Università Degli Studi "G. d'Annunzio"

Chieti –Pescara

Dipartimento di Economia

Corso di laurea in Economia e Informatica per l'Impresa

Tesi di Laurea

Cenni su risultati di tipo min-max in Ottimizzazione Combinatoria

Laureando:

Corrado Matera

Matricola 3157909

Relatore:

Dott. Raffaele Mosca

ANNO ACCADEMICO 2017/2018

INDICE

1. Introduzione 2

2. Capitolo 1: Preliminari 3

2.1 Problema di Ottimizzazione Combinatoria……...3

2.2 Grafi, definizioni preliminari……3

2.3 Grafi, definizioni di alcuni valori associati a un grafo…….....8

3. Capitolo 2: Teoremi Min-Max 10

3.1 Teorema di König ……...10

3.2 Teorema di Hall ……11

3.3 Teorema di Dilworth ……..12

3.4 Teorema di Menger ……13

3.5 Teorema di Ford-Fulkerson……15

3.5.1 Appendice 1. Calcolo massimo flusso ..……18

3.5.2 Appendice 2. Corollari per reti con capacità unitaria……..20

4. Capitolo 3: Relazioni fra i teoremi 23

4.1 Il Teorema di König è equivalente al Teorema di Hall ……..23

4.2 Il Teorema di Dilworth implica il Teorema di König ……....26

4.3 Il Teorema di König implica il Teorema di Dilworth ……26

4.4 Il Teorema di Menger implica il Teorema di König ……..27

4.5 Il Teorema di Ford-Fulkerson implica il Teorema di Menger ……...28

5. Conclusioni 29

6. Bibliografia 30

INTRODUZIONE

L'*Ottimizzazione Combinatoria*(OC) studia problemi in cui l'obiettivo è massimizzare o minimizzare una funzione a valori reali su un insieme finito di soluzioni ammissibili.
Una branchia dell'OC è l'*Ottimizzazione su Grafi*. Un grafo è una semplice struttura (esprimibile in termini matematici) utile per formalizzare e per risolvere diversi problemi di natura pratica, come trasporto, comunicazione, distribuzione, analisi del traffico.
Spesso il valore ottimo di un problema di OC è caratterizzato da una relazione di tipo min-max: il valore massimo di un problema di OC è uguale al valore minimo di un altro problema di OC. Uno degli esempi più noti in letteratura è il Teorema del massimo-flusso e minimo-taglio di Ford e Fulkerson del 1956.
I risultati min-max hanno utili conseguenze in vari ambiti, tra cui l'analisi della complessità di calcolo – in particolare una relazione min-max a volte assicura una risoluzione di problemi tramite algoritmi di complessità polinomiale – e l'analisi di sensibilità per il calcolo degli intervalli di variazione dell'ottimo.

Questa tesi riporta – con rielaborazione – alcuni risultati min-max in Ottimizzazione Combinatoria con riferimento al lavoro [1].

CAPITOLO 1: PRELIMINARI

Problema di Ottimizzazione Combinatoria

:: Un *problema di Ottimizzazione* è il seguente:

Dato un insieme A detto insieme delle *soluzioni ammissibili* e data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ detta *funzione obiettivo*, determinare:

$$\min \{f(a) : a \in A\}.$$

Una soluzione ottima di tale problema è un elemento $a' \in A$ tale che $f(a') \leq f(a)$ $\forall a \in A$.

:: Un *problema di Ottimizzazione Combinatoria* è un problema di Ottimizzazione in cui l'insieme delle soluzioni A è un insieme finito o discreto.

Grafi – definizioni preliminari

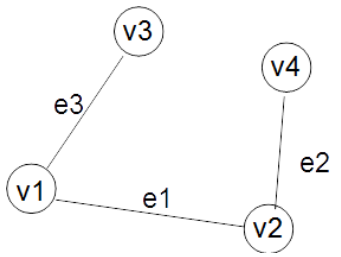
:: Un *grafo* (non orientato) è una coppia ordinata $G = (V, E)$ dove:

V è l'insieme dei *nodi* (o *vertici*) del grafo;

$E \subseteq V \times V$ è l'insieme degli *archi*, cioè, un arco è una coppia (non ordinata) di nodi di G.

Ad esempio:

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, con $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_2, v_4)$, $e_3 = (v_1, v_3)$.



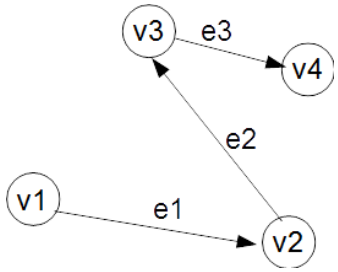
:: Un *grafo* (orientato) è una coppia ordinata $G = (V, A)$ dove:

V è l'insieme dei *nodi* (o *vertici*) del grafo;

$A \subseteq V \times V$ è l'insieme degli *archi*, cioè, un arco è una coppia (ordinata) di nodi di G.

Ad esempio:

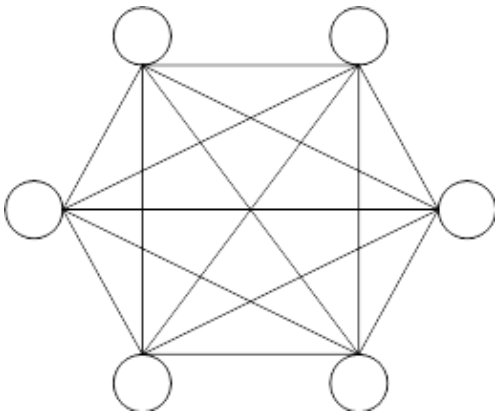
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ con $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_2, v_3)$, $e_3 = (v_3, v_4)$.



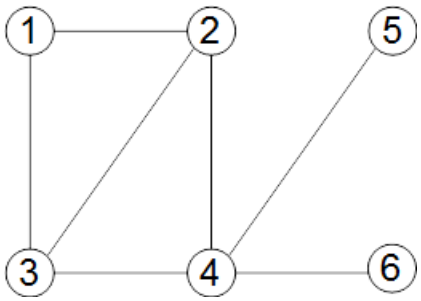
Di seguito introduciamo definizioni solo per grafi non orientati (e senza *loop*, cioè in cui ogni arco è dato da una coppia di nodi differenti fra loro).

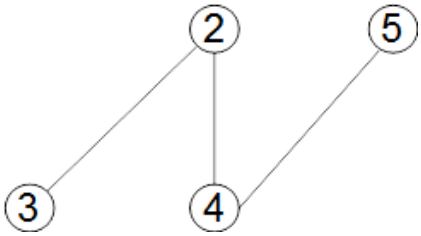
:: Dato un grafo $G = (V, E)$: due nodi $a, b \in V$ di G si dicono *adiacenti* se esiste un arco che li congiunge, cioè se $(a, b) \in E$; due archi di G si dicono *adiacenti* se incidono su uno stesso nodo.

:: Un grafo è detto *completo* se tutti i nodi sono mutuamente adiacenti, cioè, se ogni coppia di nodi è collegata da un arco.



:: Dato un grafo $G = (V, E)$, un *sottografo* di G è un grafo $H = (W, F)$ tale che $W \subseteq V$ e $F \subseteq E$. In particolare $H = (W, F)$ è *sottografo indotto* da $W \subseteq V$ in G se l'insieme degli archi di F è tale che $(u, v) \in F$ se e solo se $u, v \in W$ e $(u, v) \in E$, cioè vengono ereditati gli archi di G purché abbiano entrambi gli estremi in W.





$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

$E = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 5), (4, 3)\}$;

$W = \{3, 2, 4, 5\}$;

$F = \{(3, 2), (2, 4), (4, 5)\}$;

:: Un *cammino* in $G = (V, E)$ è una sequenza finita di nodi ed archi come segue:

$W = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2 \ldots e_k, v_k$

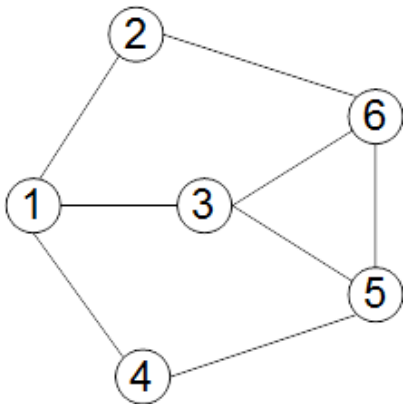
dove, per $i = 1, \ldots, k$, $v_i \in V$, $e_i \in E$, $e_i = (v_{i-1}, v_i)$;

il nodo iniziale e il nodo finale si dicono *estremi del cammino* (v_0, v_k);

un cammino si dice *semplice* se sia gli archi che i nodi sono distinti tra loro e se sono anche distinti dagli estremi;

la *lunghezza* di un cammino è data dal numero di archi o nodi che lo compongono.

Esempi di cammini:



$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

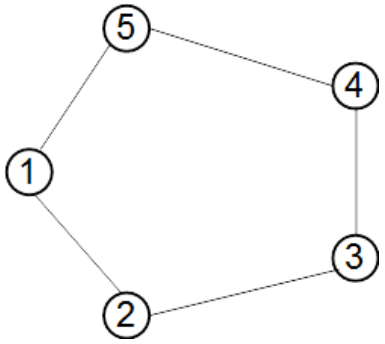
$E = \{(1, 4), (1, 3), (2, 1), (3, 6), (4, 5), (5, 6), (6, 2), (5, 3)\}$;

$W_1 = \{1, (1, 4), 4, (4, 5), 5, (5, 3), 3, (3, 6), 6\}$.

:: Due nodi di $G = (V, E)$ si dicono *connessi* se esiste un cammino in G che li congiunge.

:: La *distanza* tra due nodi in $G = (V, E)$ è la lunghezza del cammino di lunghezza minima tra i due nodi in G.

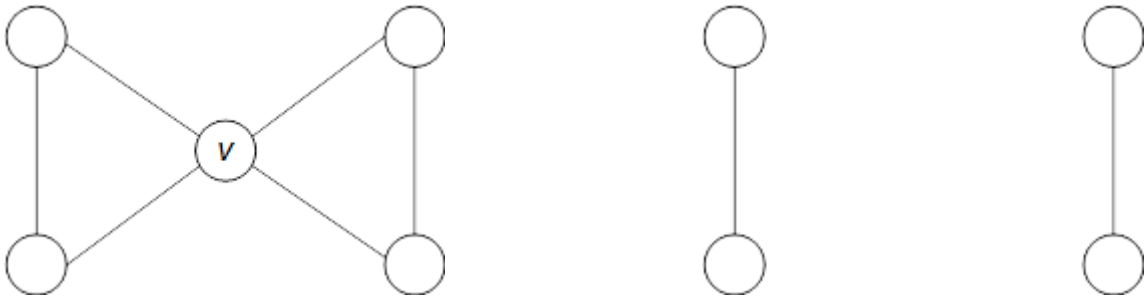
:: Un *ciclo* in $G = (V, E)$ è un cammino in G tale che gli estremi coincidono e può essere sia pari che dispari in base al numero della lunghezza. Un grafo è *aciclico* se non contiene cicli.



$W_1 = \{1, (1, 2), 2, (2, 3), 3, (3, 4), 4, (4, 5), 5, (5, 1), 1\}$.

:: Un grafo $G = (V, E)$ si dice *connesso* se esiste un cammino in G per ogni coppia di nodi distinti di G. Una *componente connessa* di G è un sottografo indotto H di G che è connesso e massimale (rispetto alla connessione). Se G è connesso, allora G avrà un'unica componente massimale che coinciderà con lo stesso grafo G.

:: Dato grafo $G = (V, E)$ connesso: un *cutset* di G è un sottoinsieme S di V che se soppresso rende il grafo risultane $G - S$ sconnesso; in particolare, se S formato da un solo nodo v, allora v è detto *cutpoint*;

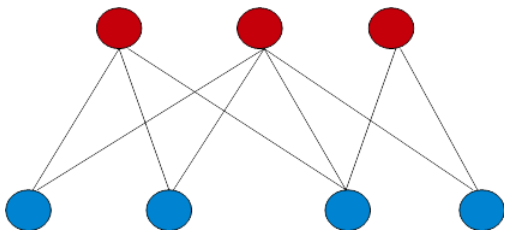


un *edge-cutset* di G è un sottoinsieme F di E se soppresso rende il grafo risultane $G - F$ sconnesso; in particolare, se F formato da un solo arco (i, j), allora (i, j) è detto *bridge*.

:: Dato grafo $G = (V, E)$:
la *connettività* di G, indicata con $k(G)$, è il più piccolo k per cui esiste in G un cutset di cardinalità k; ad esempio, se G è un grafo completo con n nodi, allora la connettività di G è pari a $n - 1$.
:: la *edge-connnectivity* di G, indicata con $k'(G)$, è il più piccolo k per cui esiste un *edge-cutset* di cardinalità k in G; ad esempio, se G ha solamente un nodo o se è sconnesso, allora la sua edge-connectivity è uguale a zero.

Teorema *Per ogni grafo G, si ha che* $k(G) \leq k'(G) \leq \delta(G)$. □

:: Un grafo $G = (V, E)$ si dice *bipartito* se esiste una partizione dell'insieme dei nodi, $V = \{A, B\}$, cioè $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = V$, tale che non esiste alcun arco i cui estremi giacciono entrambi in A o entrambi in B; in altri termini si ha $E \subseteq A \times B$, cioè, ogni arco di G è del tipo (a, b), con $a \in A$ e $b \in B$.
Un esempio di grafo bipartito in cui sono evidenziati l'insieme A (in rosso) di tre vertici e l'insieme B (in blu) di quattro vertici:



Teorema *Un grafo è bipartito se e solo se non contiene cicli dispari.* □

:: Sia $G = (V, E)$ un grafo e sia v un nodo di G:
l'*intorno di v*, indicato con $N(v)$, è l'insieme di tutti i nodi di G adiacenti a v;
la *stella di v*, indicata con $\delta(v)$,è l'insieme di tutti gli archi incidenti in v;
il *grado di v*, indicato con $d(v)$, è la cardinalità dell'insieme $N(v)$, cioè, dell'insieme dei nodi adiacenti a v; in particolare v si dice *isolato* se $d(v)=0$.

:: Dato grafo $G = (V, E)$: il *grado minimo* di G è indicato con $\delta(G)=\min\{d(v) \mid v \in V\}$ed è pari al minimo grado di un nodo di G; il *grado massimo* di G è indicato con $\Delta(G)=\max\{d(v) \mid v \in V\}$ed è pari al massimo grado di un nodo di G.

:: La sommatoria dei gradi di ogni vertice di un grafo G è uguale alla metà del numero di archi, formalmente:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$$

Tale risultato è noto come *handshake-lemma*.

Grafi – definizioni di alcuni valori associati a un grafo

Dato un grafo $G = (V, E)$ non orientato:
:: un insieme di nodi di G è un *insieme stabile* di G se tutti i nodi di tale insieme sono a due a due non adiacenti: denotiamo la cardinalità massima di un insieme stabile di G con $\alpha_0(G)$;
:: un insieme di archi di G è un *matching* di G se tutti gli archi di tale insieme sono a due a due non adiacenti (cioè a due a due non hanno nodi in comune): denotiamo la cardinalità massima di un matching di G con $\alpha_1(G)$;
:: un sottoinsieme N di nodi di G è un *vertex cover* di G se tutti gli archi di G hanno almeno un estremo in N: denotiamo la cardinalità minima di un vertex cover di G con $\beta_0(G)$;
:: un sottoinsieme A di archi di G è un *edge cover* di G se è ogni nodo di G è estremo di almeno un arco in A: denotiamo la cardinalità di un minimo edge cover con $\beta_1(G)$.

Teorema di Gallai (1959**)**

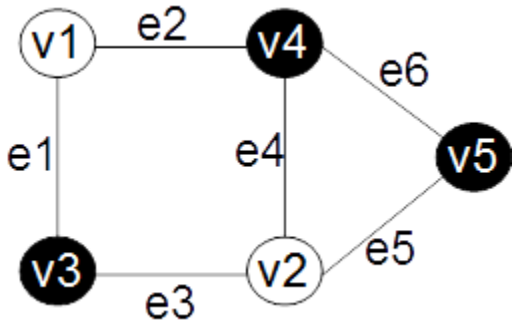
Per ogni grafo G con n nodi si ha:

$\alpha_0(G) + \beta_0(G) = n$

e se G non ha nodi isolati si ha:

$\alpha_1(G) + \beta_1(G) = n$ □

Esempio:



Nel grafo in figura sono evidenziati i nodi v_1, v_2 di un *massimo insieme stabile* di G [$\alpha_0(G) = 2$], i nodi v_3, v_4, v_5 di un *minimo vertex* cover [$\beta_0(G) = 3$], gli archi e_5, e_2 di un *massimo matching* di G [$\alpha_1(G)= 2$], gli archi e_1, e_4, e_6, di un *minimo edge cover* di G [$\beta_1(G) = 3$].

CAPITOLO 2: Teoremi Min-Max

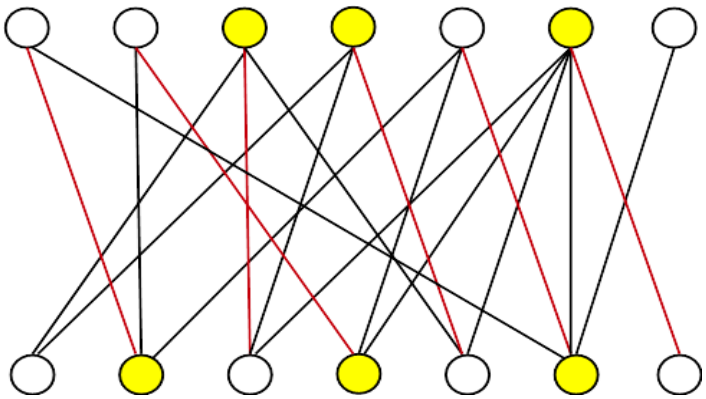
1. Teorema di König

Per i preliminari facciamo riferimento alla sezione precedente in cui vengono definiti i valori di cardinalità di massimo insieme stabile $\alpha_0(G)$, di massimo matching $\alpha_1(G)$, di minimo vertexcover $\beta_0(G)$, di minimo edge cover $\beta_1(G)$.

Teorema di König(1931)

Dato un grafo bipartito G, sia ha $\beta_0(G) = \alpha_1(G)$. In particolare, se G è connesso, allora dal Teorema di Gallai si ha anche $\beta_1(G) = \alpha_0(G)$.

Esempio:



In giallo sono riportati i nodi di un minimo vertex cover di G [$\beta_0(G) = 6$], mentre in rosso sono evidenziati gli archi di un massimo matching di G [$\alpha_1(G) = 6$].
In bianco sono riportati i nodi di un massimo insieme stabile di G [$\alpha_0(G) = 8$], mentre in nero sono evidenziati gli archi di un minimo edge cover di G [$\beta_1(G) = 13$].

2. Teorema di Hall

Sia $\mathcal{F} = (A_1, A_2, ..., A_n)$ una famiglia di sottoinsiemi (non necessariamente distinti) di un insieme I. Un *sistema di rappresentanti* di $\mathcal{F}$ è una n-upla $(a_1, a_2, ..., a_n)$ di elementi distinti di I tale che $a_i \in A_i$ per ogni $i = 1, \ldots. n$.

Un sistema di rappresentanti di $\mathcal{F}$ è detto *sistema di rappresentati distinti* (SDR) di $\mathcal{F}$ se $i \neq j$ implica $a_i \neq a_j$.

Teorema di Hall (1935)

Sia $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ una famiglia di sottoinsiemi (non necessariamente distinti) di un insieme I. Allora $\mathcal{F}$ ha un sistema di rappresentati distinti (SDR) se e solo se $|\cup_{i \in J} A_i| \geq |J|$ per ogni $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, cioè, se e solo se la cardinalità dell'unione di qualsiasi $|J|$ elementi di $\mathcal{F}$ è almeno $|J|$, per ogni $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

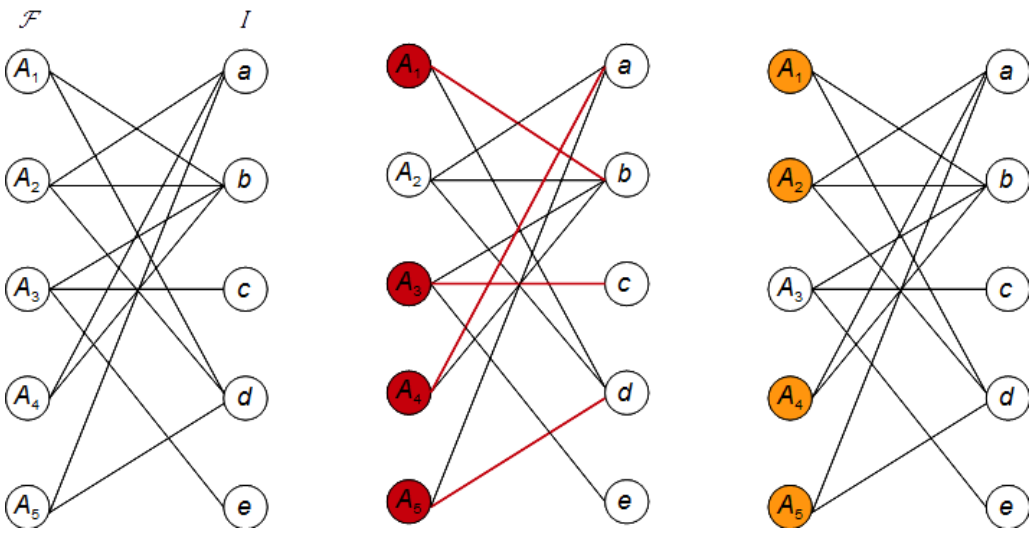
Esempio:

Una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ una famiglia di sottoinsiemi (non necessariamente distinti) di un insieme I, può essere rappresentata come un grafo bipartito $G = (X, Y, E)$, dove: $X = \mathcal{F}$, $Y = I$, $E = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in y\}$,

cioè esiste un arco fra un elemento $A \in \mathcal{F}$ e un elemento $i \in I$ se e solo se $i \in A$.

Ad esempio, sia $I = \{a, b, c, d, e\}$ e sia $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, ..., A_5\}$, con:

$A_1 = \{b, d\}$, $A_2 = \{a, b, d\}$, $A_3 = \{b, c, e\}$, $A_4 = \{a, b\}$, $A_5 = \{a, d\}$;



La famiglia $\mathcal{F} = \{A_1, A_3, A_4, A_5\}$ evidenziata in rosso ha un SDR: ciò significa, secondo il Teorema di Hall, che si ha $|\cup_{i \in J} A_i| \geq |J|$ per ogni $J \subseteq I$ [come si vede facilmente].

La famiglia $\mathcal{F}' = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ evidenziata in arancione non ha un SRD: ciò significa, secondo il Teorema di Hall, che non si ha $|\cup_{i \in J} A_i| \geq |J|$ per ogni $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, cioè esiste un $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tale che $|\cup_{i \in J} A_i| < |J|$;

in particolare per $J = \{1, 2, 4, 5\}$ si ha $|A_1 \cup A_2 \cup A_4 \cup A_5| = 3 < 4$.

3. Teorema di Menger

Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso e siano u e w due nodi non adiacenti di G.

Dati due cammini P_{uw} e P'_{uw} da u a w, diciamo che P_{uw} è *nodo-indipendente* da P'_{uw} se gli unici nodi in comune tra i due cammini sono gli estremi u e w.

Un insieme di cammini da u a w è *nodo-indipendente* se tutti i cammini dell'insieme sono a due a due nodo-indipendenti.

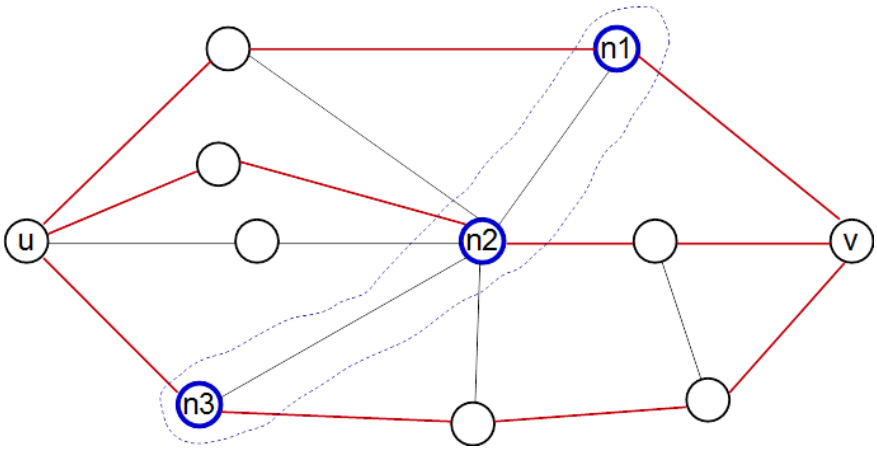
Diciamo che un sottoinsieme S di $V \setminus \{u, w\}$ *separa u e w* se ogni cammino P_{uw} da u a w contiene almeno un nodo di S.

Teorema di Menger(1927)

Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso e siano u e v due nodi non adiacenti di G.

Il massimo numero di cammini nodo-indipendenti da u a w è uguale alla cardinalità minima di un insieme di vertici che separa u da w. □

Esempio:



Nella figura sono evidenziati in blu tre nodi del grafo che corrispondono all'insieme S
che separa u e w mentre in rosso sono evidenziati 3 cammini nodo-indipendenti da u a w.
Analogamente due cammini P_{uw} e P'_{uw} sono *arco-indipendenti* se non hanno archi in comune.
Diciamo che un insieme S di archi di G *separa* u e w se ogni cammino dal nodo u al nodo w contiene almeno un arco di S.

Teorema *Siano u e v due nodi non adiacenti di un grafo G connesso, allora il massimo numero di cammini arco-indipendenti dal nodo u al nodo w è uguale al minimo numero di archi in un insieme che separa u e w.*

4. Teorema di Dilworth

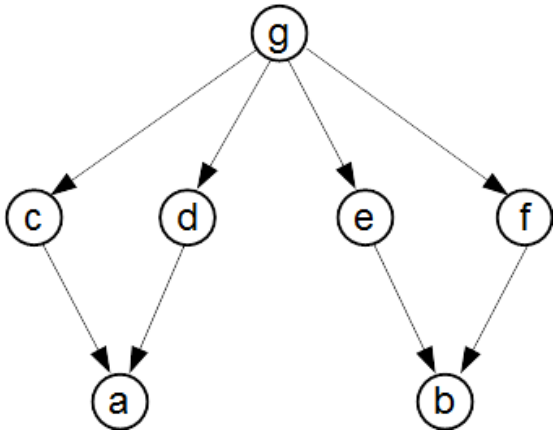
Sia P un insieme e sia $\leq$ una relazione binaria definita su P. Diremo che $(P, \leq)$ è un insieme *parzialmente ordinato* (*poset*) se valgono le seguenti proprietà:

- (*riflessiva*) per ogni $q \in P$ vale $q \leq q$;
- (*antisimmetrica*) per ogni $q, r \in P$, se $q \leq r$ e $r \leq q$, allora $q = r$;
- (*transitiva*) per ogni $q, r, s \in P$, se $q \leq r$ e $r \leq s$, allora $q \leq s$.

L'*ordine* di un poset $(P, \leq)$ è definito come la cardinalità dell'insieme P.
Due elementi $q, r \in P$ sono *comparabili* se $q \leq r$ oppure $r \leq q$.
Un elemento $q \in P$ è detto *elemento minimo* di $(P, \leq)$ se $q \leq r$ per ogni $r \in P$.
Un elemento $q \in P$ è detto *elemento minimale* di $(P, \leq)$ se non esiste un $r \in P - \{q\}$ tale che $r \leq q$ (quindi ogni elemento minimo è minimale).
Un elemento $q \in P$ è detto *elemento massimo* di $(P, \leq)$ se $r \leq q$ per ogni $r \in P$.
Un elemento $q \in P$ è detto *elemento massimale* di $(P, \leq)$ se non esiste un $r \in P - \{q\}$ tale
che $q \leq r$ (quindi ogni elemento massimo è massimale).
Si noti che un poset ha un unico elemento *minimo/massimo* (per la proprietà

antisimmetrica) e quindi ha almeno un elemento *minimale/massimale*.
Un poset può essere rappresentato tramite un grafo orientato $G = (V, A)$ con $(x, y) \in A$ se e solo se x e y sono due elementi comparabili.

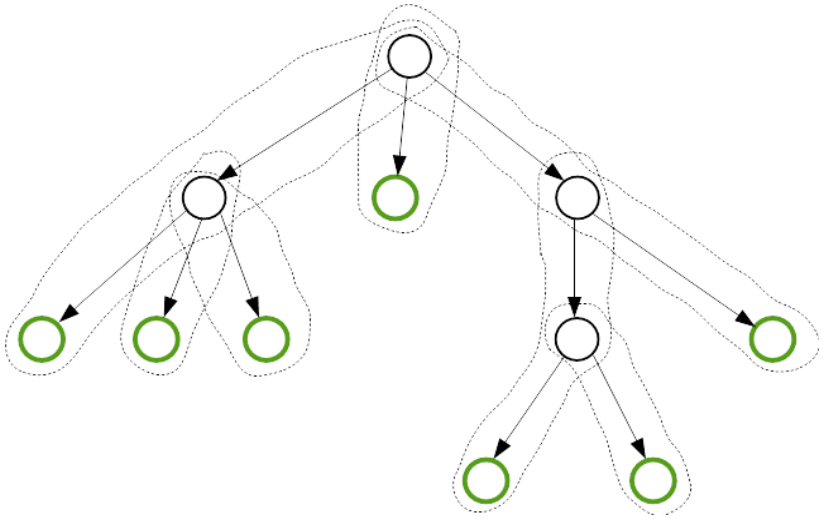
Dato un arco $(x, y) \in A$, per evidenziare ulteriormente che $x \leq y$, il nodo x viene assegnato al di sotto del nodo y.
Esempio:
$P = \{a, b, c, d, e, f, g\}$;
$\leq = \{(a, c), (a, d), (b, e), (b, f), (c, g), (d, g), (e, g), (f, g)\}$;



Dato un *poset* $(P, \leq)$ diremo che un sottoinsieme Q di P forma una *catena* se tutti gli elementi di Q sono comparabili a coppie, ovvero se per ogni $x, y \in Q$ vale $x \leq y$ oppure $y \leq x$. La cardinalità della catena è detta *lunghezza* di Q.
Un insieme C di catene *copre* P se ogni elemento di P è contenuto in almeno una delle catene in C.
Una *anti-catena* è un sottoinsieme di un poset i cui elementi sono a coppie non comparabili. La cardinalità di una anti-catena Q è detta *lunghezza* di Q.
Allo stesso modo diciamo che un insieme di anti-catene *copre* P se ogni elemento di P è contenuto in almeno una delle anti-catene in C.
Si noti che un sottoinsieme A di P è una anti-catena nel poset se e solo se l'insieme A è un insieme stabile nel grafo G corrispondente al poset.
La lunghezza massima di una anti-catena in un poset è minore o uguale al minimo numero di catene che copre P.

Teorema di Dilworth (1950) In un poset finito $(P, \leq)$, il minimo numero di catene che copre P è uguale alla massima lunghezza di una anti-catena di P.□

Esempio:



Nella figura sono evidenziate in verde 7 foglie che corrispondono a una anti-catena di lunghezza 7, mentre sono tratteggiate 7 catene che coprono il poset.

5. Teorema di Ford-Fulkerson

Una *rete* è un grafo orientato $G = (V, A)$ un grafo orientato, con $n = |V|$ nodi e $m = |A|$ archi, dove sono evidenziati due nodi, siano s detto *sorgente*, e t detto *pozzo*, tali che s ha solo archi uscenti mentre t ha solo archi entranti.

Ad ogni arco (i, j) di G è associato un numero reale non negativo u_{ij} che rappresenta la *capacità* dall'arco.

Un *flusso* da s a t in G è un vettore $x \in R^m$ che è soggetto a due vincoli:

:: *vincolo di capacità*: $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ per ogni arco (i, j);

:: *vincolo di conservazione*: per ogni nodo $k \in V \setminus \{s, t\}$, il flusso uscente da k è uguale al flusso entrante in k, cioè:

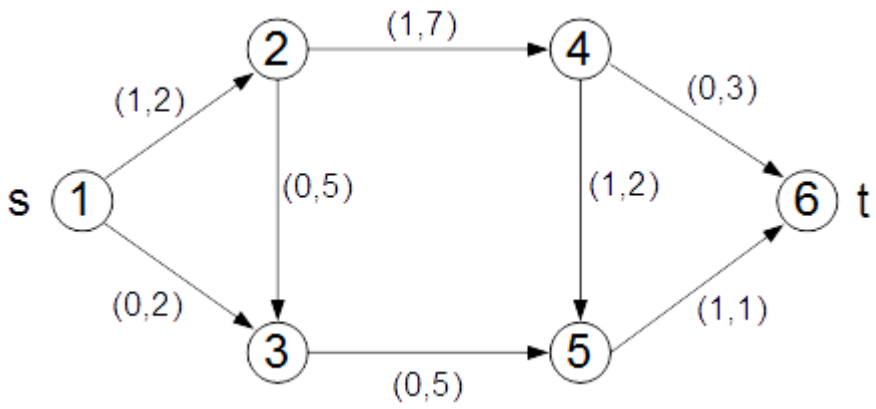
$$\sum_{(k,j)\in\delta^+(k)} x_{kj} = \sum_{(j,k)\in\delta^-(k)} x_{jk}$$

dove $\delta^+(k)$ è l'insieme degli archi di G del tipo (k, j) e $\delta^-(k)$ è l'insieme degli archi di G del tipo (j, k).

Esempio:

Nella figura sono indicate, fra parentesi, il valore del flusso x_{ij} e le capacità u_{ij}.

Ad esempio nell'arco (2,4) il flusso vale 1 e la capacità 7.



Dato un flusso x nella rete G, il *valore* v di un flusso x da s a t è dato da:

$$v = \sum_{(s,j)\in\delta^+(s)} x_{sj}$$

Nell'esempio precedente il valore del flusso è uguale a 1.

Un *taglio* di una rete $G = (V, E)$ come definita sopra è una partizione dei nodi di un grafo (o di una rete) in due sottoinsiemi, S e T, dove $T = V \setminus S$.

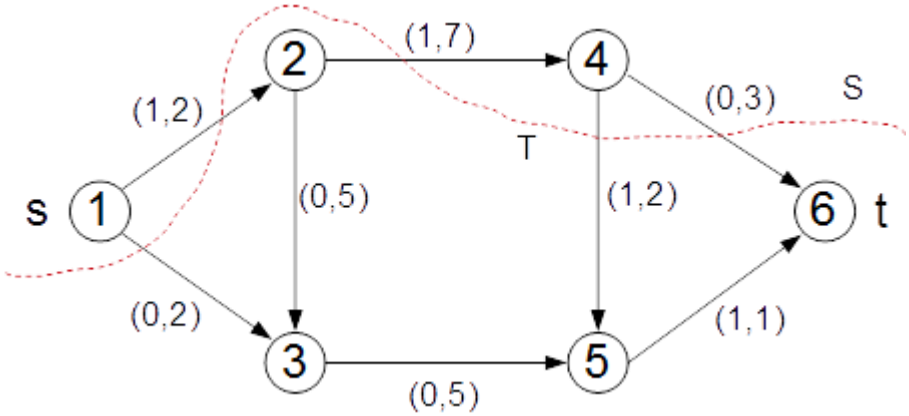
Ogni taglio determina un *insieme di taglio* formato dagli archi (i, j) tali che $i \in S$ e $j \in T$.

La *capacità di un taglio* è la somma delle capacità degli archi dell'insieme di taglio.

Denotiamo la capacità di un taglio (S, T) come $C(S,T)$ che è uguale a:

$$C(S,T) = \sum_{(i,j)\in A\,:\,i\in S, j\in T} u_{ij}$$

Esempio:



Nella figura di sopra è riportato un taglio con $S = (1,4)$ e $T = (2, 3, 5, 6)$;
$C(S, T) = \{(1, 3), (1, 2), (4, 6), (4, 5)\} = 2 + 2 + 2 + 3 = 9$;
Si noti che l'arco $(2, 4)$ non contribuisce alla capacità del taglio perché attraversa il taglio in senso opposto, cioè, ha il primo nodo in T e il secondo nodo in S.

Teorema *Sia x un flusso ammissibile di valore φ e (S, T) un taglio, allora si ha che:*

$$\varphi = \sum_{(i,j)\in\delta^+(S)} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in\delta^-(S)} x_{ij}$$

Cioè, dato un flusso è possibile associare ad ogni taglio un flusso netto che è pari alla sommatoria dei flussi uscenti da S ed entranti in T meno la sommatoria dei flussi uscenti da T ed entranti in S.

Teorema *Il valore φ di ogni flusso ammissibile x in G è minore o uguale alla capacità* $C(S, T)$ di un qualunque taglio (S, T).

$$\varphi \leq \sum_{(i,j)\in A : i\in S, j\in T} u_{ij}$$

Vale il seguente teorema.

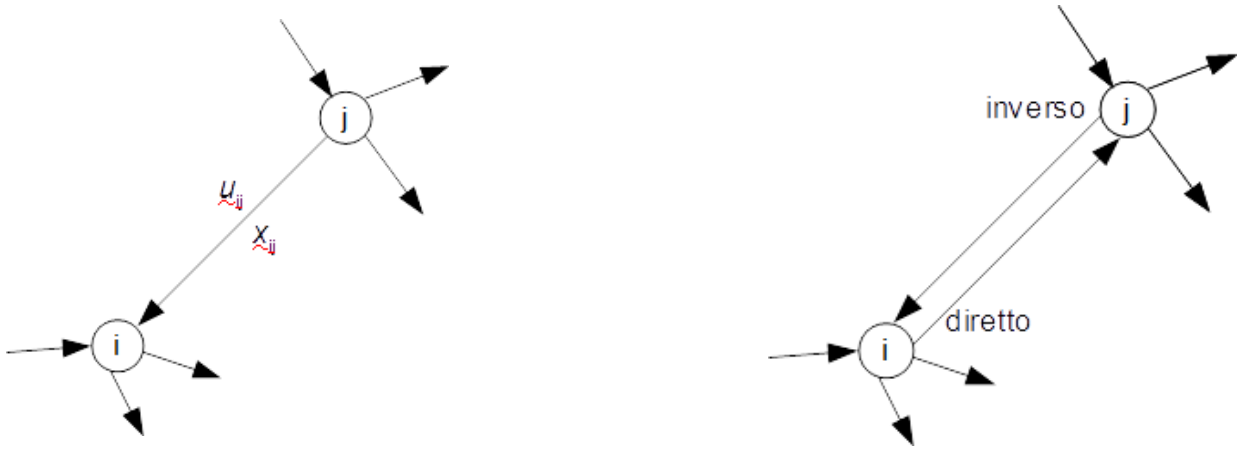
Teorema di Ford-Fulkerson(1956)

Data una rete G=(V, A), il valore massimo di un flusso in G da s a t è pari alla capacità minima di un taglio di G.

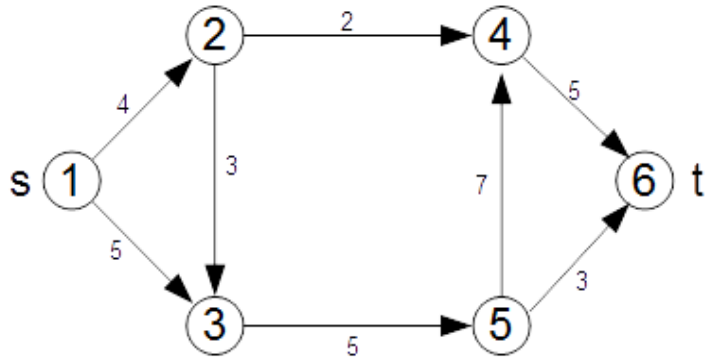
Appendice 1. Calcolo massimo flusso

Una *rete incrementale* $G' = (N, A')$ associata a un flusso x di valore φ è ottenuta dalla rete originale $G = (N, A)$ sostituendo ogni arco (i, j) con due archi:

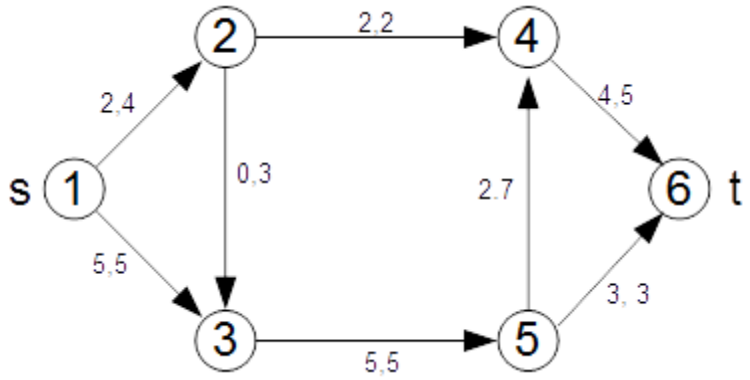
- un arco diretto (i, j) di capacità residua $\bar{u}_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$;
- un arco inverso (j, i) di capacità residua $\bar{u}_{ij} = x_{ij}$;



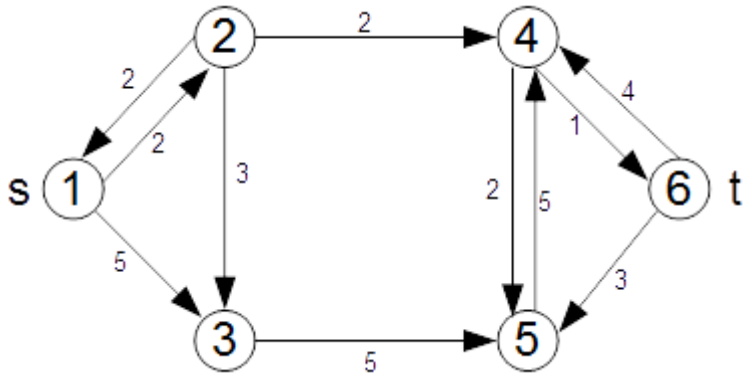
La rete incrementale ha lo scopo di aumentare il flusso sugli archi (i, j) non saturi ($x_{ij} \leq u_{ij}$) e di diminuirlo sugli archi (i, j) non scarichi ($x_{ij} \geq 0$) eliminando gli archi di capacità residua nulla.



Costruendo una rete incrementale e saturando ogni cammino aumentante, cioè un cammino da *s* a *t* in una rete incrementale, per ogni iterazione, si giunge al grafo in figura dove non è più possibile inviare un flusso di quantità maggiore.

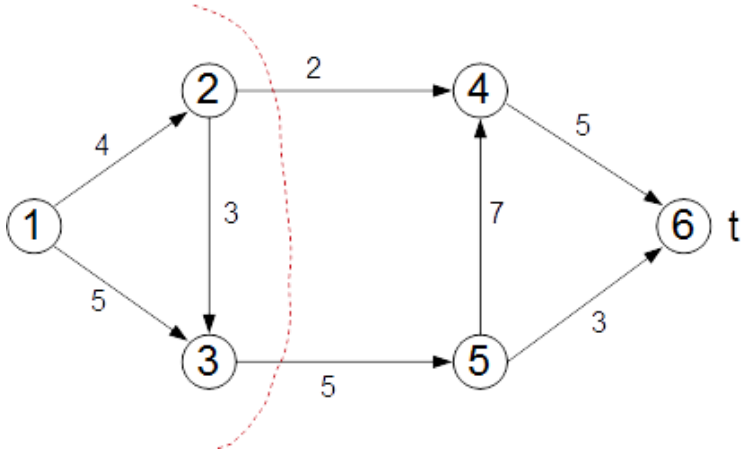


Rete incrementale finale:



In figura viene mostrato che non esiste un cammino aumentante e quindi abbiamo come flusso massimo 7, cioè, per esempio la somma dei valori dei flussi uscenti in *s*.

Un possibile taglio di capacità minima è dato dalla figura:



In cui $C(S, T) = \{(2, 4), (3, 5)\} = 2 + 5 = 7$.

Appendice 2. Corollari per reti con capacità unitaria

Lemma 1.

Sia $G = (V, A)$ una rete di capacità unitaria. Allora:

(*a*) *il valore del massimo flusso in G dalla sorgente s al pozzo t è uguale al massimo numero k di cammini arco-indipendenti dal nodo s al noto t*;

(b) *la capacità del taglio minimo in G è uguale al minimo numero h di archi in un insieme che separa s e t*;

(*c*) *il massimo numero di cammini arco-indipendenti dal nodo s al nodo t è uguale al minimo numero di archi in un insieme che separa s e t*.

Dim (a). Sia v^* il valore di un flusso massimo x^* di G. Dato che la rete ha capacità unitaria, esistono in G esattamente v^* cammini arc-indipendenti da s a t. D'altro canto, se esistono $P_1, \ldots, P_h$ cammini arco-indipendenti, allora è possibile definire un flusso f come segue:

$$f(i,j) = \begin{cases} 1 \; se\; l'arco\; (i,j)\; compare\; in\; qualche\; cammino\; arco-indipendente\; da\; s\; a\; t \\ 0\; altrimenti \end{cases}$$

allora, essendo cammini arco-indipendenti, si ha che f è un flusso e ha valore h (infatti h distinti archi uscenti da s hanno valore 1).

Dim (b). Sia $C(S, T)$ un taglio di capacità minima in G. Indichiamo con F l'insieme degli archi (i, j) di G tali che $i \in S$ e $j \in T$ che è proprio uguale a $C(S, T)$. Poiché ogni cammino dal nodo s al nodo t contiene almeno un arco in F, allora $h \leq |F|$.

Indichiamo con Z un insieme di archi di cardinalità h che separano s e t in G e con S l'insieme dei nodi i di $G–Z$ tali che esiste un cammino dal nodo s al nodo i.

Poiché $s \in S$ e $t \notin S$, l'insieme $(S, N– S)$ è un taglio di G e quindi $|F| \leq |Z| = h$.

Dim (c). Deriva direttamente da (a) e da (b) applicando il Teorema di Ford-Fulkerson. □

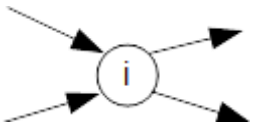
Lemma 2.

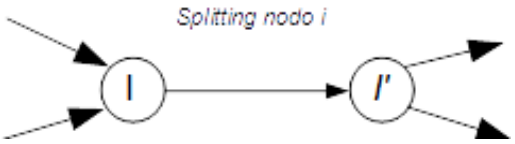
Sia $G = (N, A)$ una rete di capacità unitarie. Allora il massimo numero di cammini nodo-indipendenti dalla sorgente s al pozzo t è uguale al minimo numero di nodi in un insieme che separa s e t.

Dim. Sia $G=(V, A)$ un grafo orientato e siano u e v due nodi tali che $(u, v) \notin A$.

Costruiamo un grafo orientato G' nel seguente modo.

Ad ogni nodo i di G diverso da u e da v, associamo in G' due nodi i' e i'', e sostituiamo il nodo i con l'arco (i', i''); ad ogni arco (i, j) di G, con $i \neq u$ e $j \neq v$, associamo l'arco (i'', j'); ad ogni arco (j, i) di G, con $i \neq u$ e $j \neq v$, associamo l'arco (j'', i');





ad ogni arco (u, i) di G associamo l'arco (u, i'); ad ogni arco (j, v) di G associamo l'arco (j'', v).

Per costruzione il grafo G' ha esattamente $2n – 2$ nodi e $|A| + n – 2$ archi.

Per ogni cammino in G dal nodo u al nodo v, esiste esattamente un cammino da u a v in G';

in particolare due cammini P_{uv} in G' sono arco-indipendenti se e solo se i corrispondenti cammini in G sono nodo-indipendenti.

Quindi: il massimo numero di cammini arc-indipendenti P_{uv} in G' è uguale al massimo numero di cammini nodo-indipendenti P_{uv} in$G$; il minimo numero di archi in un insieme che separa u da v in G' è uguale al minimo numero di nodi in un insieme che separa u e v nel grafo G.

Quindi: il Lemma 1 implica il Lemma 2

□

CAPITOLO 3: RELAZIONI FRA I TEOREMI

RELAZIONE: Il Teorema di König è equivalente al Teorema di Hall.

Sia $G = (X, Y, E)$ un grafo bipartito in cui ogni arco di G è del tipo (x, y) con $x \in X$ e $y \in Y$. Sia Z un qualsiasi sottoinsieme di X. Indichiamo con $N(Z)$ l'insieme dei nodi di G che sono adiacenti a qualche nodo in Z, quindi $(N(Z) \subseteq Y)$.

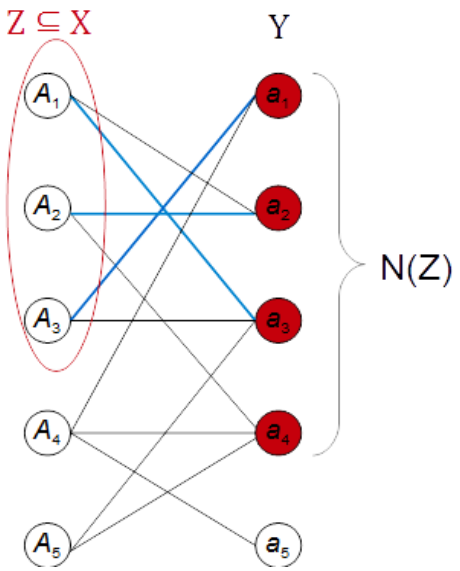
Per ottenere una relazione tra il Teorema di Hall e il Teorema di König dobbiamo rappresentare il Teorema di Hall tramite grafi bipartiti.

Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi A_x di un insieme finito Y con $x \in X$, cioè $\mathcal{F} = \{A_x : x \in X\}$ dove $A_x \subseteq Y$. Ad $\mathcal{F}$ possiamo associare il grafo bipartito $G = (X, Y, E)$ in cui $y \in A_x$ in $\mathcal{F}$ se e solo se $(x, y) \in E$.

Parentesi: dato un matching M di G, un nodo v si dice *esposto* rispetto a M se nessun arco in M incide in v; e si dice *saturato* rispetto a M altrimenti.□

Sia M un matching nel grafo bipartito $G = (X, Y, E)$ definito sopra. Diciamo che M è *X-completo* se ogni nodo in X è saturato rispetto a M.

Ogni nodo in X è saturato rispetto a M se e solo se la famiglia $\mathcal{F}$ ammette un sistema di rappresentanti distinti.



Teorema del matching Sia $G = (X, Y, E)$ grafo bipartito, allora esiste in G un *matching X-completo* se e solo se $|N(Z)| \geq |Z|$ per ogni $Z \subseteq X$.

Dim. Da un lato: Supponiamo che G ammetta un matching M che sia X-completo; sia Z un qualsiasi sottoinsieme di X; allora, dato che ogni nodo in Z è saturato rispetto ad M, si ha $|N(Z)| \geq |Z|$.
Dall'altro lato: Supponiamo che $|N(Z)| \geq |Z|$ per ogni $Z \subseteq X$, ma che G non ammetta un matching X-completo. Sia M un qualsiasi matching massimo in G. Per ipotesi esisterà un nodo x in X che è esposto rispetto ad M.
Sia S l'insieme dei nodi di G che sono connessi al nodo x da un cammino alternante rispetto ad M di lunghezza ≥ 1.
Poiché M è massimo, S non contiene nodi esposti rispetto a M, altrimenti esisterebbe un cammino aumentante rispetto ad M.
Di conseguenza si può definire $Z = (S \cap X) \cup \{x\}$ e $T = S \cap Y$.
Essendo S un cammino alternante, ogni nodo in T è connesso a ogni nodo in $Z - \{x\}$ con un arco di M, così si ha $|T| = |Z| - 1$;inoltre poiché ogni nodo in $N(Z)$ è connesso a x tramite un cammino aumentante, sia ha $T = N(Z)$. Ma se $T = N(Z)$ e $|T| = |Z| - 1$, allora si ha che $N(Z) < |Z|$, contraddicendo l'ipotesi che $|N(Z)| \geq |Z|$ per ogni $Z \subseteq X$. □

Si noti allora che:

Teorema Il Teorema di Hall è equivalente al Teorema del matching.□

Per poter dimostrare che il Teorema del matching e il Teorema di König sono equivalenti è utile riformulare il Teorema di König secondo le notazioni usate in precedenza come segue (la dimostrazione è omessa essendo abbastanza diretta, come riferimento si può vedere l'esempio usato nella spiegazione del Teorema di

König, i nodi evidenziati in giallo corrispondono esattamente all'unione di $N(Z) \cup (X - Z)$).

Teorema König-Hall Sia $G = (X, Y, E)$ un grafo bipartito. Allora:
$\beta_0(G) = \min \{ |N(Z)| + |X - Z| : Z \subseteq X\}$;
oppure
$\alpha_1(G) = \min\{ |N(Z)| + |X - Z| : Z \subseteq X \}$poiché $\alpha_1(G) \leq \beta_0(G)$ per il teorema di Gallai.

Teorema *Il Teorema di König-Hall implica il Teorema del matching.*
Dim. Sia $G = (X, Y, E)$ un grafo bipartito con $|X| \leq |Y|$. Dobbiamo provare che esiste un matching X-completo in G se e solo se $|N(Z)| \geq |Z|$ per ogni $Z \subseteq X$.
Da un lato: Supponiamo che esista in G un matching X-completo; il Teorema di König-Hall implica che per ogni $Z \subseteq X$ si ha $|X| = \alpha_1(G) \leq |N(Z)| + |X - Z| = |N(Z)| + |X| - |Z|$, e quindi $|Z| \leq |N(Z)|$; quindi $|N(Z)| \geq |Z|$ per ogni $Z \subseteq X$.
Dall'altro lato: Sia S il sottoinsieme di X per cui $\alpha_1(G) = |N(S)| + |X - S|$; allora $\alpha_1(G) \geq |S| + |X| - |S| = |X|$; quindi $\alpha_1(G) = |X|$; quindi esiste un matching X-completo in G.

Teorema*Il Teorema del matching implica il Teorema di König-Hall.*

Dim. Sia $G = (X, Y, E)$ un grafo bipartito con $|X| \leq |Y|$.
Sia S il sottoinsieme di X per cui $\beta_0(G) = |N(S)| + |X - S|$.
Sia $G_1 = (S, N(S), E_1)$ il sottografo bipartito di G indotto da $S \cup N(S)$ e sia
$G_2 = (X - S, Y - N(S), E_2)$ il sottografo bipartito di G indotto da $(X - S) \cup (Y - N(S))$.
Poiché $\beta_0(G) \leq |X| \leq |Y|$, si ha che $|N(S)| \leq |S|$(altrimenti $|N(S)| > |S|$ e allora $S \cup (X \setminus S)$ sarebbe un vertex cover di cardinalità minore di quella di $N(S) \cup (X - S)$) e che di conseguenza $|X - S| \leq |Y - N(S)|$ (dato che $|X| \leq |Y|$).
Bisogna dimostrare che esiste in G_1 un matching M_1 che è $N(S)$-completo e che esiste in G_2 un matchingM_2 che è $(X - S)$-completo.

Per assurdo assumiamo che tale matching M_1 non esista. Allora, per il Teorema del matching, esiste in $N(S)$ un insieme T tale che $|T| > |N(T)|$ dove $N(T)$ è l'insieme dei nodi di G_1 adiacenti a qualche nodo in T. Allora $|(N(S) \setminus T) \cup N(T)| < |N(S)|$. Allora si avrebbe che $C = (N(S) \setminus T) \cup N(T) \cup (X - S)$ è un vertex cover di cardinalità minore di quella di $N(S) \cup (X - S)$, una contraddizione. Quindi esiste in G_1 un matching M_1 che è $N(S)$-completo.
Analogamente si dimostra che esiste in G_2 un matching M_2 che è $(X \setminus S)$-completo.
Allora, dato che $M_1 \cup M_2$ è un matching di G di cardinalità $|N(S)| + |X - S|$, si ha che $\alpha_1(G) = \beta_0(G)$. Quindi resta così dimostrato il Teorema di König e quindi il Teorema di König-Hall (essendo essi equivalenti come osservato sopra). □

<u>RELAZIONE: Il Teorema di Dilworth implica il Teorema di König.</u>

Dim. Sia $G = (X, Y, E)$ un grafo bipartito. Bisogna dimostrare che $\beta_1(G) = \alpha_0(G)$.
Il grafo G può essere visto come un poset $(P, \leq)$, con $P = X \cup Y$, in cui per ogni coppia
$x \in X$ e $y \in Y$ risulta $x \leq y$ se e solo se $(x, y) \in E$.
Sia C un insieme di cardinalità minima di catene che coprono P e sia A una anti-catena in P di lunghezza massima.
Dato che ogni catena C è formata da al più due elementi, uno in X e l'altro in Y, si ha che C è un edge cover minimo in G e quindi che $|C| = \beta_1(G)$.
Dato che l'insieme A è un insieme stabile di cardinalità massima, si ha che $|A| = \alpha_0(G)$.
Allora per il teorema di Dilworth si ha che $\beta_1(G) = \alpha_0(G)$.□

<u>RELAZIONE: Il Teorema di König implica il Teorema di Dilworth.</u>

Dim. Sia $(P, \leq)$ un poset con $P = \{1, 2, \dots, n\}$.
Associamo a P un grafo bipartito $G = (X, Y, E)$, con $X = (x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, e con $(x_i, y_j) \in E$ se e solo se $i \leq j$.

Sia h la *lunghezza massima* di una anti-catena in P e sia k il *minimo numero* di catenenecessarie per coprire P.
In particolare si ha $k \geq h$ (come si può facilmente verificare).
Sia M un matching in G e C un qualsiasi vertex cover.
Allora si può verificare facilmente che:
-esiste una copertura di P con $n-|M|$ catene cioè con $n-\alpha_1(G)$ catene;
- esiste una anti-catena nel poset di lunghezza $n-|C|$ cioè $n-\beta_0(G)$.
Per il teorema di König $\alpha_1(G) = \beta_0(G)$.Quindi si ha $k \leq n-\alpha_1(G) = n-\beta_0(G) \leq h$.
Quindi $k = h$.

□

<u>RELAZIONE: Il Teorema di Menger implica il Teorema di König.</u>

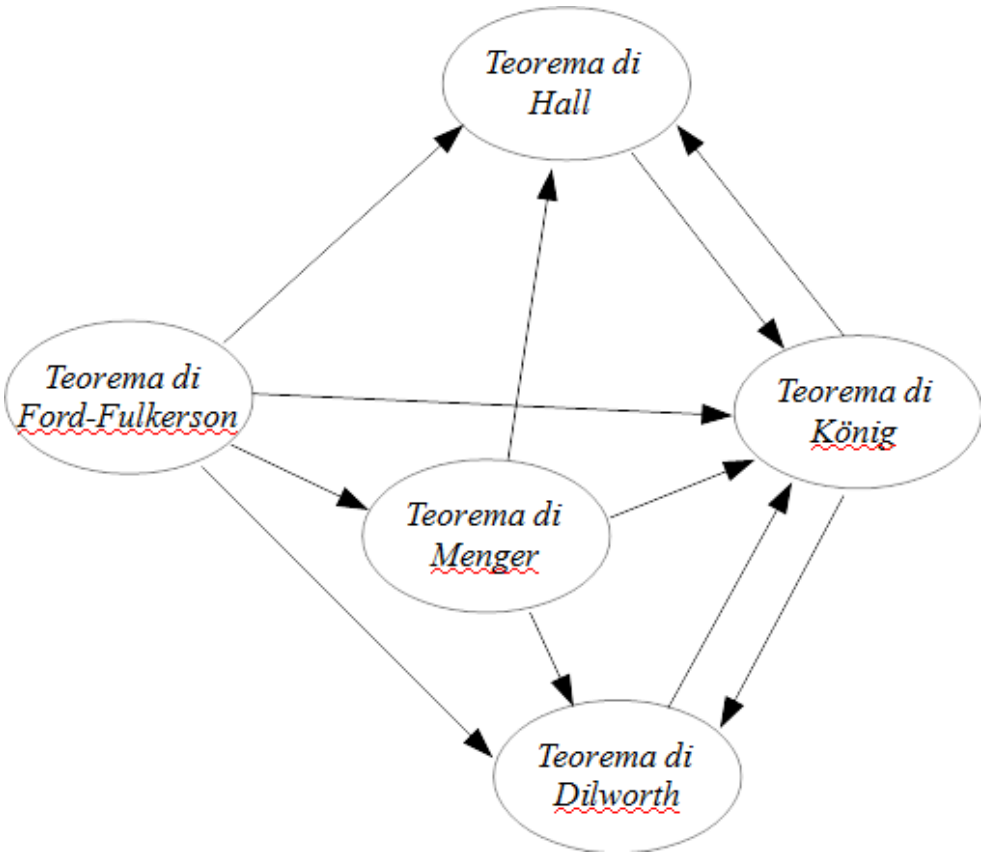
Dim. Sia $G = (X, Y, E)$ un grafo bipartito in cui $V = X \cup Y$ e siano X e Y due sottoinsiemi non vuoti e disgiunti di V. Bisogna dimostrare che $\alpha_1(G) = \beta_0(G)$.
Un cammino tra X e Y è un cammino che congiunge un nodo di X e un nodo di Y.
Un sottoinsieme S di V *separa* gli insiemi X e Y se S interseca ogni cammino tra X e Y.
Due cammini tra X e Y sono disgiunti se non hanno nodi in comune e un insieme A di cammini tra X e Y è nodo-indipendente se tutti i cammini in A sono a coppie disgiunti.
Per il Teorema di Menger il massimo numero di cammini nodo-indipendenti tra X e Y è uguale alla minima cardinalità di un insieme che separa X da Y. Poiché ad ogni cammino tra X e Y corrisponde un arco di G, è facile verificare che il massimo numero di cammini indipendenti tra X e Y è uguale a $\alpha_1(G)$, inoltre poiché ogni insieme che separa X da Y corrisponde ad un vertex cover in G allora la cardinalità minima di un insieme separante X e Y è uguale a $\beta_0(G)$,quindi $\alpha_1(G) = \beta_0(G)$.□

Dato che il Teorema di Menger implica il Teorema di König, e quindi, poiché il Teorema di König è equivalente al Teorema di Hall e al Teorema di Dilworth, allora il Teorema di Menger implica il Teorema di Hall e al Teorema di Dilworth.

RELAZIONE: Il Teorema di Ford-Fulkerson implica il Teorema di Menger.

Dim. Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso e siano s e t due nodi non adiacenti in G.
Associamo a G il seguente grafo orientato:
$G' = (V, E')$ in cui $E' = \{(i, j), (j, i) : (i, j) \in E\}$, cioè sostituendo ogni arco non orientato con una coppia di archi orientati (in diverse direzioni).
Assumiamo che $G' = (V, E)$ sia una rete, con sorgente s e pozzo t, e che abbia capacità unitaria. Per il Lemma 2, il massimo numero di cammini nodo-indipendenti in G' dalla sorgente s al pozzo t è uguale al minimo numero di nodi in un insieme che separa s e t.
Allora il massimo numero di cammini nodo-indipendenti in G da s a t è uguale alla cardinalità minima di un insieme di vertici che separa s da t.□

RIEPILOGANDO



CONCLUSIONI

Questa tesi riporta – con rielaborazione – alcuni risultati min-max in Ottimizzazione Combinatoria con riferimento al lavoro [1]. I risultati min-maxriportati sono noti in letteratura con il nome di teoremi “Mengeriani” oppure teoremi di matching.

Essi sono:

1. Teorema di König
2. Teorema di Hall
3. Teorema di Dilworth
4. Teorema di Menger
5. Teorema di Ford-Fulkerson

In particolare abbiamo visto come tali teoremi, pure essendo stati introdotti in letteratura in modo indipendente fra loro, sono strettamente legati fra loro tramite implicazioni.

Per concludere, evidenziamo che tali teoremi sembrano avere rilevanza nella applicazioni, come riportato brevemente di seguito.

Il Teorema di König e il Teorema di Hall riguardano (in modo diretto o indiretto) i grafi bipartiti, i quali sono usati in varie applicazioni come ad esempio nei "problemi di assegnamento"; in letteratura ad esempio il Teorema di Hall è conosciuto anche come il 'Teorema dei matrimoni", in cui si vuole trovare un sistema di rappresentanti distinti per un insieme di uomini rispetto a un insieme di donne.

Il Teorema di Menger e il Teorema di Ford-Fulkerson riguardano le reti, che nelle applicazioni possono essere intese come reti di comunicazioni, reti sociali, ecc..., focalizzando parametri e proprietà che riguardano la connessione (che in termini applicativi può essere riferita alla fragilità/robustezza) di una rete.

Bibliografia

[1] C. De Simone (1997), "*Some min-maxresults in combinatorialoptimization*", Istituto di Analisi dei Sistemi e Informatica-CNR, Roma.

[2] R. Baldacci, M. Dell'Amico (2002), "*Fondamenti di ricerca operativa*", Pitagora Editrice, Bologna.

[3] B. Korte, J. Vygen (2011), "*Ottimizzazione Combinatoria, Teoria e Algoritmi*", Springer-Verlag,Berlin.

[4] M.Fischetti (1999), "*Lezioni di Ricerca Operativa*", Edizioni libreria progetto, Padova.

[5] T.Harju (2011), "*Lecture notes on Graph Theory*", Department of Mathematics, Turku.

Ringraziamenti

I miei più sentiti ringraziamenti vanno al professor Raffaele Mosca, relatore di questa tesi, che oltre ad avermi guidato alla stesura della stessa, ha reso possibile sviluppare un lavoro interessante e stimolante per il percorso di studi da me affrontato.

Vorrei inoltre ringraziare tutto il corpo docenti per la professionalità e la disponibilità mostratami durante questi anni e non meno importante la mia famiglia per avermi permesso di affrontare questa esperienza lontano da casa.