

ESERCIZI foglio 1
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II, a.a. 2022/23
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P)

1. Sia Λ una v.a. di distribuzione uniforme su $\{1, 2, \dots, 10\}$ ed N una v.a. a valori in $\{0, 1, 2, \dots\}$ tale che

$$P(N = n | \Lambda = \lambda) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(distribuzione di Poisson condizionata a Λ).

(a) Determinare la distribuzione di N , ossia $P(N = n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

(b) Calcolare $E[N]$.

[**Suggerimento:** Calcolare $E[N | \Lambda = \lambda]$ e successivamente applicare la proprietà che $E[N] = E[E[N | \Lambda]]$]

2. Sia N una v.a. di distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$

(ossia $P(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, $n = 0, 1, 2, \dots$) e $\{Z_i\}$ una successione di v.a. indipendenti e identicamente distribuite di media μ . Si supponga inoltre N e la successione $\{Z_i\}$ indipendenti. Calcolare il valore atteso della v.a.

$$X = \sum_{i=1}^N Z_i.$$

[**Suggerimento:** Calcolare $E[X | N = n]$ e successivamente applicare la proprietà che $E[X] = E[E[X | N]]$, oppure è possibile fare un calcolo diretto ricordando che $E[g(N)] = \sum_{n \geq 0} g(n) P(N = n)$.]

3. Sia Λ una v.a. di distribuzione di uniforme nell'intervallo (a, b) , con $0 < a < b$ e T una v.a. di distribuzione condizionata data la v.a. Λ :

$$P(T \leq t | \Lambda = \lambda) = (1 - e^{-\lambda t}) I_{\{t \geq 0\}}.$$

(distribuzione esponenziale condizionata a Λ)

(a) Determinare la densità congiunta della coppia (Λ, T) ;

(b) La media condizionata $E[T | \Lambda]$;

(c) Calcolare $E[T]$.