4

- L'integrale di Itô
- La formula di Itô: applicazioni alla dinamica del prezzo dell'azione nel modello Black & Scholes
- Integrale di Itô di funzioni deterministiche

IV

Cenni sull'integrale di Itô (Pascucci p.194)

- Si può dimostrare che le traiettorie del moto browniano non sono derivabili, quindi non siamo in grado di definire $\int u_t \, dW_t$ traiettoria per traiettoria

- La costruzione dell'integrale di Itô si effettua per processi $\{u_t\}_{t\geq 0}$, $\mathcal{F}_t$-adattati e t.c. $\mathbb{E}\left[\int_0^T u_t^2 \, dt\right] < \infty$. Questa classe di processi la chiamiamo $\mathbb{L}^2$.

COSTRUZIONE DELL'INTEGRALE DI ITÔ

- Da prima si definisce $\int u_t \, dW_t$ per processi semplici, ossia della forma

$$u_t = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(t)$$ ove le c_k sono v.c. $\mathbb{E}[c_k^2] < \infty \ \forall k$ con le c_k $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$-misurabili

OSS: • c_k $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$-misurabili $\Leftrightarrow$ $\{u_t\}$ è $\mathcal{F}_t$-adattato

$\{u_t \in A\} = \{c_k \in A\} \in \mathcal{F}_{t_{k-1}} \subseteq \mathcal{F}_t$ se $t_{k-1} \leq t \leq t_k$

• $$\mathbb{E}\left[\int_0^T u_t^2 \, dt\right] = \int_0^T \mathbb{E}[u_t^2] \, dt = \int_0^T \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}[c_k^2] \mathbb{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(t) \, dt = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}[c_k^2](t_k - t_{k-1})}_{<\infty}$$

se $\mathbb{E}[c_k^2] < \infty$

Def. Se $u_t \in \mathbb{L}^2$ ed è un processo semplice allora si definisce

$$\int u_t \, dW_t := \sum_{k=1}^{N} c_k (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})$$

- **Def.** $$\int^t u_r \, dW_r := \int u_r \mathbb{1}_{(s,t]}(r) \, dW_r$$

87

In particolare $\int_0^t dW_t = W_t - W_0 = W_t$

$$\int_0^t a\, dW_t = a W_t \qquad a \in \mathbb{R}$$

Teorema (Proprietà dell'integrale di Itô)

(1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\quad \int (a u_t + b v_t)\, dW_t = a \int u_t\, dW_t + b \int v_t\, dW_t$ proprietà di linearità

(2) additività rispetto all'estremo di integrazione $\quad \int_s^t u_r\, dW_r = \int_s^c u_r\, dW_r + \int_c^t u_r\, dW_r \qquad s < c < t$

(3) $$\mathbb{E}\left[\int_s^t u_r\, dW_r \,|\, \mathcal{F}_s \right] = 0$$

(4) $\boxed{X_t := \int_0^t u_r\, dW_r \text{ è una martingala}}$ t.c. $\boxed{X_t^2 - \int_0^t u_r^2\, dr = mg}$

ossia $\langle X \rangle_t = \int_0^t u_r^2\, dr$

ed in particolare $\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t u_r^2\, dr \right]$

Dim.

Le proprietà (1) e (2) seguono immediatamente dalla definizione.

(3) Essendo $\{u_t\}$ semplice $\quad u_r = \sum_{k=1}^N c_k \mathbb{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(r)$ se $r \in (s, t]$

$s = t_0 \quad t = t_N$

$s \leq t_{k-1} < t_k < t_N \leq t$

$s = t_0 < t_1 < \quad < t_N = t$

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t u_r\, dW_r \,|\, \mathcal{F}_s \right] =$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^N c_k (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \,|\, \mathcal{F}_s \right] = \sum_{k=1}^N \mathbb{E}\left[c_k (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \,|\, \mathcal{F}_s \right] =$$

$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_{t_{k-1}} \quad \forall k = 1, \dots, N$

$$= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[c_k (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}} \right] \mid \mathcal{F}_s \right] = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}\left[c_k \underbrace{\mathbb{E}\left[W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}} \right]}_{\mathbb{E}[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}] = 0} \mid \mathcal{F}_s \right] = 0$$

essendo $\mathcal{F}_{t_{k-1}} \supseteq \mathcal{F}_s \quad \forall k = 1, \dots, N$

in quanto $W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{t_{k-1}}$

Osserviamo che X_t è $\mathcal{F}_t$-misurabile e poi

(4) $$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\int_0^t u_r \, dW_r \mid \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E}\left[\int_0^s u_r \, dW_r + \int_s^t u_r \, dW_r \mid \mathcal{F}_s \right] =$$

$$= \underbrace{\int_0^s u_r \, dW_r}_{\mathcal{F}_s\text{-misurabile}} + \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_s^t u_r \, dW_r \mid \mathcal{F}_s \right]}_{= 0 \text{ per } 3)} = X_s$$

Rimane da mostrare che

$$\mathbb{E}\left[X_t^2 - \int_0^t u_r^2 \, dr \mid \mathcal{F}_s \right] = X_s^2 - \int_0^s u_r^2 \, dr$$

ossia che $\mathbb{E}\left[X_t^2 - X_s^2 \mid \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t u_r^2 \, dr \mid \mathcal{F}_s \right]$

— — — — — — — APPROFONDIMENTO — — — (Non fatto a lezione)

Limitiamoci a dimostrare che $\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t u_r^2 \, dr \right]$

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{N} c_k (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \right)^2 \right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} c_k^2 (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 + 2 \sum_{a \neq k} c_k c_a (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})(W_{t_a} - W_{t_{a-1}}) \right]$$

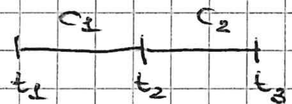
$$= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}\left[c_k^2 (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 \right] + 2 \sum_{a \neq k} \underbrace{\mathbb{E}\left[c_k c_a (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})(W_{t_a} - W_{t_{a-1}}) \right]}_{= 0}$$

che mostriamo nella pagina seguente

$$= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}\left[c_k^2 \underbrace{\mathbb{E}\left[(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}} \right]}_{\mathbb{E}[(W_{t_k} - W_{k-1})^2] = (t_k - t_{k-1})} \right] = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}[c_k^2](t_k - t_{k-1})$$

$$= \int^t \mathbb{E}[u_r^2] \, dr$$

Mostriamo il caso di 2 addendi



$$\mathbb{E}\left[c_1 (W_{t_2} - W_{t_1}) \cdot c_2 (W_{t_3} - W_{t_2}) \right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[c_1 (W_{t_2} - W_{t_1}) \cdot c_2 (W_{t_3} - W_{t_2}) \mid \mathcal{F}_{t_2} \right] \right] =$$

$$= \mathbb{E}\Big[c_1 (W_{t_2} - W_{t_1}) c_2 \underbrace{\mathbb{E}\left[W_{t_3} - W_{t_2} \mid \mathcal{F}_{t_2} \right]}_{\mathbb{E}\left[W_{t_3} - W_{t_2} \right] = 0} \Big] = 0$$

In generale $\quad \mathbb{E}\left[\int_a^b u_t \, dW_t \int_b^c u_t \, dW_t \right] = 0 \qquad a < c < b$ $\square$

La definizione si estende ad ogni processo $u \in \mathbb{L}^2$ mantenendo le stesse proprietà, utilizzando la seguente proposizione

Proposizione

$\forall u \in \mathbb{L}^2 \;\exists \{u^n\}$ di processi semplici in $\mathbb{L}^2$: $\quad \lim_{n \to \infty} u^n_t = u_t$

nel senso che $\quad \lim_{n \to \infty} \mathbb{E} \int_0^t (u^n_t - u_t)^2 \, dt = 0$. (Convergenza in media quadratica)

Def $\quad \forall u \in \mathbb{L}^2$

$$\int u_t \, dW_t := \lim_{n \to \infty} \int u^n_t \, dW_t$$

ove $\{u^n\}$ è la successione di processi semplici che converge ad u

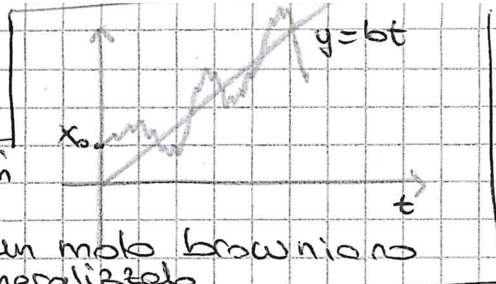
Processi di Itô

Def. I processi di Itô sono quegli processi stocastici dati da

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s\, ds + \int_0^t a_s\, dW_s$$

se $b_s = b$, $a_s = a$ costanti

$X_t = X_0 + bt + aW_t$ è un moto browniano generalizzato



più velocemente si dice che X_t risolve la EDS (Eq. differenziale stocastica)

$$dX_t = b_t\, dt + a_t\, dW_t$$

b_t termine di drift

a_t termine di ~~coeff~~ diffusione

se $b_t = b$ e $a_t = a$ si vede che la retta $y = bt$ guida la traiettoria di X_t mentre a è il coefficiente che amplifica le oscillazioni

Formula di Itô

- Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ Itô ha dimostrato che il processo $Y_t = f(W_t)$ ha il seguente differenziale stocastico $dY_t = df(W_t) = f'(W_t)\, dW_t + \underbrace{\frac{1}{2} f''(W_t)\, dt}_{\text{termine correttivo rispetto al differenziale ordinario}}$

- Più in generale se X_t è un processo di Itô allora $Y_t = f(t, X_t)$ segue la EDS:

$$\boxed{dY_t = df(t, X_t) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)\, a_t^2 \right\} dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\, \underbrace{dX_t}_{b_t dt + a_t dW_t}}$$

che si può anche scrivere come

$$df(t, X_t) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + b_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) + \frac{1}{2} a_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) \right\} dt + a_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\, dW_t$$

Applicazioni della formula di Itô

1) Calcoliamo il differenziale stocastico del processo moto browniano geometrico:

$$S_t = S_0\, e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \qquad \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0,\ \{W_t\}_{t \geq 0} \text{ moto browniano}$$

$$S_t = f(t, W_t) \quad \text{ove} \quad f(t,x) = S_0\, e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) f \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \sigma f \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial f}{\partial x} = \sigma^2 f$$

$$df(t, W_t) = \left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) f(t, W_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 f(t, W_t)\right\} dt + \sigma f(t, W_t)\, dW_t$$

$$\Rightarrow \quad dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t)$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, dW_t$$

il rendimento dell'azione in un intervallo infinitesimale $[t, t+dt]$ è dato dal rendimento atteso μ più un termine aleatorio $\sigma\, dW_t$ che è tanto maggiore quanto lo è σ (volatilità dell'azione)

2) Differenziale della martingala esponenziale

$$Z_t := e^{-\frac{1}{2}c^2 t + c W_t} \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$Z_t = f(t, W_t) \qquad f(t,x) = e^{-\frac{1}{2}c^2 t + cx}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = -\dfrac{1}{2}c^2 f \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = c f \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c\dfrac{\partial f}{\partial x} = c^2 f \end{cases}$$

$$dZ_t = \left\{-\frac{1}{2}c^2 Z_t + \frac{1}{2}c^2 Z_t\right\} dt + c Z_t\, dW_t = c Z_t\, dW_t$$

Analogamente a prima troviamo che:

$$\boxed{dZ_t = Z_t\, c\, dW_t} \quad \text{ossia} \quad Z_t = 1 + \int_0^t c Z_s\, dW_s$$

inoltre sappiamo che se $Z \in \mathbb{L}^2$ allora $\int_0^t Z_s\, dW_s$ è una mg $\Rightarrow \{Z_t\}_{t\geq 0}$ è una martingala

Verifichiamo che $Z \in \mathbb{L}^2$, ossia che $\mathbb{E}\left[\int_0^T Z_s^2\, ds\right] < \infty$

$$Z_t^2 = \left(e^{-\frac{1}{2}c^2 t + cW_t}\right)^2 = e^{-c^2 t + 2cW_t}$$

$$\mathbb{E}[e^{cW_t}] = \mathbb{E}[e^{c\sqrt{t}N}] = e^{c^2 t/2}$$

$$W_t \sim \sqrt{t}\, N$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T Z_t^2\, dt\right] = \int_0^T \mathbb{E}[Z_t^2]\, dt = \int_0^T e^{-c^2 t}\, \mathbb{E}[e^{2cW_t}]\, dt =$$

$$= \int_0^T e^{-c^2 t} \cdot e^{\frac{4c^2 t}{2}}\, dt = \int_0^T e^{c^2 t}\, dt = \frac{1}{c^2} e^{c^2 t}\Big|_0^T = \frac{1}{c^2}\left(e^{c^2 T} - 1\right) < \infty$$

3) Scambiando c con $-c$ si ottiene anche che $\boxed{\tilde{Z}_t = e^{-\frac{1}{2}c^2 t - cW_t}}$ è una mg

soluzione della $\boxed{d\tilde{Z}_t = -c\tilde{Z}_t\, dW_t}$

OSS: Le proprietà di martingala per Z_t e $\tilde{Z}_t$ le avevamo già provate con un calcolo diretto

Integrale di Itô di processi deterministici, ossia funzioni deterministiche del tempo

Risultato noto:

$X_1, \dots, X_n$ v.a. indipendenti con $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$

$$\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma_i^2\right)$$

OSS:

La media e la varianza di Y seguono dalle proprietà di media e varianza

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i$$

$$Var(Y) = Var\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i X_i}_{\text{v.a. indipendenti}}\Big) = \sum_{i=1}^{n} Var(c_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma_i^2$$

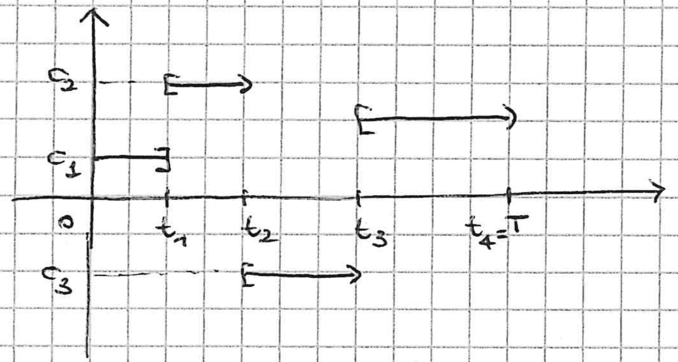
PROP. Sia $u(t)$ una funzione deterministica del tempo t.c. $\int_0^T u^2(t)\,dt < +\infty$

allora $\boxed{X_t := \int_0^t u(s)\,ds \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^t u^2(s)\,ds\right)}$ $\forall t \in [0, T]$

Dim.

Ci limitiamo a dimostrare il risultato per funzioni semplici del tempo, se

$u(s) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(s)$ con $0 = t_0 < t_1 < \quad < t_n = t$ e c_k costanti



sono funzioni costanti a tratti

Per definizione $X_t = \int_0^t u(s)\, dW_s = \sum_{k=1}^{n} c_k (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) = \sum_{k=1}^{n} c_k X_k$

$X_k := W_{t_k} - W_{k-1}$ $\quad k=1,\dots,n$ sono v.a. indipendenti $\quad X_k \sim \mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1})$

$$\Rightarrow \quad X_t \sim \mathcal{N}\Big(0, \underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_k^2 (t_k - t_{k-1})}_{= \int_0^t u^2(s)\, ds}\Big)$$

OSS: Dalla teoria generale già sapevamo che $\{X_t\}$ è una martingala $X_0 = 0$

e che $X_t^2 - \int_0^t u^2(s)\, ds$ = mg nulla in zero

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}(X_t^2) = \mathbb{E}\left(\int_0^t u^2(s)\, ds\right)$ se $u(s)$ è una funzione deterministica

ricaviamo che $\mathbb{E}(X_t^2) = \int_0^t u^2(s)\, ds$, risultato che abbiamo ottenuto

in questo caso particolare grazie alle proprietà delle gaussiane.