3

Processi stocastici a tempo continuo

- Il moto browniano
- Il moto browniano geometrico (Modello di Black & Scholes)
- La proprietà di Markov
- Le martingale

~~Vereoli correggere foglio 1 di esercizi~~

PASCUCA Cab. 4

III

· Processi stocastici a tempo continuo

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\qquad I = [0,T]$ o $[0,+\infty)$ tempo

Def. $(X_t)_{t \in I}$ è una famiglia di v.a. a valori in $\mathbb{R}$ t.c.

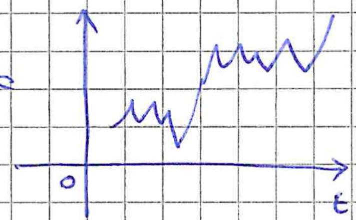
$$X : (t,\omega) \in I \times \Omega \to \mathbb{R}$$

è misurabile, ossia $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\{(t,\omega) : X_t(\omega) \in B\} \in \mathcal{B}(I) \times \mathcal{F}$

Osserv. $\forall t$ fissato quindi X_t è una v.a. $\Rightarrow \{\omega : X_t(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$

$\forall \omega$ fissato $X_\cdot(\omega)$ è una funzione deterministica del tempo detta traiettoria del processo $\qquad \underset{\omega \in \Omega}{t \to X_t(\omega)}$

Def. - Un processo si dice continuo se lo sono le sue traiettorie ω fissato



Def. - una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ in $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ è una famiglia crescente di sotto-sigma algebre di $\mathcal{F}$, ossia $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \subseteq \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F} \quad \forall s \leq t$

Def. Filtrazione naturale generata da un processo aleatorio $(X_t)_{t \in I}$

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s ; s \leq t\} = \sigma\{(X_s \in B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), s \leq t\}$$

OSS. - È la più piccola filtrazione rispetto alla quale il processo è adattato.

- Eventi della forma $\{X_{t_1} \in I_1, \ldots, X_{t_n} \in I_n\}$ con $t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq t$ $\quad I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ci sono contenuti in $\mathcal{F}_t^X$

Def. Un processo $(X_t)_{t\in I}$ si dice adattato ad una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ se $\mathcal{F}^X_t \subseteq \mathcal{F}_t$ o equivalentemente se $\forall t$ X_t è una v.a. $\mathcal{F}_t$ - misurabile.

Def. Moto Browniano o Processo di Wiener

$(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ $\quad W=(W_t)_{t\in[0,+\infty)}$

(i) $W_0 = 0$ q.c.

(ii) W è adattato e ha traiettorie continue

(iii) $W_t - W_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$ $\quad \forall t \geq s$ $\quad$ e $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, \underbrace{t-s}_{\text{varianza}})$

Teorema esiste un unico processo che verifica (i), (ii) e (iii)

Conseguenze: (iii) con $s=0$ $\quad W_t - W_0 = W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[W_t] = 0$$
$$\mathbb{E}[W_t^2] = t$$

Modello introdotto dal biologo Brown per descrivere il moto di una particella soggetta agli urti molecolari.

REMARK
Vedremo in seguito che nel modello B&S

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu \Delta t + \sigma \Delta W_t + o(\Delta t)$$

$\Delta S_t = S_{t+\Delta t} - S_t$

$\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t$

e $\Delta W_t \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$

Modello Black & Scholes

- Moto Browniano geometrico: dinamica di un titolo rischioso

$S_0 > 0$

$$\boxed{S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}}$$

μ tasso di rendimento atteso dell'azione (nel regime ~~estraordinario~~)

$\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{\mu t}$ $\quad$ e σ volatilità del titolo

• $\boxed{\text{Mostriamo che } \mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{\mu t}}$

$$\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}\left[S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}\right] = S_0 e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t}\, \mathbb{E}[e^{\sigma W_t}] = S_0 e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t}\, \mathbb{E}[e^{\sigma\sqrt{t} N}]$$

$\downarrow$

poiché $W_t \sim \mathcal{N}(0,t) \Rightarrow W_t \sim \sqrt{t}\, N$

$N \sim \mathcal{N}(0,1)$

Calcoliamo $\mathbb{E}[e^{aN}] = e^{a^2/2}$ $\quad N \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{E}[e^{aN}] = \int_{\mathbb{R}} e^{ax} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2-2ax}{2}}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2-2ax+a^2-a^2}{2}}\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} e^{a^2/2}\, dx = e^{a^2/2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t} \cdot e^{\sigma^2 t/2} = S_0 e^{\mu t}$$

μ è il tasso di rendimento atteso dell'azione

• OSS: se fosse $\sigma = 0 \Rightarrow S_t = S_0 e^{\mu t}$ l'azione non è più rischiosa ma ha un andamento deterministico, μ è il tasso (istantaneo) di rendimento dell'azione

Nel modello di B&S $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$, σ è la volatilità del titolo

$\boxed{\text{Il rendimento logaritmico } X_t = \log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t,\ \sigma^2 t\right) \text{ ha distribuzione gaussiana}}$

σ^2 è la varianza di X_t nell'unità di tempo

Def. Diremo che un processo stocastico $(X_t)_{t\geq 0}$ gode della <u>proprietà di Markov</u> rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ se il processo è adattato ad essa e

$\forall I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $$P(X_t \in I \mid \mathcal{F}_s) = P(X_t \in I \mid X_s) \quad \forall t \geq s \quad \forall I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Questo significa che l'andamento futuro del processo condizionato al presente è indipendente dal passato.

Se $(X_t)_{t\geq 0}$ rappresenta il prezzo di un titolo rischioso la proprietà di Markov è coerente con la "forma debole dell'efficienza dei mercati" secondo cui il prezzo stesso racchiude tutta l'informazione presente nelle serie storiche dei prezzi.

OSS: La proprietà di Markov è equivalente a:

$\forall f(x)$ funzione $$\mathbb{E}[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(X_t) \mid X_s] \quad \forall t \geq s$$

Infatti ritroviamo la definizione scegliendo $f(x) = \mathbb{1}_I(x) = \begin{cases} 1 & x \in I \\ 0 & x \notin I \end{cases}$

<u>Lemma:</u> X e Y v.c. X è $\mathcal{B}$-misurabile e $Y \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}$ allora

$$\mathbb{E}[g(Y)\, h(X) \mid \mathcal{B}] = h(X)\, \mathbb{E}[g(Y)]$$

Dim.

Se X è $\mathcal{B}$-mis. allora $h(X)$ è $\mathcal{B}$-mis. $\}$ si veda foglio 1. es. 5
Se $Y \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}$ allora anche $g(Y) \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}$

$$\mathbb{E}[g(Y) \underbrace{h(X)}_{\substack{\mathcal{B}\text{-mis.} \\ \text{esce fuori dalle} \\ \text{medie}}} \mid \mathcal{B}] = h(X)\, \mathbb{E}[\underbrace{g(Y)}_{\perp\!\!\!\perp \mathcal{B}} \mid \mathcal{B}] = h(X)\, \mathbb{E}[g(Y)]$$

abbiamo usato le proprietà delle medie condizionate

$\square$

Il lemma si estende anche a funzioni $h(x,y)$ della coppia:

$$\mathbb{E}[\,h(X,Y)\mid \mathcal{B}\,] = \mathbb{E}[\,h(x,Y)\,]\Big|_{x=X} = g(X)$$

ove $g(x) = \mathbb{E}[\,h(x,Y)\,]$

PROP.

Il moto browniano è un processo di Markov: $\mathbb{E}[\,f(W_t)\mid \mathcal{F}_s\,] = \mathbb{E}[\,f(W_t)\mid W_s\,] \quad \forall t \geq s$

$\forall f(x)$

Dim.

Se dimostriamo che $\mathbb{E}[\,f(W_t)\mid \mathcal{F}_s\,]$ è una funzione solo di W_s abbiamo la tesi,

infatti se $\mathbb{E}[\,f(W_t)\mid \mathcal{F}_s\,] = g(W_s)$ allora per la proprietà della torre $\sigma(W_s) \subseteq \mathcal{F}_s$

$$\mathbb{E}[\,f(W_t)\mid W_s\,] = \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[\,f(W_t)\mid \mathcal{F}_s\,]\mid W_s\,] = \mathbb{E}[\,g(W_s)\mid W_s\,] = g(W_s) = \mathbb{E}[\,f(W_t)\mid \mathcal{F}_s\,]$$

Rimane da mostrare che $\mathbb{E}[\,f(W_t)\mid \mathcal{F}_s\,] = g(W_s)$. $\forall t \geq s$

Questo segue dal Lemma, in quanto

$$\mathbb{E}[\,f(W_t)\mid \mathcal{F}_s\,] = \mathbb{E}[\,f(\underbrace{W_t - W_s}_{\text{v.a. } \perp \mathcal{F}_s} + \underbrace{W_s}_{\text{v.a. } \mathcal{F}_s\text{-mis.}})\mid \mathcal{F}_s\,] = g(W_s)$$

ove $g(x) := \mathbb{E}[\,f(W_t - W_s + x)\,]$ $\square$

OSS: Siamo in grado di calcolare questa funzione $g(x)$. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

$W_t - W_s \sim \sqrt{t-s}\, N \qquad N \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$g(x) = \mathbb{E}[\,f(W_t - W_s + x)\,] = \mathbb{E}[\,f(\sqrt{t-s}\, N + x)\,] = \int_{\mathbb{R}} f(\sqrt{t-s}\, y + x)\, f_N(y)\, dy$$

$$\mathbb{E}[f(W_t - W_s + x)] = \int_{\mathbb{R}} f(\sqrt{t-s}\,y + x)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$$

oppure $\quad W_t - W_s + x \sim \mathcal{N}(x, t-s)$ $\quad$ usiamo la densità di una gaussiana di media x e varianza $t-s$

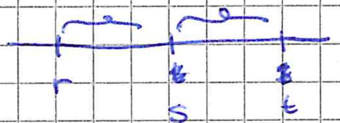
$$x) = \mathbb{E}[f(W_t - W_s + x)] = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\,e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}}\,dy$$

Più in generale si prova che ogni processo ad incrementi indipendenti $(X_t)_{t\geq 0}$ è un processo di Markov, in quanto si utilizza il fatto che $X_t - X_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s \quad \forall t \geq s$

Osserviamo che dalla proprietà che $W_t - W_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s \ \forall t \geq s$ segue che i rendimenti relativi dei prezzi su intervalli disgiunti sono v.a. indipendenti:

$$\frac{S_t - S_s}{S_s} = \frac{S_t}{S_s} - 1 = \frac{S_0\, e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}}{S_0\, e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})s + \sigma W_s}} - 1 = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-s) + \sigma(W_t - W_s)} - 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{S_t - S_s}{S_s} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$$



$[r,s]$ e $[s,t]$ intervalli disgiunti

in particolare se prendo $r < s$ e considero il rendimento relativo all'intervallo $[r,s]$ ottengo che $\dfrac{S_t - S_s}{S_s} \perp\!\!\!\perp \dfrac{S_s - S_r}{S_r}$ in quanto quest'ultima v.a. è $\mathcal{F}_s$-misurabile

PROP.

Il processo dei prezzi $(S_t)_{t\geq 0}$ nel modello Black & Scholes verifica la proprietà di Markov

Dim.

osserviamo che $S_t = R(t, W_t)$ con $R(t,x) = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x}$.

$\forall f(x)$, $\forall t \geq s$

$$\mathbb{E}[f(S_t) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\underbrace{f(R(t, W_t))}_{F(t, W_t)} \mid \mathcal{F}_s] \underset{\text{poiché } (W_t)_{t\geq 0} \text{ gode della proprietà di Markov}}{=} \mathbb{E}[F(t, W_t) \mid W_s] =$$

$$= \mathbb{E}[f(S_t) \mid W_s] = \mathbb{E}[f(S_t) \mid S_s]$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato che $\sigma(W_s) = \sigma(S_s)$ perché S_s si scrive come funzione di W_s e viceversa $S_s = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})s + \sigma W_s} = R(s, W_s)$

$$\log\left(\frac{S_s}{S_0}\right) = (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})s + \sigma W_s \Rightarrow W_s = \frac{1}{\sigma}\left\{\log\left(\frac{S_s}{S_0}\right) - (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})s\right\} = R^{-1}(s, S_s)$$

Infatti ogni evento $(W_s \in I) = (R^{-1}(s, S_s) \in I) = (S_s \in \tilde{I}) \Rightarrow \sigma(W_s) \subseteq \sigma(S_s)$

e viceversa $(S_s \in I) = (R(s, W_s) \in I) = (W_s \in J) \Rightarrow \sigma(S_s) \subseteq \sigma(W_s)$

$\square$

oppure si può verificare direttamente che $\mathbb{E}[f(S_t) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(S_t) \mid S_s]$ $\forall t > s$

$$\mathbb{E}[f(S_t) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(\underset{\mathcal{F}_s\text{-mis}}{S_s}\, e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-s)}\, e^{\underbrace{\sigma(W_t - W_s)}_{\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s}}) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(x\, e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-s)}\, e^{\sigma\sqrt{t-s}\, N})]\Big|_{x = S_s}$$

Le Martingale

Def. - $\{M_t\}_{t\geq 0}$ processo $\mathcal{F}_t$ - adattato è una martingala se $\forall$ ~~s~~ $t \geq s$
con $\mathbb{E}|M_t| < \infty \quad \forall t$

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$$

- è una submg se $\quad \mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] \geq M_s \quad \forall t \geq s$
- è una supermg se $\quad \mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] \leq M_s \quad \forall t \geq s$

ESEMPI

1) X v.a. $\qquad M_t := \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t]$

allora M_t è una mg, infatti $\forall\, t \geq s$

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_s] \underset{\downarrow}{=} \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_s] = M_s$$

$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ e applichiamo la proprietà della torre

2) $(W_t)_{t\geq 0}$ moto browniano è una mg

$$\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s + W_s \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s] + W_s = \mathbb{E}[W_t - W_s] + W_s = W_s$$

3) ogni processo ad incrementi indipendenti e media ~~nulla~~ costante è una mg

$$X_t - X_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s \quad e \quad \mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_s] \quad \forall s,t$$

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t - X_s + X_s \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s] + X_s = \mathbb{E}[X_t - X_s] + X_s = X_s$$

PROP.

Se $(M_t)_{t\geq 0}$ è una mg $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_s) = \mathbb{E}(M_0)$ $\quad \forall\, t \geq s$ — ie processo ha media costante

Se $(M_t)_{t\geq 0}$ è una submg $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(M_t) \geq \mathbb{E}(M_s) \geq \mathbb{E}(M_0)$ $\quad \forall\, t \geq s$ — ie processo ha media crescente nel tempo

Se $(M_t)_{t\geq 0}$ è una supermg $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(M_t) \leq \mathbb{E}(M_s) \leq \mathbb{E}(M_0)$ $\quad \forall\, t \geq s$ — ie processo ha media decrescente nel tempo

Dim.

$(M_t)_{t\geq 0}$ mg

poiché $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s \quad \forall\, t \geq s$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s))}_{= \mathbb{E}(M_t)} = \mathbb{E}(M_s) \quad \forall\, t \geq s$

$(M_t)_{t\geq 0}$ submg

poiché $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \geq M_s \quad \forall\, t \geq s$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s))}_{= \mathbb{E}(M_t)} \geq \mathbb{E}(M_s) \quad \forall\, t \geq s$

$(M_t)_{t\geq 0}$ supermg

poiché $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \leq M_s \quad \forall\, t \geq s$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s))}_{= \mathbb{E}(M_t)} \leq \mathbb{E}(M_s) \quad \forall\, t \geq s$

PROPOSIZIONE

Sia $\{W_t\}_{t\geq 0}$ un moto browniano

① $M_t = W_t^2 - t$ è una martingale

② $Z_t = e^{-\frac{1}{2}c^2 t + cW_t}$ è una martingale $\forall c \in \mathbb{R}$

Dim.

① $\forall t > s$

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\{W_s + (W_t - W_s)\}^2 \mid \mathcal{F}_s] - t =$$

$$= \mathbb{E}[W_s^2 + (W_t - W_s)^2 + 2W_s(W_t - W_s) \mid \mathcal{F}_s] - t =$$

$$= \mathbb{E}[\underbrace{W_s^2}_{\mathcal{F}_s\text{-mis.}} \mid \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[\underbrace{(W_t - W_s)^2}_{\perp \mathcal{F}_s} \mid \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[\underbrace{2W_s}_{\mathcal{F}_s\text{-mis.}}\underbrace{(W_t - W_s)}_{\perp \mathcal{F}_s} \mid \mathcal{F}_s] - t$$

$$= W_s^2 + \underbrace{\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2]}_{= t-s} + 2W_s \underbrace{\mathbb{E}[W_t - W_s]}_{=0} - t$$

$$= W_s^2 + t - s - t = W_s^2 - s = M_s$$

ricordiamo che

$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

$\mathbb{E}[W_t - W_s] = 0$

$Var(W_t - W_s) = \mathbb{E}((W_t - W_s)^2) = t - s$

② $\forall t > s$

$$\mathbb{E}[Z_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[e^{-\frac{1}{2}c^2 t} e^{cW_t} \mid \mathcal{F}_s] = e^{-\frac{1}{2}c^2 t}\, \mathbb{E}[e^{c(W_s + W_t - W_s)} \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= e^{-\frac{1}{2}c^2 t}\, \mathbb{E}[\underbrace{e^{cW_s}}_{\mathcal{F}_s\text{-mis}} e^{c(W_t - W_s)} \mid \mathcal{F}_s] = e^{-\frac{1}{2}c^2 t} e^{cW_s}\, \mathbb{E}[\underbrace{e^{c(W_t - W_s)}}_{\perp \mathcal{F}_s} \mid \mathcal{F}_s] =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}c^2 t} e^{cW_s}\, \mathbb{E}[e^{c(W_t - W_s)}] =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}c^2 t} e^{cW_s} \underbrace{\mathbb{E}[e^{c\sqrt{t-s}\,N}]}_{e^{\frac{c^2}{2}(t-s)}} = e^{-\frac{1}{2}c^2 s + cW_s} = Z_s$$

□

Nel modello Black & Scholes $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} = S_0 e^{\mu t} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t}$

$S_t = S_0 e^{\mu t} \cdot Z_t$ con $(Z_t)_{t \geq 0}$ mg

di media 1

in quanto $Z_0 = e^0 = 1$

$\Rightarrow \mathbb{E}(S_t) = \mathbb{E}(S_0 e^{\mu t} Z_t) = S_0 e^{\mu t} \mathbb{E}(Z_t) = S_0 e^{\mu t}$ che avevamo già dimostrato

Inoltre $S_t e^{-\mu t} = S_0 Z_t$ è una mg di media S_0

- Le martingale: $\left(e^{-\frac{1}{2}c^2 t + cW_t}\right)_{t \geq 0}$ e $\left(e^{-\frac{1}{2}c^2 t - cW_t}\right)_{t \geq 0}$ sono chiamate le martingale esponenziali $c \in \mathbb{R}$