ESERCIZI foglio 3
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II, a.a. 2021/22
Prof.ssa Claudia Ceci

1.
Un'azione che non paga dividendi ha un tasso di rendimento atteso (annuo) del 5% e una volatilitá (annua) pari al 18%. Il tasso d'interesse privo di rischio é del 3% annuo. Oggi il prezzo dell'azione é di 25$. Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirá un derivato, con scadenza $T = 9$ mesi, che pagherá alla scadenza $f(S_T) = \frac{1}{5}(S_T)^{3/2}$ ove S_T é il prezzo dell'azione sottostante al tempo T. Utilizzando la valutazione neutrale verso il rischio calcolare:
a) il prezzo del derivato oggi e il prezzo $v(t, x)$ del derivato al tempo t se $S_t = x$.
b) Un investitore ha venduto il derivato, quante azioni deve avere nel portafoglio di copertura all'istante $t = 0$?
c) Verificare che $v(t, x)$ verifica l'equazione di valutazione di Black & Scholes.

2.
Un titolo che non paga dividendi ha un tasso di rendimento atteso (annuo) del 6% e una volatilitá (annua) pari al 30%. Il tasso d'interesse privo di rischio é del 2% annuo. Oggi il prezzo dell'azione é di 50$. Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirá un derivato, con scadenza $T = 9$ mesi, che pagherá alla scadenza $F(S_T) = F_1(S_T) + F_2(S_T)$ con $F_1(S_T) = \ln(S_T)$ e $F_2(S_T) = 10I_{\{S_T>52\}}$, dove S_T é il prezzo dell'azione sottostante al tempo T.
a) Utilizzare la valutazione neutrale verso il rischio per calcolare il prezzo del derivato oggi ed il prezzo $v(t, x)$ del derivato al tempo t se $S_t = x$.
b) Se l'istituzione ha venduto 1000 derivati di payoff F_1 quante azioni deve acquistare/vendere al tempo $t = 0$ per coprirsi dal rischio?

3. Un titolo che non paga dividendi ha un tasso di rendimento atteso (annuo) del 5% e una volatilitá (annua) pari al 18%. Il tasso d'interesse privo di rischio é del 2% annuo. Oggi il prezzo dell'azione é di 30$.
a) Calcolare la probabilitá che tra 6 mesi il prezzo S_T abbia valori in $[28, 32]$.
b) Determinare con la formula di Black & Scholes il prezzo di una call c_0 con maturitá 6 mesi, prezzo di esercizio $K = 31$$.
c) Tracciare il grafico del payoff finale di $F(S_T) = (S_T^2 - K^2)_+$ in funzione del prezzo dell'azione sottostante S_T al tempo T e confrontarlo con quello della call.
d) Applicare la formula di Ito o la formula esplicita del prezzo dell'azione nel modello Black & Scholes per mostrare che S^2 é un moto browniano geometrico. Determinare il suo tasso di rendimento atteso e la sua volatilitá.
e) Determinare il prezzo f_0 del derivato con scadenza $T = 6$ mesi, che pagherá alla scadenza $F(S_T) = (S_T^2 - K^2)_+$ (call scritta su S^2 con prezzo di esercizio K^2) dove S_T é il prezzo dell'azione sottostante al tempo T.
f) Confrontare i valori c_0 e f_0, i valori sono coerenti con i grafici tracciati al punto c)?