Parziale del 18 dicembre 2020
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes, di rendimento atteso μ e volatilitá $\sigma > 0$. Sia r il tasso d'interesse privo di rischio.
(i) Determinare il prezzo $v(t,x)$ (al tempo $t \in [0,T]$ se $S_t = x$) del derivato di payoff finale

$$F(S_T) = \log(\frac{S_T}{S_0}).$$

(ii) $v(t,x)$ verifica l'equazione di valutazione di Black & Scholes?
(iii) Applicare la formula di Ito per determinare la EDS (rispetto alla misura martingala equivalente Q) di cui é soluzione il processo

$$Y_t = \log(\frac{S_t}{S_0}).$$

Da questa espressione dedurre l'espressione esplicita di Y_T e calcolarne il valore atteso, il valore trovato é coerente con il prezzo $v(0,S_0)$ determinato al punto (ii)?
(iv) Un investitore ha acquistato 10 derivati determinare la quota in azioni affinché il portafoglio sia Δ-neutrale. L'investitore al tempo $t = 0$ deve acquistare o vendere allo scoperto azioni?
(v) É possibile rendere il portafoglio Γ-neutrale, negoziando un derivato di prezzo $g(t,x) = x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$ (al tempo $t \in [0,T]$ se $S_t = x$)?
Facoltativo:
(vi) Continuazione del (v): Una volta determinata la quota nel secondo derivato, ribilanciare la quota in azioni affinché il portafoglio sia Δ-neutrale.
(vii) Scrivere la definizione di martingala e darne alcuni esempi.