5. VALUTAZIONE DI DERIVATI NEL MODELLO BLACK & SCHOLES

- Introduzione ai derivati
- Relazione di parità put-call
- Strategie di investimento autofinanzianti, equazione di valutazione di Black & Scholes
- Valutazione neutrale al rischio
- Formule per il prezzo della call e della put

Introduzione ai derivati

- Un derivato è un contratto finanziario il cui payoff ad una data futura T dipende dal valore di un sottostante : $F(S_T)$

Per esempio S_T è il valore di una azione al tempo T

Esistono derivati con sottostanti indici azionari, valute, merci ed anche beni non scambiati sui mercati come i derivati energetici

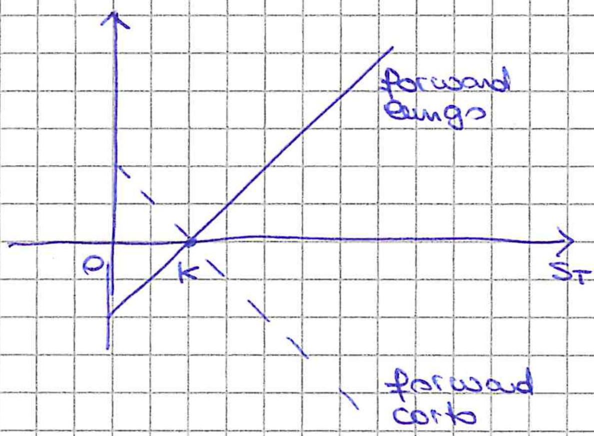
I più semplici contratti derivati sono i futures e i forward (contratti a termine):
i contraenti sono obbligati ad acquistare/vendere l'attività sottostante ad una data futura T e ad un prezzo di consegna concordato all'atto di stipula. Posizione lunga : acquista
Posizione corta : vende
I contratti forward sono negoziati Over the Counter OTC mentre i futures nei mercati regolamentati, e questo consente di onorare il contratto ogni giorno ed evitare che ci siano insolvenza.
Esempi di futures e forwards sono su merci e valute.

Le opzioni sono contratti derivati che attribuiscono al detentore il diritto di acquistare (call) o vendere (put) un'attività sottostante ad una data futura ed ad un prezzo prefissato, K ("strike price" - prezzo di esercizio)

Entrare nei contratti forward/future non costa nulla mentre per acquistare una call e una put si deve sostenere un costo iniziale c e p.

Payoff call $F(S_T) = (S_T - K)_+ = \begin{cases} S_T - K & \text{se } S_T > K \\ 0 & \text{se } S_T \le K \end{cases}$ la call viene esercitata

Payoff put $F(S_T) = (K - S_T)_+ = \begin{cases} K - S_T & \text{se } S_T < K \\ 0 & \text{se } S_T \le K \end{cases}$ la put viene esercitata

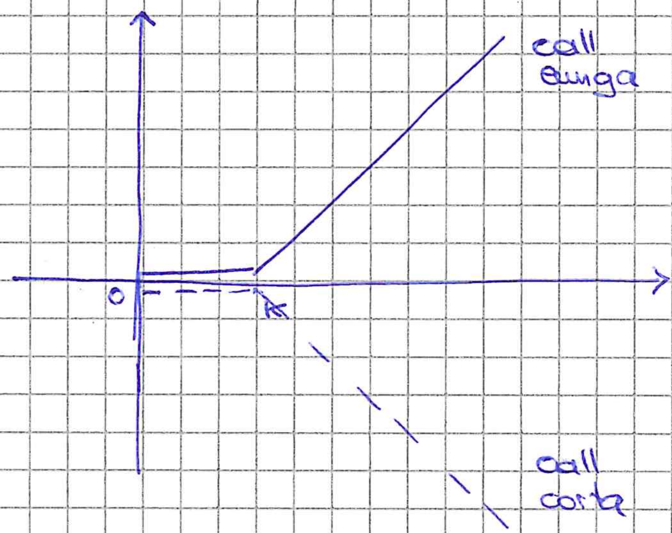


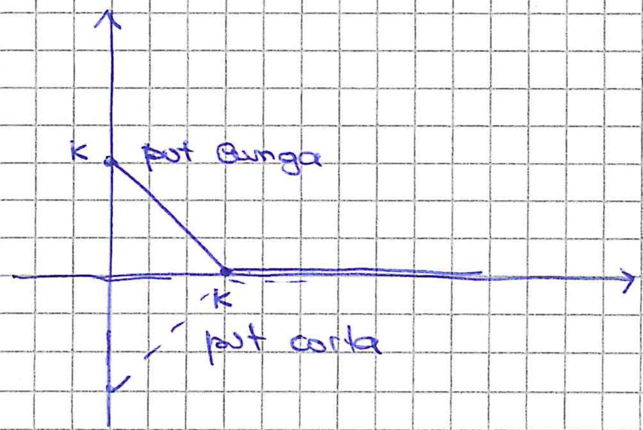
Payoff forward lungo

$F(S_T) = S_T - K$

forward corto

$-(S_T - K) = K - S_T$





Il nostro scopo è di calcolare il prezzo di un derivato (in qualsiasi istante precedente alla maturità) che non permetta arbitraggi sul mercato, ossia profitti privi di rischio.

2bis

Ipotesi di mercato: ∄ costi di transizione - Assenza di opportunità di arbitraggio - il denaro viene preso e dato in prestito allo stesso tasso d'interesse r costante (tasso istantaneo di interesse)

Relazione di parità put-call: $\boxed{p + S_0 = c + K e^{-rT}}$

Consideriamo due portafogli

P_A: 1 call + 1 somma $\qquad P_B$: 1 put + 1 azione

$$V_T(P_A) = (S_T - K)_+ + K e^{-rT} e^{rT} = (S_T-K)_+ + K = \begin{cases} S_T - K + K = S_T & \text{se } S_T > K \\ K & \text{se } S_T \le K \end{cases} \Rightarrow V_T(P_A) = \max(S_T, K)$$

$$V_T(P_B) = (K - S_T)_+ + S_T = \begin{cases} S_T & \text{se } S_T > K \\ K - S_T + S_T = K & \text{se } S_T \le K \end{cases} \Rightarrow V_T(P_B) = \max(S_T, K)$$

In AOA $\quad V_T(P_A) = V_T(P_B) \Rightarrow V_0(P_A) = V_0(P_B)$ ossia $c + K e^{-rT} = p + S_0$

Vediamo che se $p + S_0 > c + K e^{-rT}$ si aprirebbe un arbitraggio: acquistiamo la call e vendiamo la put e l'azione allo scoperto, ~~per fare ciò prendiamo~~ incassiamo $p + S_0 - c$ che investiamo al tasso r

al tempo T $\quad \underbrace{\text{call lunga + put corta}}$

acquistiamo l'azione al prezzo K e chiudiamo la posizione allo scoperto

$$(S_T - K)_+ - (K - S_T)_+ = \begin{cases} S_T - K & \text{se } S_T > K \\ S_T - K & \text{se } S_T \le K \end{cases} = (S_T - K)$$

acq. l'azione al prezzo K

$$(p + S_0 - c) e^{rT} - K > 0$$ perché per ipotesi $p + S_0 - c > K e^{-rT}$.

Se fosse $p + S_0 < c + K e^{-rT}$ si avrebbe il seguente arbitraggio: acquistiamo la put + l'azione e vendiamo la call: questo richiede il prestito di $p + S_0 - c$ al tasso r

al tempo T $\quad$ call corta + put lunga

$$-(S_T - K)_+ + (K - S_T)_+ = \begin{cases} -(S_T - K) & \text{se } S_T > K \\ -(S_T - K) & \text{se } S_T \le K \end{cases} = K - S_T$$

vendiamo l'azione al prezzo K

$$\underset{\text{vendiamo l'azione}}{K} - \underbrace{(p + S_0 - c) e^{rT}}_{\text{restituiamo il prestito}} > 0$$ perché per ipotesi $p + S_0 - c < K e^{-rT}$.

Valutazione dei derivati nel modello Black & Scholes (Pascucci cap. 7) p. 263

$dB_t = r B_t \, dt \qquad \frac{dB_t}{B_t} = r\,dt \qquad \int_0^t \frac{1}{B_r} dB_r = \int_0^t r\, dr = rt$

$\log(B_r)\Big|_0^t = \log(B_t) - \log B_0 = rt \qquad \log\left(\frac{B_t}{B_0}\right) = rt \qquad \frac{B_t}{B_0} = e^{rt} \qquad B_t = B_0 e^{rt}$

posto $B_0 = 1$

$B_t = e^{rt} \iff \begin{cases} dB_t = r B_t \, dt \\ B_0 = 1 \end{cases}$ Titolo non rischioso (bond)

$\begin{cases} dS_t = S_t (\mu \, dt + \sigma \, dW_t) \\ S_0 > 0 \end{cases}$ titolo rischioso

- Derivato con payoff finale $F(S_T)$, per esempio

call $F(S_T) = (S_T - K)_+ = \begin{cases} S_T - K & \text{se } S_T > K \\ 0 & \text{se } S_T < K \end{cases}$

T maturità
K prezzo d'esercizio

put $F(S_T) = (K - S_T)_+ = \begin{cases} K - S_T & \text{se } S_T < K \\ 0 & \text{se } S_T > K \end{cases}$

Def. Una strategia è un processo stocastico $h_t = (\alpha_t, \beta_t)$

con $\alpha_t \in \mathbb{L}^2$ e $\beta_t \in \mathbb{L}^1$

$\left(\mathbb{E}\int_0^T \alpha_t^2 \, dt < \infty\right) \quad \left(\mathbb{E}\int_0^T |\beta_t| \, dt < \infty\right)$

α_t quota di S_t nel portafoglio
β_t " " B_t nel portafoglio

valore del portafoglio $V_t^h = \alpha_t S_t + \beta_t B_t$

α, β possono assumere anche valori negativi, cioè è ammessa la vendita allo scoperto e denaro in prestito. Inoltre $\beta_t = \dfrac{V_t^R - \alpha_t S_t}{B_t}$

Def. Diciamo che la strategia R è ~~autofinanziante~~ autofinanziante se vale

$$\boxed{dV_t^R = \alpha_t \, dS_t + \beta_t \, dB_t}$$

Questa relazione esprime il fatto che la variazione istantanea del valore del portafoglio è dovuta al movimento dei prezzi dei titoli e non ad un intervento esterno in cui si è aggiunta liquidità. Osserviamo che si può anche scrivere: $\boxed{dV_t^R = \alpha_t \, dS_t + r(V_t^R - \alpha_t S_t)\, dt}$

~~Poniamo~~

$$\tilde{S}_t := e^{-rt} S_t \quad \text{prezzo scontato}$$

$$\tilde{V}_t^R := e^{-rt} V_t^R \quad \text{portafoglio scontato}$$

Proposizione: Una strategia $R_t = (\alpha_t, \beta_t)$ è autofinanziante $\iff$ $d\tilde{V}_t^R = \alpha_t \, d\tilde{S}_t$

dim. $d\tilde{V}_t^R = -r e^{-rt} V_t^R \, dt + e^{-rt} dV_t^R = -r \tilde{V}_t^R dt + e^{-rt}(\alpha_t \, dS_t + \beta_t \underbrace{dB_t}_{r B_t dt})$

e $\beta_t B_t = V_t^R - \alpha_t S_t \Rightarrow$

$$d\tilde{V}_t^R = -r \tilde{V}_t^R \, dt + e^{-rt}(\alpha_t \, dS_t + (r(V_t^R - \alpha_t S_t)\, dt)) =$$

$$= -r \tilde{V}_t^R \cancel{dt} + r \cancel{\tilde{V}_t^R} \, dt + \underbrace{e^{-rt} \alpha_t \, dS_t - \alpha_t r e^{-rt} S_t \, dt}_{\alpha_t (e^{-rt} dS_t - r e^{-rt} S_t \, dt)} = \alpha_t \, d\tilde{S}_t$$

d'altro canto:

$d\tilde{S}_t = -r e^{-rt} S_t \, dt + e^{-rt} dS_t$ $\square$

Osserviamo che: $d\tilde{S}_t = (\mu - r)\tilde{S}_t \, dt + \sigma \tilde{S}_t \, dW_t$

Strategie markoviane

Def. $\pi_t = (\alpha_t, \beta_t)$ con $\alpha_t = \alpha(t, S_t)$ $\beta_t = \beta(t, S_t)$ $\alpha, \beta \in C^{1,2}([0,T) \times [0,+\infty))$

$\Rightarrow$ $V_t^\pi = \alpha(t, S_t) S_t + \beta(t, S_t) \cdot e^{rt} = f(t, S_t)$

Teorema 1

Sia $\pi = (\alpha_t, \beta_t)$ un portafoglio markoviano e $V_t^\pi = f(t, S_t)$ il valore del portafoglio al tempo t. Le seguenti affermazioni sono equivalenti

(i) π è autofinanziante

(ii) f è soluzione dell'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,s) + r s \frac{\partial f}{\partial s}(t,s) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s) - r f(t,s) = 0$$

e vale la relazione $\alpha(t,s) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,s)$

Dim. Mostriamo che (i) $\Rightarrow$ (ii)

Dalla formula di Itô:

$$\boxed{dV_t^\pi = df(t, S_t) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t, S_t) \right\} dt + \frac{\partial f}{\partial s}(t, S_t)\, dS_t} \qquad (1)$$

V_t^π è autofinanziante se

$$dV_t^\pi = \alpha(t, S_t)\, dS_t + \beta(t, S_t) \underbrace{dB_t}_{B_t r\, dt}$$

$\cancel{\alpha(t,S_t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,S_t)}$

ricordiamo che $\quad V_t^q = \alpha(t,S_t)\cdot S_t + \beta(t,S_t)B_t \qquad \beta(t,S_t)B_t = V_t^q - \alpha(t,S_t)S_t$

$$\Rightarrow dV_t^q = \alpha(t,S_t)\,dS_t + r\,(V_t^q - \underbrace{\alpha(t,S_t)S_t}_{\frac{\partial f}{\partial t}(t,S_t)\cdot S_t})\,dt \qquad (2)$$

Confrontando (1) e (2)

$\Rightarrow$

$$\alpha(t,S_t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,S_t)$$

$$r(V_t^q - \alpha(t,S_t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,S_t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,S_t) + r\,f(t,S_t) + r\,S_t\,\frac{\partial f}{\partial s}(t,S_t) = 0$$

$\Rightarrow$ eq. diff. deterministica

poiché S_t è una v.c. con densità strettamente positiva su $(0,+\infty)$ e g funzione continua

allora $\quad g(S_t) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(s) = 0 \quad \forall\, s \in (0,+\infty)$

$*$ $\boxed{\begin{array}{l} g(S_t)\,\mathbb{1}_{(S_t\in(a,b))} = 0 \\ \Rightarrow \mathbb{E}[g(S_t)\,\mathbb{1}_{(S_t\in(a,b))}] = 0 \\ \int_a^b g(x)\,\underset{\vee\atop 0}{f_{S_t}(x)}\,dx = 0 \quad \forall a<b \\ \quad \Rightarrow g(x) = 0 \end{array}}$

Viceversa $\quad$ (ii) $\Rightarrow$ (i)

Dalla formula di Itô abbiamo (1) e poiché f è soluzione delle eds

$$\Rightarrow dV_t^q = (r V_t^q - r S_t \underbrace{\frac{\partial f}{\partial s}}_{\alpha_t})\,dt + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial s}}_{\alpha_t}\,dS_t = \alpha_t\,dS_t + r\,(\underbrace{V_t^q - \alpha_t S_t}_{\beta_t B_t})\,dt = \alpha_t\,dS_t + \beta_t\,dB_t$$

$\square$

$r B_t\,dt = dB_t$

Prezzo d'arbitraggio = valore di una strategia replicante autofinanziante

Def. Mercato completo se per ogni derivato esiste una strategia autof. che lo replica.

La definizione è ben posta se tutte le strategie replicanti hanno lo stesso valore (pb dell'assenza di arbitraggio) di prezzo d'arbitraggio

Completezza $\Leftrightarrow$ unicità ed esistenza di una misura martingala | Unico prezzo

AOA $\Leftrightarrow$ $\nexists$ strat. autof. V^{φ}: $\begin{cases} V^{\varphi}(0)=0 \text{ e } V^{\varphi}_T \geq 0 \text{ con } \langle P=1 \rangle \\ \text{e } P(V^{\varphi}_T > 0) > 0 \end{cases}$ | Def. di opportunità d'arbitraggio

Teorema 2

Se mercato di B e S è completo e libero da arbitraggi, nel senso che ogni derivato europeo di payoff $F(S_T)$ ammette un'unica strategia autofinanziante che lo replica,

$\exists!\ \varphi_t = (\alpha_t, \beta_t)$ $\qquad \alpha_t = \frac{\partial f}{\partial S}(t, S_t) \qquad \beta_t = e^{-rt}\left\{f(t,S_t) - S_t \frac{\partial f}{\partial S}(t,S_t)\right\}$

ove f è l'unica soluzione del pb di Cauchy

$$(Pb) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rf = 0 & (t,S) \in [0,T) \times (0,+\infty) \\ f(T,S_T) = F(S_T) \end{cases}$$

EDP di Black & Scholes (nota come EDP di valutazione)

Inoltre $V_t^{\varphi} = f(t,S_t)$ è il valore del portafoglio replicante e coincide con il valore del derivato al tempo t.

Proposizione [Valutazione Neutrale al rischio]

Sotto opportune ipotesi di regolarità su $F(x)$ si può dimostrare che la EDP di Black & Scholes ammette una unica soluzione $f(t,x)$ e vale la seguente rappresentazione:

$$\boxed{f(t,x) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{Q}[\, F(S_T) \mid S_t = x]}$$

ove Q è la misura di probabilità : $\quad dS_t = S_t\,(r\,dt + \sigma\, dW_t^{Q})$

$\{W_t^Q\}_{t\geq 0}$ moto browniano rispetto a Q

In particolare il valore del derivato oggi è:

$$f_0 = f(0, S_0) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}[F(S_T)] .$$

Osservazioni: Q è detta misura neutrale al rischio in quanto il rendimento atteso dell'azione coincide con il tasso d'interesse privo di rischio, ossia

$$\mathbb{E}^{Q}[S_t] = S_0 e^{rt} \quad \forall t$$

Q è detta anche misura martingala equivalente

in quanto $Q \sim P$ (equivalente) $\quad Q(A)=0 \iff P(A)=0$

e $\quad \tilde{S}_t = S_t e^{-rt}$ prezzo scontato è una martingala, ossia

$$\forall t \geq s \quad \mathbb{E}^{Q}[\, \tilde{S}_t \mid \mathcal{F}_s] = \tilde{S}_s \qquad \iff \qquad \mathbb{E}^{Q}[\, S_t \mid \mathcal{F}_s] = S_s e^{r(t-s)}$$

Infatti $\quad \tilde{S}_t = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t^Q} e^{-rt} = S_0 \underbrace{e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t^Q}}_{\text{mg esponenziale}}$

REMARK
Osserviamo che se costruiamo un portafoglio in una posizione lunga in α_t azioni e corta nel derivato, autofinanziante e che sia priva al rischio

$$V(t,S_t) = \alpha_t S_t - f(t,S_t)$$ allora $f(t,x)$ risolve l'Eq. di valutazione di B&S.

Infatti,
imponendo che sia autofinanziante: $dV(t,S_t) = \alpha_t \cdot dS_t - df(t,S_t)$ e applicando Itô a $f(t,S_t)$

$$dV(t,S_t) = \alpha_t \cdot dS_t - \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(t,S_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,S_t)\cdot \sigma^2 S_t^2 \right\} dt - \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)\cdot dS_t$$

Affinché sia privo di rischio: $\alpha_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t,S_t)$

inoltre in Assenza di opportunità d'arbitraggio: $dV(t,S_t) = r\,V(t,S_t)\,dt$

deve avere rendimento pari ad r

$$\Rightarrow \quad -\left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(t,S_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,S_t)\,\sigma^2 S_t^2 \right\} dt = r \left\{ \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)\cdot S_t - f(t,S_t)}^{V(t,S_t)} \right\} dt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t,S_t) + r S_t \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,S_t) - r f(t,S_t) = 0$$

ritroviamo Eq. di val. di B&S

REMARK $\alpha_t = \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)$ con $f(t,x)$ sol. della EDP di B&S (Strategie Δ-hedging)

allora il portafoglio con $\frac{\partial f}{\partial t}(t,S_t)$ azioni e corto sul derivato è privo di rischio

Formula per la call e la put

$$F(S_T) = (S_T - K)^+$$

$$f_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^{Q}[(S_T - K)^+] = e^{-rT} \mathbb{E}^{Q}\left((S_T - K)\mathbb{1}_{(S_T > K)} \right] = e^{-rT} \left\{ \mathbb{E}^{Q}[S_T \mathbb{1}_{(S_T > K)}] - K\,Q(S_T > K) \right\}$$

$$Q(S_T > K) = Q\left(S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T} > K \right) = Q\left(\left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T > \lg(K/S_0) \right) =$$

$$= Q\left(\sigma\sqrt{T} N > \lg(K/S_0) - \left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)T \right) = Q\Bigg(N > \underbrace{\frac{\lg(K/S_0) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}}_{-d_2} \Bigg) = Q\Bigg(N < \underbrace{\frac{\lg(S_0/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}}_{= d_2} \Bigg)$$

$$= \Phi(d_2) \qquad d_2 = \frac{\lg(S_0/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$\mathbb{E}^{Q}[S_T \mathbb{1}_{(S_T > K)}] = \mathbb{E}^{Q}[S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^{Q}} \mathbb{1}_{(S_T > K)}] = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T} \underbrace{\mathbb{E}[e^{\sigma\sqrt{T} N} \mathbb{1}_{(N > -d_2)}]}_{} =$$

$$\int_{-d_2}^{+\infty} e^{\sigma\sqrt{T} x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx =$$

$$= \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x^2 - 2\sigma\sqrt{T}x)}{2} + \sigma^2 T - \sigma^2 T} dx =$$

$$= \int_{-d_2}^{+\infty} e^{+\frac{\sigma^2}{2}T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \sigma\sqrt{T})^2}{2}} dx$$

$$= e^{+\frac{\sigma^2}{2}T} Q(Z > -d_2) = e^{+\frac{\sigma^2}{2}T} Q(N > -d_2 - \sigma\sqrt{T})$$

$$= e^{\frac{\sigma^2}{2}T} Q(N > -d_1)$$

$$= e^{\frac{\sigma^2}{2}T} Q(N < d_1)$$

$$Z \sim \mathcal{N}(\sigma\sqrt{T}, 1)$$

$$Z = \sigma\sqrt{T} + N$$

$$f_0 = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T} e^{\frac{\sigma^2}{2}T} \cdot e^{-rT} Q(N < d_1) + K e^{-rT} Q(N < d_2)$$

$$d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T} = \frac{\lg(S_0/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} =$$

$$\boxed{d_1 = \frac{\lg(S_0/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}}$$

$$\boxed{C_0 = S_0 \Phi(d_1) + K e^{-rT} \Phi(d_2)}$$

$$p_0 = e^{-rT}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(K-S_T)_+] = e^{-rT} K\,\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{(S_T<K)}]}_{\Phi(-d_2)} - e^{-rT}\,\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T\,\mathbb{1}_{(S_T<K)}]}_{e^{rT} S_0\,\Phi(-d_1)}$$

$$\boxed{p_0 = K e^{-rT}\,\Phi(-d_2) - S_0\,\Phi(-d_1)}$$

$$p_0 + S_0 = c_0 + K e^{-rT}$$

oppure si ricava con la relazione di parità: $p(t,x) + x = c(t,x) + K e^{-r(T-t)}$

Analogamente si ricava il prezzo della call e di una put al tempo t se $S_t = x$

$$c(t,x) = e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}((S_T-K)_+ \mid S_t = x) = x\,\Phi(d_1(t,x)) - K e^{-r(T-t)}\,\Phi(d_2(t,x))$$

$$p(t,x) = e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}((K-S_T)_+ \mid S_t = x) = K e^{-r(T-t)}\,\Phi(-d_2(t,x)) - x\,\Phi(-d_1(t,x))$$

ove $d_1(t,x) = \dfrac{\log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ e $d_2(t,x) = d_1(t,x) - \sigma\sqrt{T-t}$

Approfondimento

- Nel caso in cui l'azione offre dei dividendi con rendimento costante (composto continuamente q) ossia nel periodo infinitesimale viene pagato un dividendo pari a $q S_t\,dt$

allora la condizione di autofinanziamento diventa:

$$dV_t = \alpha_t\,(dS_t + q S_t\,dt) + \beta_t\,dB_t$$

e di conseguenza l'eq. di valutazione associata si scrive come

	$t=0$	t
Senza reddito	S_0	S_t
con "dividend yield" q	S_0	$S_t e^{qt}$
	$S_0 e^{-qt}$	$\to S_t$

[q è detto "dividend yield"]