

6. APPROFONDIMENTI VALUTAZIONE DI DERIVATI

- Cambio di misura di probabilità, Teorema di Girsanov
- Misura martingala
- Teorema di Feynman-Kac
- Arbitraggi e mercati finanziari completi
- Teoremi fondamentali dell'Asset Pricing

Cambio di misura di probabilità

$(Q, \mathcal{F}, P)$ Def. $Q \ll P$ assolutamente continua rispetto a P
significa che se $P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0 \quad A \in \mathcal{F}$

Un noto teorema di analisi, il teorema di Radon-Nikodym dice che allora esiste una v.o. L t.c. $(\mathcal{F}$ -mis.)
 $Q(A) = E[L \mathbb{1}_A] = \int_A L dP$

inoltre $L = \frac{dQ}{dP}$ si indica così ($\Rightarrow dQ = L dP$)
Essendo Q una misura di probabilità $Q(\mathcal{S}) = 1 = E[L]$
e poiché $E[\mathbb{1}_A L] \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow L \geq 0$

QED

Consideriamo ora uno spazio di probabilità con una retroazione $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$

Se $Q \ll P$ su $\mathcal{F} \Rightarrow Q \ll P$ su $\mathcal{F}_t, \forall t$
(ossia $\forall A \in \mathcal{F}_t: P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0$)

allora $\exists$ una v.o. $L_t, \mathcal{F}_t$ -misurabile tale che

$$\forall A \in \mathcal{F}_t \quad Q(A) = E[L_t \mathbb{1}_A]$$

Verifichiamo che $(L_t)_{t \geq 0}$ è una P -mg e che $L_t \geq 0, E[L_t] = 1 \quad \forall t$

Se mostriamo che $L_t = \mathbb{E}[L | \mathcal{F}_t]$ per e' esempio 1 avremo che e' una martingala
 Infatti, $\forall A \in \mathcal{F}_t$

$$Q(A) = \mathbb{E}(1_A L_t) \text{ ma } A \in \mathcal{F} \Rightarrow Q(A) = \mathbb{E}(1_A L) = \mathbb{E}(1_A \mathbb{E}(L | \mathcal{F}_t))$$

$$\text{quindi abbiamo che } \forall A \in \mathcal{F}_t \quad \mathbb{E}(1_A L_t) = \mathbb{E}(1_A \mathbb{E}(L | \mathcal{F}_t))$$

e per e' es 20) del foglio N.1 $L_t = \mathbb{E}(L | \mathcal{F}_t)$

$$\text{Poi osserviamo che } \mathbb{E}(L_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(L | \mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}(L) = 1$$

Sia r tasso d'interesse istantaneo costante $\Rightarrow B_t = B_0 e^{rt}$ titolo non rischioso
 privo di rischio detto "bond"

Def. $(Q, \mathcal{F}, P)$ una misura $Q \sim P$ (equivalente: $Q(A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$)

si dice misura mg per $(S_t)_{t \geq 0}$ (processo dei prezzi di un titolo rischioso)

se $S_t e^{-rt}$ e' una mg rispetto a Q , ossia

$$\forall s \geq t \quad \mathbb{E}^Q[S_t e^{-rt} | \mathcal{F}_s] = S_s e^{-rs}$$

Ne consegue che se Q e' una misura martingale per $(S_t)_{t \geq 0}$: $\mathbb{E}^Q[S_t | \mathcal{F}_s] = S_s e^{-r(t-s)}$

e in particolare $\mathbb{E}^Q[S_t | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}^Q[S_t] = S_0 e^{-rt}$ $\forall t \geq 0$

Ossia la misura Q e' la cosiddetta misura neutrale al rischio, rispetto ad essa

Sia ora $(S_t)_{t \geq 0}$ descritto da un moto browniano geometrico (modello Black & Scholes)

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

Ci si chiede se esiste ed unica la misura mg per $(S_t)_{t \geq 0}$.

Abbiamo visto che $S_t e^{-\mu t}$ è una mg rispetto a P

dunque avremo che $S_t e^{-rt}$ è una mg rispetto a Q se

$$S_t = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t^Q}$$

con $(W_t^Q)_{t \geq 0}$ moto browniano rispetto a Q

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t + \sigma \left[W_t - \frac{\mu - r}{\sigma} t \right]}$$

posto $W_t^Q = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$, se esiste Q : W_t^Q è un moto browniano rispetto a Q

avremo che Q è una misura martingala. Questo è assicurato dal teorema di Girsanov.

Teorema di Girsanov

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Sia $\{\theta(t)\}_{t \geq 0}$ un processo stocastico t.c. $V_{\theta} \in \mathbb{E} \left[e^{\frac{1}{2} \int_0^t \theta(s)^2 ds} \right] < +\infty$ (Condizione di Novikov)

allora $\mathbb{F} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{P}$ t.c. $W_t^Q = W_t + \int_0^t \theta(s) ds$ è un Q -moto browniano.

Nel modello B & S la misura martingala è quella misura Q associata

a $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$ (prezzo di mercato del rischio)

Inoltre il teorema di Girsanov ci dice come è costruita la misura $\mathbb{Q}$:

$$L_t^{\mathbb{Q}} := \frac{d\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}} \quad \mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_A L_t^{\mathbb{Q}}) \quad \forall A \in \mathcal{F}_t$$

$$L_t^{\mathbb{Q}} = e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \theta(s)^2 ds + \int_0^t \theta(s) dW_s}$$

(la condizione di Novikov è indispensabile per dimostrare che $L_t^{\mathbb{Q}}$ è una martingala)

$$L_t^{\mathbb{Q}} = e^{-\frac{1}{2} \theta^2 t - \theta W_t}$$

per $\theta(t) = \theta$ costante

è la derivata di Radon-Nikodym

che permette di passare da $\mathbb{P}$ a $\mathbb{Q}$

Inoltre si può passare anche da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{P}$ con

$$(L_t^{\mathbb{Q}})^{-1} = e^{\frac{1}{2} \theta^2 t + \theta W_t}$$

$$(L_t^{\mathbb{Q}})^{-1} = e^{\frac{1}{2} \theta^2 t + \theta (W_t^{\mathbb{Q}} - \theta t)} = e^{-\frac{1}{2} \theta^2 t + \theta W_t^{\mathbb{Q}}}$$

$$\text{essendo } W_t = W_t^{\mathbb{Q}} - \theta t$$

Perché le derivate di R-N per passare da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{P}$ e viceversa sono:

$$\frac{d\mathbb{Q}^{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\frac{1}{2} \theta^2 t + \theta W_t}$$

W_t $\mathbb{P}$ -moto browniano



$$W_t + \theta t \quad \mathbb{Q}^{\mathbb{P}}\text{-moto browniano}$$

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\frac{1}{2} \theta^2 t + \theta W_t^{\mathbb{Q}}}$$

$W_t^{\mathbb{Q}}$ $\mathbb{Q}$ -moto browniano



$$W_t^{\mathbb{Q}} - \theta t \quad \mathbb{P}\text{-moto browniano}$$

Indaghiamo in modo più approfondito le equazioni che descrivono la soluzione di una equazione alle derivate parziali del tipo:

$$(EPP) \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, x) + \mu(t, x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - r f(t, x) = 0 & t \in (0, T), x \in \mathbb{R} \\ f(T, x) = F(x) \end{cases}$$

e la sua rappresentazione in termini di valore atteso.

Teorema di Feynman-Kac

Sia $f(t, x)$ l'unica soluzione $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ delle (EPP),

allora $f(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[F(X_T) | X_t = x]$

ove $X_t, t \in [0, T]$ è l'unica soluzione delle eq. differenziali stocastiche

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t \quad t \in [0, T], X_0 \in \mathbb{R}$$

Dim.

Sia $Z_t = e^{-rt} f(t, X_t)$ e applichiamo la formula di Itô

$$dZ_t = e^{-rt} df(t, X_t)$$

$$dZ_t = e^{-rt} \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, X_t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dX_t \right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial t}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial x^2}$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x^4} \frac{\partial x^4}{\partial x^3}$$

$$\Rightarrow dg(t, x_t) = \left[-\frac{\partial}{\partial t} e^{-rt} f(t, x_t) + e^{-rt} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial t} \right) \right] dt + e^{-rt} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x} \right) dx_t + e^{-rt} \left(\frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial x^2} \right) dx_t^2 + \dots$$

Perché P è soluzione dell'EDP si conviene che

$$\Rightarrow dg(t, x_t) = e^{-rt} \sigma(t, x_t) \frac{\partial P}{\partial x}(t, x_t) dx_t \quad \text{ossia } \{Z_t\}_{t \in [0, T]} \text{ è una martingala}$$

ossia in fatti

$$g(T, x_T) = g(t, x_t) + \int_t^T e^{-rs} \sigma(s, x_s) \frac{\partial P}{\partial x}(s, x_s) ds = g(t, x_t) + M_T - M_t$$

$$\text{ove } M_t := \int_0^t e^{-rs} \frac{\partial f}{\partial x}(s, x_s) \sigma(s, x_s) ds \quad \text{è una mg se } \mathbb{E} \left[\int_0^T \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s, x_s) \sigma(s, x_s) \right)^2 ds \right] < \infty$$

"

$$\Rightarrow \mathbb{E} [g(T, x_T) | \mathcal{F}_t] = g(t, x_t) + \mathbb{E} [M_T - M_t | \mathcal{F}_t] = g(t, x_t)$$

$$\mathbb{E} [f(T, x_T) | \mathcal{F}_t] = e^{-rt} f(t, x_t)$$

tenendo conto della condizione

$$f(t, x_t) = F(x_t)$$

$$\Rightarrow f(t, x_t) = e^{-rt} F(x_t)$$

$$\sigma(x_t) \sigma(x_t)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E} [f(t, x_t) | \mathcal{F}_t] = f(t, x_t) = \mathbb{E} [e^{-rt} F(x_t) | \mathcal{F}_t] = e^{-rt} \mathbb{E} [F(x_t) | \mathcal{F}_t] = e^{-rt} F(x_t)$$

$$= e^{-rt} F(x_t) = \mathbb{E} [F(x_t) | \mathcal{F}_t]$$

□

Def. Un Arbitraggio

$R_t = (\alpha_t, \beta_t)$ è un portafoglio autofinanziante I.f.c. $V_0^R = 0$ ~~essa~~ quasi certamente

$$P(V_T^R > 0) = 1 \quad \text{e} \quad P(V_T^R > 0) > 0$$

- S_t titolo rischioso $B_t = e^{-rt}$ $dB_t = r B_t dt$
• Bt bond plus di rischio
- $V_t^R = \alpha_t S_t + \beta_t B_t$ $R_t = (\alpha_t, \beta_t)$ è autofinanziante se $dV_t^R = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t$
• $S_t = S_t e^{-rt}$ prezzo scontato

Prop. se portafoglio $R_t = (\alpha_t, \beta_t)$ è autofinanziante $\Leftrightarrow d\tilde{V}_t^R = \alpha_t d\tilde{S}_t$

dim.

$$d\tilde{S}_t = e^{rt} dS_t - r e^{rt} S_t dt \quad d\tilde{V}_t^R = e^{rt} dV_t^R - r e^{rt} V_t^R dt$$

$$dV_t^R = \alpha_t dS_t + r(V_t^R - \alpha_t S_t) dt$$

$$\Rightarrow d\tilde{V}_t^R = e^{rt} \left[\alpha_t dS_t + r(V_t^R - \alpha_t S_t) dt \right] - r e^{rt} V_t^R dt$$

$$d\tilde{V}_t^R = e^{rt} \left[\alpha_t dS_t - r \alpha_t S_t dt \right] = \alpha_t d\tilde{S}_t$$

□

Def. $\mathbb{Q} \sim P$ è una misura martingale se $\{\tilde{S}_t\}_{t \in [0, T]}$ è una $\mathbb{Q}$ -martingala $\Leftrightarrow S_t \leq T_A \quad S_{t+dt} e^{-r dt} = [S_t | \mathcal{F}_t]_{\mathbb{Q}}$

scartato

Osserviamo che se Q è una misura martingale per $\{S_t\}_{t \geq 0}$ allora il valore Γ di ogni strategia $R_t = (\alpha_t, \beta_t)$ autofinanziante è una Q -martingala, infatti:

Questo vale in generale anche senza specificare la dinamica del prezzo

$$\tilde{dV}_t^R = \alpha_t d\tilde{S}_t \quad \text{e se } \{\tilde{S}_t\} \text{ è una } Q - mg \Rightarrow \{\tilde{V}_t^R\} \text{ è una martingale}$$

In particolare se $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma d\tilde{W}_t^P)$ ($\tilde{W}_t^P$ è moto-browniano P nel Modello B&S)

$$d\tilde{S}_t = S_t(-r dt + \sigma d\tilde{W}_t^Q)$$
 ($\tilde{W}_t^Q$ è moto-browniano Q)

$$d\tilde{S}_t = -r e^{-rt} S_t dt + e^{-rt} S_t \sigma d\tilde{W}_t^Q + e^{-rt} (S_t r dt + S_t \sigma d\tilde{W}_t^P)$$

$$d\tilde{S}_t = S_t e^{-rt} \sigma d\tilde{W}_t^Q = \sigma \tilde{S}_t d\tilde{W}_t^Q$$

$$\Rightarrow d\tilde{V}_t^R = \alpha_t \sigma \tilde{S}_t d\tilde{W}_t^Q \Rightarrow \tilde{V}_t^R = \tilde{V}_0^R + \underbrace{\int_0^t \alpha_s \sigma \tilde{S}_s d\tilde{W}_s^Q}_{Q - mg}$$

I Teoremi fondamentali dell'asset pricing

Un mercato è libero da arbitraggi $\Leftrightarrow$ Esiste una misura martingale equivalente

(Dim) Ci limitiamo a mostrare l'implicazione $IFQ \Rightarrow AOA$

Se esiste Q misura mg equivalente per $\{S_t\}$, $\forall$ ogni R_t strategia autof. $\tilde{V}_t^R$ $Q - mg$

$$\Rightarrow \mathbb{E}^Q[\tilde{V}_T^R] = \tilde{V}_0^R = V_0^R$$

e dunque $\nexists$ arbitraggi. Infatti se R_t fosse un arbitraggio $V_0^R = 0$, $P(V_T^R > 0) = 1$ e $P(V_T^R > 0) > 0 \Rightarrow \mathbb{E}^Q[V_T^R] > 0$ e $Q(V_T^R > 0) = 1$ e $Q(V_T^R > 0) > 0$ perché non

misure equivalenti, $\Rightarrow \mathbb{E}^Q[V_T^R] > 0$ e questo è in contraddizione

in cui $\mathbb{E}^Q[V_T^R] = V_0^R = 0$

" $e^{-rT} \mathbb{E}^Q[V_T^R]$

~~Viceversa se esiste un arbitraggio $\mathbb{E}^Q[V_T^R] > 0$ e dunque Q non può essere una misura di autocompensazione e $V_0^R = 0$ $P(V_T^R \geq 0) = 1$, $P(V_T^R > 0) > 0$~~

~~$\Rightarrow Q \cap P$ $\mathbb{E}^Q[V_T^R] > 0$ e dunque Q non può essere una misura di autocompensazione e $V_0^R = 0$~~

~~markingale arbitraria $\mathbb{E}^Q[V_T^R] = e^{-rT} \mathbb{E}^Q[V_T^R] = V_0^R = 0$~~

□

~~Teorema fondamentale dell'asset pricing~~

~~Un mercato libero da arbitraggio è completo $\Leftrightarrow \exists$ Q misura di autocompensazione~~

Osservazione:

Se in un mercato finanziario esiste una misura mg equivalente Q allora

le $\{R_t^1\}$ e $\{R_t^2\}$ sono strategie autofinanzanti t.c. ~~XXXXXX~~

$V_T^{R^1} = V_T^{R^2} \Rightarrow V_t^{R^1} = V_t^{R^2} \quad \forall t \in [0, T]$

Infatti $V_T^{R^1}$ e $V_T^{R^2}$ sono Q -martingale $\Rightarrow V_T^{R^1} = \mathbb{E}^Q[V_T^{R^1} | \mathcal{F}_t] = V_t^{R^1}$
 $V_T^{R^2} = \mathbb{E}^Q[V_T^{R^2} | \mathcal{F}_t] = V_t^{R^2}$

$e^{-rT} V_T^{R^2} = V_t^{R^2}$
 $\Rightarrow V_t^{R^1} = V_t^{R^2}$
 $e^{-rT} V_T^{R^1} = V_t^{R^1}$
 $\Rightarrow V_t^{R^1} = V_t^{R^2}$

Def. Un derivato di payoff finale X ove X è una v.c. $\mathcal{F}_T$ -misurabile è replicabile se $\exists R_t = (\alpha_t, \beta_t)$ auto finanziante t.c. $V_T^R = X$.

Se Q è una misura mg equivalente $\Rightarrow V_t^R \in Q$ -mg se $V_T^R = X \Rightarrow V_T^R = e^{-rT} X$

$$\Rightarrow V_t^R = e^{-rt} V_t^R = \mathbb{E}^Q[V_T^R | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^Q[e^{-rT} X | \mathcal{F}_t]$$

$$\Rightarrow V_t^R = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[X | \mathcal{F}_t]$$

Quindi se $\{R_t\}$ è una strat. autof. che replica il derivato $V_t^R = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[X | \mathcal{F}_t]$

$\forall Q$ misura martingale equivalente, $H_t := e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[X | \mathcal{F}_t]$ è dato prezzo d'arbitraggio di X ed è definito in modo unico.

Def. Un mercato si dice completo se ogni derivato è replicabile da una strategia autofinanziata

II Teorema Fondamentale dell'Asset Pricing

Un mercato libero da arbitraggio è completo $\Leftrightarrow$ Esiste una unica misura martingale

Dim. Dimostriamo l'implicazione ($\Rightarrow$)

Abbiamo visto che se X è replicabile allora $\forall Q_1, Q_2$ misure mg equivalenti

$$\mathbb{E}^{Q_1}[X | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{Q_2}[X | \mathcal{F}_t] \quad (\text{perché se portafoglio di replicazione di } V_t^R \text{ è uguale})$$

non scontato $V_t^R \in Q$ è sic

una Q_1 deve Q_2 martingale)

$$\Rightarrow E^{Q_1}[X] = E^{Q_2}[X]$$

$$\text{assumendo } E = E_T$$

$\Rightarrow$

$$\forall X \text{ v.o. } E_T - \text{misurabile}$$

$$Q_1(A) = Q_2(A)$$

$$\text{e dunque } Q_1 = Q_2$$

Si può dimostrare anche al contrario.

□

$$\forall A \in \mathcal{F}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{nessa misura} \\ X = \pi_A \end{array} \right)$$