Parziale del 2 dicembre 2021
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes, di rendimento atteso μ e volatilitá $\sigma > 0$, soluzione della EDS

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 > 0$$

con $\{W_t\}_{t\geq 0}$ moto browniano. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio.

(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente e determinare il prezzo di mercato del rischio.

(ii) Calcolare il prezzo $v(t, x)$ (al tempo $t \in [0, T]$ se $S_t = x$) del derivato di payoff finale

$$F(S_T) = \sqrt{\frac{S_T}{S_0}}.$$

(iii) $v(t, x)$ verifica l'equazione di valutazione di Black & Scholes?

(iv) Applicare la formula di Ito per determinare la EDS (rispetto alla misura martingala Q) di cui é soluzione il processo

$$Y_t = \sqrt{\frac{S_t}{S_0}}.$$

Y_t é un moto browniano geometrico? In caso affermativo calcolarne rendimento atteso $\bar{\mu}$ e volatilitá $\bar{\sigma}$. Il valore di $\bar{\mu}$ é coerente con il prezzo $v(0, S_0)$ determinato al punto (ii)?

(v) Un investitore ha venduto 100 derivati determinare la quota in azioni affinché il portafoglio sia Δ-neutrale. L'investitore al tempo $t = 0$ deve acquistare o vendere allo scoperto azioni?

(vi) Determinare la quota β nel derivato di prezzo $g(t, x) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2(t, x))$ (al tempo $t \in [0, T]$ se $S_t = x$) ove $\Phi(x)$ é la distribuzione normale standard, $K > 0$, e

$$d_2(t, x) = \frac{ln(\frac{x}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}},$$

affinché il portafoglio sia Γ-neutrale.

(vii) Una volta determinata la quota nel secondo derivato, ri-bilanciare la quota in azioni affinché il portafoglio sia Δ-neutrale.

(viii) **Facoltativo** Determinare il segno di β e darne il significato. $g(t, x)$ é il prezzo di quale derivato? Giustificare la risposta.