{E}^Q[\tilde{S}_t | \mathcal{F}_s] = \tilde{S}_s$

Ossia $\forall i = 1, \dots, N \quad \mathbb{E}^Q[S_t^i | \mathcal{F}_s] = S_s^i e^{r(t-s)} \quad \forall t > s$

significa che rispetto a Q i titoli rischiosi hanno rendimento atteso r

(*) Grazie alla formula di Itô multidimensionale è possibile determinare l'espressione esplicita della EDS : $dS_t^i = S_t^i \left(\mu_i \, dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} \, dW_t^j \right)$

$$\Rightarrow \boxed{S_t^i = S_0^i \, e^{\left(\mu_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2\right)t} \, e^{\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} W_t^j}}$$

$$\mathbb{E}[S_t^i] = S_0^i \, e^{\left(\mu_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2\right)t} \, \mathbb{E}\left[e^{\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} W_t^j}\right]$$

ora osserviamo che

$$\mathbb{E}\left[e^{\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} W_t^j}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{d} e^{\sigma_{ij} W_t^j}\right] \underset{\text{per l'indipendenza}}{=} \prod_{j=1}^{d} \mathbb{E}\left[e^{\sigma_{ij} W_t^j}\right] = \prod_{j=1}^{d} e^{\sigma_{ij}^2/2} = e^{\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2/2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[S_t^i] = S_0^i \, e^{\mu_i t}$$

Più in generale si può dimostrare che $e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 t + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} W_t^j} = M_t$ ~~è~~ è una martingala e che $S_t^i e^{-\mu_i t}$ è una martingala $\forall i = 1, \dots, n$

Una misura equivalente a P, Q, grazie al teorema di Girsanov, è individuata dal vettore $\underline{\theta} \in \mathbb{R}^d$:

$$\underline{W}_t^{\theta} = \underline{W}_t + \underline{\theta}\, t$$ è un moto browniano d-dimensionale rispetto a Q

$$W_t^{\theta,i} = W_t^i + \theta_i t \qquad i = 1, \dots, d$$

Se Q è una misura neutrale al rischio allora dobbiamo determinare a quale $\underline{\theta} \in \mathbb{R}^d$ è associata ed è caratterizzata dal fatto che rispetto a Q:

$$dS_t^i = S_t^i \left(r\, dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}\, dW_t^{\theta,j} \right)^{*} \qquad \forall i = 1, \dots, N$$ (rispetto a Q ogni titolo deve avere rendimento atteso r)

$$dS_t^i = S_t^i \left(r\, dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}\, dW_t^j + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}\, \theta_j\, dt \right) = S_t^i \left(\left(r + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}\, \theta_j \right) dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}\, dW_t^j \right)$$

confrontando questa equazione con

$$dS_t^i = S_t^i \left(\mu_i\, dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}\, dW_t^j \right)$$

$$\Rightarrow \qquad \mu_i = r + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}\, \theta_j \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}\, \theta_j = \mu_i - r \qquad i = 1, \dots, N}$$

ossia $\underline{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N \end{pmatrix}$ deve risolvere un sistema lineare di matrice dei coefficienti

$(\sigma_{ij})_{\substack{i=1,\dots,N \\ j=1,\dots,d}}$

e vettore dei termini noti $\begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \vdots \\ \mu_N - r \end{pmatrix}$

* Infatti, questo significa che $\tilde{S}_t^i = S_t^i e^{-rt}$ risulta essere una Q-martingala:

- $S_t^i e^{-rt} = e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} W_t^{\theta,j}}$
- $d\tilde{S}_t^i = \tilde{S}_t^i \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}\, dW_t^{\theta,j}$

- Se il sistema non ammette soluzioni allora $\nexists\, \mathbb{Q}$, ossia il mercato finanziario ammette arbitraggi per il primo teorema fondamentale dell'Asset Pricing

- Se il sistema ammette un unico soluzione $\underline{\theta}$ allora $\exists!\, \mathbb{Q}$, per il secondo teorema fondamentale dell'Asset Pricing, il mercato è libero da arbitraggi e completo, ossia ogni derivato di pay off finale $F(S^1_T, \dots, S^N_T)$ può essere replicato da una strategia autofinanziante (*) $(\alpha^1_t, \dots, \alpha^N_t)$ con α^i_t quota nel titolo di prezzo $\{S^i_t\}$

In tal caso esiste un unico prezzo di non-arbitraggio dato da:

$$0 \le t < T \qquad v(t, S^1_t, \dots, S^N_t) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\, F(S^1_T, \dots, S^N_T) \mid \mathcal{F}_t \,]$$

$$v_0 = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\, F(S^1_T, \dots, S^N_T)]$$

- Se il sistema ammette ∞ soluzioni allora $\exists\, \infty$ misure martingala, ossia il mercato è libero da arbitraggi ma non è completo

(*)
Analogamente al modello Black & Scholes unidimensionale, per il mercato B&S multidimensionale completo, la strategia di replica è determinata conoscendo $v(t, x_1, \dots, x_N)$

$$v(t, x_1, \dots, x_N) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(S^1_T, \dots, S^N_T) \mid S^1_t = x_1, \dots, S^N_t = x_N]$$, più precisamente coincide con la strategia

Delta-hedging: $\alpha^i_t = \dfrac{\partial v}{\partial x_i}(t, x_1, \dots, x_N)$ rappresenta la quota di azioni di prezzo $\{S^i_t\}$

$i = 1, \dots, N$ nel portafoglio di copertura al tempo t se $S^1_t = x_1, \dots, S^N_t = x_N$

- Se $N=d$ il sistema $\sigma \cdot \underline{\theta} = \underline{\mu} - \underline{r}$ è un sistema quadrato e se $\operatorname{Det} \sigma \neq 0$ allora $\exists!\, Q$ individuata dall'unica soluzione del sistema $\underline{\theta} = \sigma^{-1} (\underline{\mu} - \underline{r})$, il mercato è libero da arbitraggi e completo.

- Se $N<d$ (numero dei titoli < fonti d'incertezza)
allora se $rg(\sigma) = rg(\sigma, \underline{\mu} - \underline{r}) = K<d$ il sistema per il Teorema di Rouché-Capelli ammette ∞^{d-K} soluzioni. → Non può essere $K=d$ perché $K \leq N < d$
In questo caso, il mercato in generale, ammette ∞ misure martingala e dunque è un mercato incompleto

- Se $N>d$ (numero dei titoli > fonti d'incertezza)
allora se $rg(\sigma) = rg(\sigma, \underline{\mu} - \underline{r}) = K$ $\begin{cases} K=d & \exists!\, Q \\ K<d & \exists\ \infty^{d-K} \text{ misure martingale} \end{cases}$

- se $rg(\sigma) \neq rg(\sigma, \underline{\mu} - \underline{r})$ il sistema non ammette soluzioni e dunque esistono arbitraggi sul mercato.

In particolare un mercato libero da arbitraggi è completo $\iff$ $d \leq N$ e $rg(\sigma) = d$

$rg(\sigma) = rg(\sigma, \underline{\mu} - \underline{r})$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $N > d$ Più titoli rischiosi che fonti d'incertezza

Due titoli rischiosi $N=2$ e $d=1$ ed un solo moto browniano e $r_t = r$ costante

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu^1 dt + \sigma^1 dW_t) \qquad \mu^1 \in \mathbb{R}, \ \sigma^1 > 0$$
$$dS_t^2 = S_t^2(\mu^2 dt + \sigma^2 dW_t) \qquad \mu^2 \in \mathbb{R}, \ \sigma^2 > 0$$

Il sistema per determinare il prezzo di mercato del rischio è:

$$\begin{cases} \sigma^1 \theta = \mu^1 - r \\ \sigma^2 \theta = \mu^2 - r \end{cases} \qquad \begin{matrix} \theta = \dfrac{\mu^1 - r}{\sigma^1} \\ \theta = \dfrac{\mu^2 - r}{\sigma^2} \end{matrix}$$

è risolubile se $\dfrac{\mu^1 - r}{\sigma^1} = \dfrac{\mu^2 - r}{\sigma^2}$ ossia se i due titoli hanno lo stesso prezzo di mercato del rischio.

Se questa condizione non fosse rispettata ($\nexists$ Q misura mg) allora abbiamo un arbitraggio. Se fosse $\lambda = \dfrac{\mu^1 - r}{\sigma^1} - \dfrac{\mu^2 - r}{\sigma^2} > 0$ consideriamo un portafoglio con autofinanziamento

quota in S^1 $\alpha_t^1 = \dfrac{1}{S_t^1 \sigma^1}$ e quota in S^2 $\alpha_t^2 = -\dfrac{1}{S_t^2 \sigma^2}$

Valore del portafoglio $V_t = \alpha_t^1 S_t^1 + \alpha_t^2 S_t^2 + \beta_t B_t$

essendo autofinanziante

$$dV_t = \alpha_t^1 dS_t^1 + \alpha_t^2 dS_t^2 + \beta_t \underbrace{dB_t}_{r B_t dt} = \alpha_t^1 dS_t^1 + \alpha_t^2 dS_t^2 + r(V_t - \alpha_t^1 S_t^1 - \alpha_t^2 S_t^2)dt$$

$$dV_t = \frac{1}{\sigma^1}(\mu^1 dt + \sigma^1 dW_t) - \frac{1}{\sigma^2}(\mu^2 dt + \sigma^2 dW_t) + r\left(V_t - \frac{1}{\sigma^1} + \frac{1}{\sigma^2}\right)dt$$

$$dV_t = \left(\frac{\mu^1-r}{\sigma_1} - \frac{\mu^2-r}{\sigma_2}\right) dt + rV_t\,dt + \cancel{dW_t} - \cancel{dW_t}$$

$$dV_t = \lambda\,dt + rV_t\,dt$$

è un arbitraggio in quanto è privo di rischio ed ha un rendimento certo $> r$.

Ritorniamo al sistema di N eq. e d incognite

$$\underset{N\times d}{\sigma_t} \cdot \underset{d\times 1}{\theta_t} = \mu_t - r_t = \begin{pmatrix} \mu_t^1 - r \\ \vdots \\ \mu_t^N - r \end{pmatrix}$$

<u>Teorema di Rouché - Capelli</u>

C.N.E.S. affinché un sistema lineare di N equazioni in d incognite ammette soluzioni

$$\underset{N\times d}{A}\,\underset{d\times 1}{x} = \underset{N\times 1}{b}$$

è che $rg(A) = rg(A, b) = k$. Se $d = k$ il sistema ammette una sola soluzione altrimenti ne ammette ∞^{d-k}.
se $k < d$

- Se $N = d$ e $\det \sigma_t \neq 0$ allora il sistema ammette una sola soluzione $\theta_t = \sigma_t^{-1}(\mu_t - r)$ che si può determinare con il teorema di Cramer, quindi $\exists!\ Q$ il mercato è completo
- Se $N < d$ e σ_t ha rango massimo, $rg(\sigma_t) = N \Rightarrow rg(\sigma_t, \mu_t - r) = N$ il sistema ammette ∞^{d-N} soluzioni,

$\exists\ \infty$ misure mg il mercato è incompleto

ESEMPI: di Mercato Completo con due titoli rischiosi e due moti browniani

1) S^1 e S^2 guidati da moti browniani indipendenti con $\sigma_1, \sigma_2 > 0$

$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1 (\mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^1) \\ dS_t^2 = S_t^2 (\mu_2 dt + \sigma_2 dW_t^2) \end{cases} \qquad \text{Matrice di volatilità} \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$dS_t^i = S_t^i \left(r\,dt + \sigma_i \left(dW_t^i + \frac{\mu_i - r}{\sigma_i} dt \right) \right) \qquad i = 1,2$$

$\exists !$ Q misura martingala tale che:

$$\boxed{\left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t \,;\; dZ_t = -Z_t (\theta_1 dW_t^1 + \theta_2 dW_t^2) \qquad Z_t = e^{-\frac{1}{2}\theta_1^2 t - \theta_1 W_t^1} e^{-\frac{1}{2}\theta_2^2 t - \theta_2 W_t^2}} \quad \begin{cases} dW_t^{Q,1} = dW_t^1 + \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_1} dt \\ dW_t^{Q,2} = dW_t^2 + \dfrac{\mu_2 - r}{\sigma_2} dt \end{cases}$$

sono Q-moti browniani

Infatti il sistema lineare

$$\sigma \theta = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{pmatrix} \quad \text{è} \quad \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{pmatrix}$$

e $\mathrm{Det}\,\sigma = \sigma_1 \sigma_2 > 0 \Rightarrow \exists ! \, (\theta_1, \theta_2)$ $\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \\ \theta_2 = \dfrac{\mu_2 - r}{\sigma_2} \end{cases}$ Il mercato è completo. Più precisam

2) S^1 e S^2 guidati da moti browniani correlati

W_t^1 e B_t correlati con $\mathbb{E}[W_t B_t] = \rho t$ e $\rho \in (-1, 1)$ $|\rho| < 1$

$B_t = \rho W_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2}\, W_t^2$ con W_t^2 indip. da W_t^1 $\qquad W_t^i \sim N(0,t)$

$\mathbb{E}[B_t] = 0 \qquad Var(B_t) = \rho^2 t + (1 - \rho^2) t = t \Rightarrow B_t \sim N(0,t)$

OSS: W_t^1 e W_t^2 sono moti browniani $\Rightarrow$ hanno incrementi indip. $\Rightarrow$ B_t ha increm. indip.
$W_0^1 = W_0^2 = 0 \Rightarrow B_0 = 0$

$dS_t^1 = S_t^1 (\mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^1)$ con $\sigma_1, \sigma_2 > 0$

$dS_t^2 = S_t^2 (\mu_2 dt + \sigma_2 dB_t) = S_t^2 (\mu_2 dt + \sigma_2 \rho \, dW_t^1 + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \, dW_t^2)$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2 \rho & \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Det}\,\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} > 0 \quad \text{se } |\rho| \neq 1$$

Per determinare il prezzo di mercato del rischio dobbiamo risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2 \rho & \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \sigma_1 \theta_1 = \mu_1 - r \\ \sigma_2 \rho \theta_1 + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}\, \theta_2 = \mu_2 - r \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta_1 = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \\ \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}\, \theta_2 = \mu_2 - r - \sigma_2 \rho \theta_1 \end{cases}$$

$$\theta_2 = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} - \frac{\cancel{\sigma_2} \rho}{\cancel{\sigma_2} \sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} - \rho \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \right)$$

$\exists!$ la soluzione, ossia $\exists!$ prezzo di mercato del rischio

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \\ \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} - \rho \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \right) \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists!$ $\mathbb{Q}$ misura martingala equivalente. Il mercato è completo

Esiste un unico prezzo di non arbitraggio per ogni derivato di payoff finale $F(S_T^1, S_T^2)$

$$f(t, S_t^1, S_t^2) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [F(S_T^1, S_T^2) \mid S_t^1, S_t^2]$$

per fare questo calcolo è utile la rappresentazione esplicita di S_t^1 ed S_t^2 che si può ricavare con Itô multidimensionale

$$S^1_t = S^1_0\, e^{(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)t + \sigma_1 W^1_t}$$

$$S^2_t = S^2_0\, e^{(\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2)t + \sigma_2 W^2_t} = S^2_0\, e^{(\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2)t + \sigma_2 \rho W^1_t + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\, W^2_t}$$

Rispetto a Q:
$$\begin{cases} S^1_t = S^1_0\, e^{(r - \sigma_1^2/2)t + \sigma_1 W^1_t} \\ S^2_t = S^2_0\, e^{(r - \sigma_2^2/2)t + \sigma_2 \rho W^1_t + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\, W^2_t} \end{cases}$$

$\{W^1_t\}$ e $\{W^2_t\}$ moti browniani indipendenti

- Valutare il derivato di payoff finale $\boxed{F(S^1_T, S^2_T) = \mathbb{1}_{\{S^1_T S^2_T > K\}}}$

$$f(t, S^1_t, S^2_t) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^Q\left[\mathbb{1}_{\{S^1_T S^2_T > K\}} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$f(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)}\, Q\left(S^1_T S^2_T > K \mid S^1_t = x_1,\ S^2_t = x_2\right)$$

$$S^1_T = S^1_t\, e^{(r - \sigma_1^2/2)(T-t) + \sigma_1 (W^1_T - W^1_t)}$$
$$S^2_T = S^2_t\, e^{(r - \sigma_2^2/2)(T-t) + \sigma_2 \rho (W^1_T - W^1_t) + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\,(W^2_T - W^2_t)}$$

$$Q\left(S^1_T S^2_T > K \mid S^1_t = x_1,\ S^2_t = x_2\right) = Q\left(x_1 x_2\, e^{(2r - \sigma_1^2/2 - \sigma_2^2/2)(T-t)}\, e^{(\sigma_1 + \sigma_2\rho)(W^1_T - W^1_t) + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\,(W^2_T - W^2_t)} > K\right)$$

$$W^1_T - W^1_t \sim \mathcal{N}(0, T-t)$$
$$W^2_T - W^2_t \sim \mathcal{N}(0, T-t)$$

$$X = (\sigma_1 + \sigma_2\rho)(W^1_T - W^1_t) + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\,(W^2_T - W^2_t) \sim \mathcal{N}\left(0, [(\sigma_1 + \sigma_2\rho)^2 + \sigma_2^2(1-\rho^2)\right.$$

infatti $\mathrm{Var}(X) = (\sigma_1 + \sigma_2\rho)^2 (T-t) + \sigma_2^2(1-\rho^2)(T-t) = (\sigma_1^2 + \cancel{\sigma_2^2\rho^2} + 2\sigma_1\sigma_2\rho + \sigma_2^2 - \cancel{\rho^2\sigma_2^2})(T-t)$

$$X \sim \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)(T-t)}\; N = aN$$

$$= Q\left(e^{b+aN} > \frac{K}{x_1 x_2}\right) = Q\left(b + aN > \ln\left(\frac{K}{x_1 x_2}\right)\right)$$

$$= Q\left(N > \frac{\ln(K/x_1x_2) - b}{a}\right) = Q\left(N > \frac{\ln(K/x_1x_2) - \left(2r - \frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\ln(x_1x_2/K) + \left(2r - \frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2}}\right)$$

abbiamo utilizzato che
$Q(N > -x) = Q(N < x) = \Phi(x)$

$$\Rightarrow \quad f(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)}\,\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{x_1x_2}{K}\right) + \left(2r - \frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2}}\right)$$

• Valutare un derivato di payoff finale $\boxed{F(S^1_T\, S^2_T) = S^1_T \sqrt{S^2_T}}$

$$f(t, S^1_t, S^2_t) = e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^Q\left[S^1_T \sqrt{S^2_T} \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right]$$

$$\mathbb{E}^Q\left[S^1_T\sqrt{S^2_T} \mid \mathcal{F}_t\right] \overset{S^1_t = x_1,\ S^2_t = x_2}{=} \mathbb{E}^Q\left[x_1 e^{\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_1(W^1_T - W^1_t)} \sqrt{x_2}\, e^{\frac{1}{2}\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t) + \frac{1}{2}\rho\sigma_1(W^1_T - W^1_t) + \frac{1}{2}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}(W^2_T - W^2_t)}\right]$$

$$= x_1\sqrt{x_2}\, e^{\left(\frac{3}{2}r - \frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{\sigma_2^2}{4}\right)(T-t)}\, \underbrace{\mathbb{E}^Q\left[e^{\sigma_1\left(1+\frac{\rho}{2}\right)(W^1_T - W^1_t)}\right]}_{\substack{= \mathbb{E}\left[e^{\sigma_1\left(1+\frac{\rho}{2}\right)\sqrt{T-t}\,N}\right] \\ = e^{\frac{\sigma_1^2}{2}\left(1+\frac{\rho}{2}\right)^2(T-t)}}}\, \underbrace{\mathbb{E}^Q\left[e^{\frac{1}{2}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}(W^2_T - W^2_t)}\right]}_{\substack{\mathbb{E}^Q\left[e^{\frac{1}{2}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{T-t}\,N}\right] \\ e^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}\sigma_2^2(1-\rho^2)(T-t)}}}$$

$1 + \frac{\rho^2}{4} + \rho$

$$f(t, x_1, x_2) = x_1\sqrt{x_2}\, e^{-r(T-t)}\, e^{\frac{3}{2}r(T-t)}\, e^{\left(-\frac{1}{2}\sigma_1^2 - \frac{1}{4}\sigma_2^2\right)(T-t)}\, e^{\frac{\sigma_1^2}{2}\left(1+\frac{\rho}{2}\right)^2(T-t)}\, e^{\frac{1}{8}\sigma_2^2(1-\rho^2)(T-t)}$$

$$= x_1\sqrt{x_2}\, e^{\frac{1}{2}r(T-t)}\, e^{\sigma_1^2\frac{\rho}{2}\left(1+\frac{\rho}{4}\right)(T-t)}\, e^{-\frac{1}{8}\sigma_2^2(1+\rho^2)(T-t)} = x_1\sqrt{x_2}\, e^{c(T-t)}$$

Delta del portafoglio di copertura $\quad f(t, x_1, x_2) = x_1 \sqrt{x_2}\, e^{ct} \qquad c = \frac{1}{2} r + \frac{\sigma_1^2 \rho}{2}\left(1 + \frac{\rho}{4}\right) - \frac{1}{8}\sigma_1^2 (1 + \rho^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \sqrt{x_2}\, e^{ct}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_1}{2\sqrt{x_2}}\, e^{ct}$$

rappresenta la quota in azioni S^1 e S^2 ~~[illegible]~~ da detenere nel portafoglio

in modo da eliminare completamente il rischio di aver venduto il derivato