

ESERCIZI foglio 2
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II, a.a. 2022/23
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

1.

Mostrare che se X e Y sono variabili aleatorie indipendenti ed indipendenti dalla sigma-algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ allora

$$E[XY|\mathcal{G}] = E[X]E[Y].$$

2.

Un titolo che non paga dividendi ha una volatilità σ del 30% e offre un rendimento atteso μ del 15% (in base annua). Il prezzo corrente è di 100 euro. Assumere il prezzo nel modello Black & Scholes, ossia dato dal seguente processo

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \quad \forall t \geq 0$$

ove $\{W_t\}_{t \geq 0}$ è un moto browniano. Calcolare la probabilità che tra 1 mese il prezzo sia compreso tra 90 euro e 110 euro.

3. Sia $\{S_t\}_{t \geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes. Mostrare che

$$E[S_t | \mathcal{F}_r] = S_r e^{\mu(t-r)}, \quad \forall t \geq r.$$

Sia Q una nuova misura di probabilità tale che

$$S_t = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t^Q} \quad \forall t \geq 0$$

ove $r > 0$ è il tasso d'interesse istantaneo privo di rischio e $\{W_t^Q\}_{t \geq 0}$ è un moto browniano rispetto a Q . Mostrare che il prezzo scontato

$$\tilde{S}_t := S_t e^{-rt}, \quad t \geq 0$$

è una martingala rispetto a Q .

4.

Sia $\{M_t\}_{t \geq 0}$ una martingala, mostrare che $\{M_t^2\}_{t \geq 0}$ è una sub-martingala.

5.

Sia $\{X_t\}_{t \geq 0}$ una martingala e sia $\{\mathcal{G}_t\}_{t \geq 0}$ è una filtrazione tale che

$\mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t$, per ogni $t \geq 0$, dove $\mathcal{F}_t^X := \sigma\{X_s; s \leq t\}$.

Mostrare che $\{X_t\}_{t \geq 0}$ è una martingala anche rispetto alla filtrazione $\{\mathcal{G}_t\}_{t \geq 0}$.