Esempio di risoluzione di un problema di PL con Excel

Vediamo come risolvere un problema di PL con Excel. Riprendiamo un esercizio già visto.

Un'azienda vinicola desidera produrre due tipi di vino: uno da tavola, uno da dessert. Il profitto che l'azienda trae dalla produzione di una unità di vino da tavola è 3, mentre dalla produzione di una unità di vino da dessert è 7. Tale produzione necessita di una particolare combinazione di due tipi di uva: diciamo di tipo A e di tipo B rispettivamente. Per produrre 1 unità di vino da tavola, si ha bisogno di 3 unità di uva di tipo A e di 2 unità di uva di tipo B. Per produrre 1 unità di vino da dessert, si ha bisogno di 1 unità di uva di tipo A e di 4 unità di uva di tipo B. Infine l'azienda ha a disposizione 1000 unità di uva di tipo A e 400 di uva di tipo B. Il problema è determinare le quantità di vino da tavola e da dessert da produrre in modo da massimizzare il profitto totale.

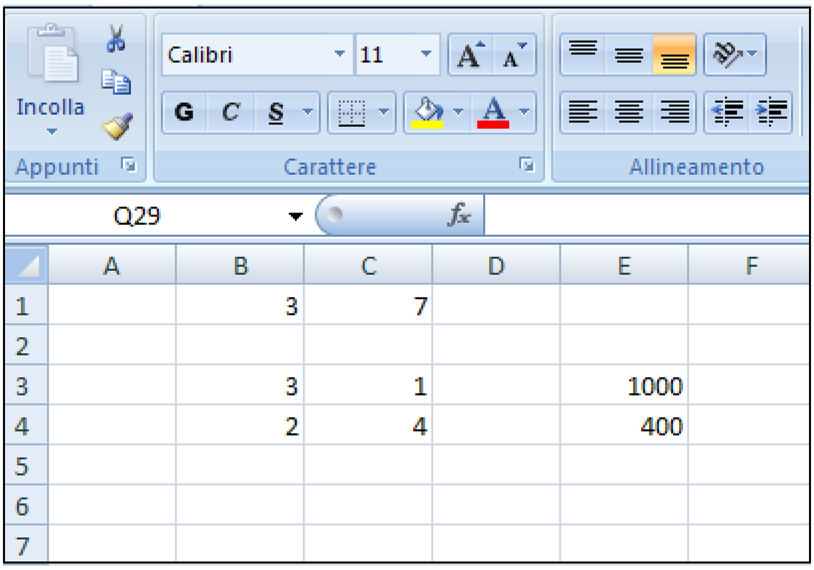
Variabili decisionali: x_1, x_2

x_1 = quantità di vino da tavola prodotta

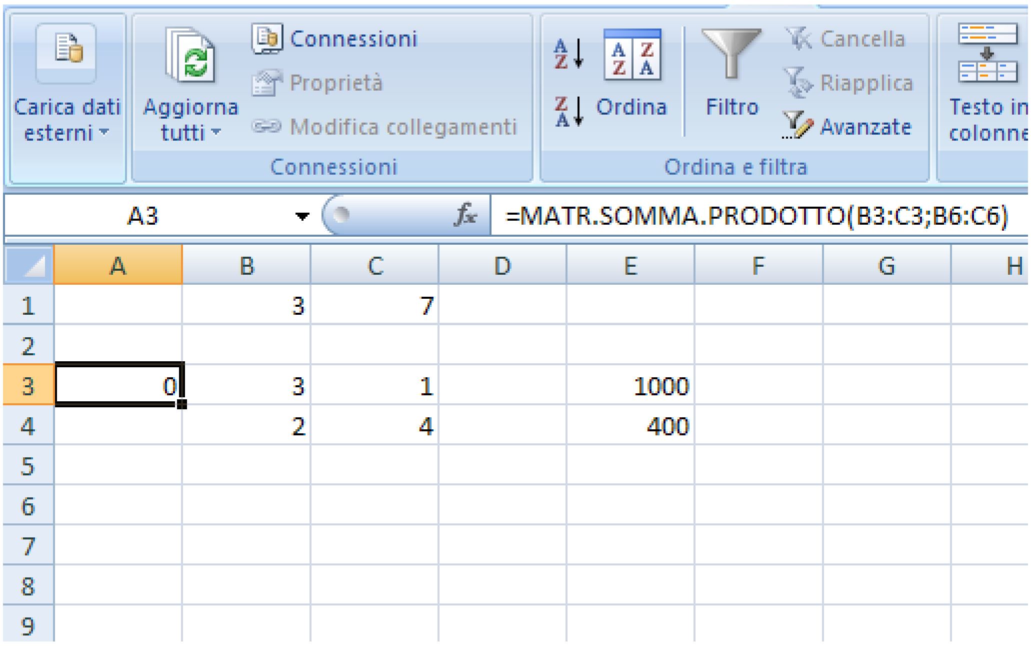
x_2 = quantità di vino da dessert prodotta

$$
(1) \qquad \begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 7x_2 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 1000 \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 400 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}
$$

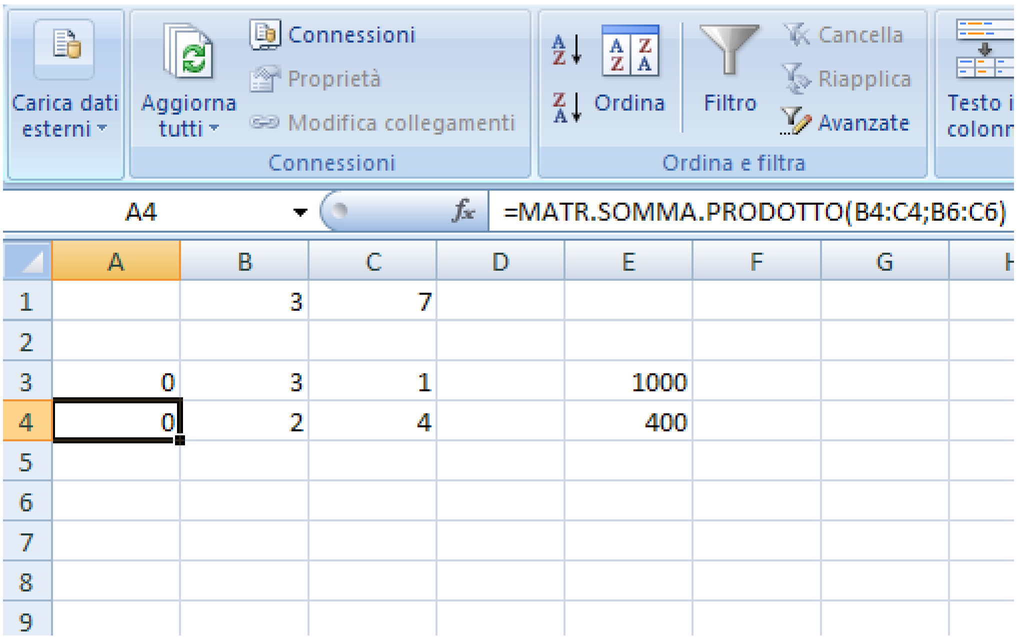
Inseriamo su Excel i dati del problema nel seguente modo, assegnando inoltre alle variabili le caselle B6 e C6.



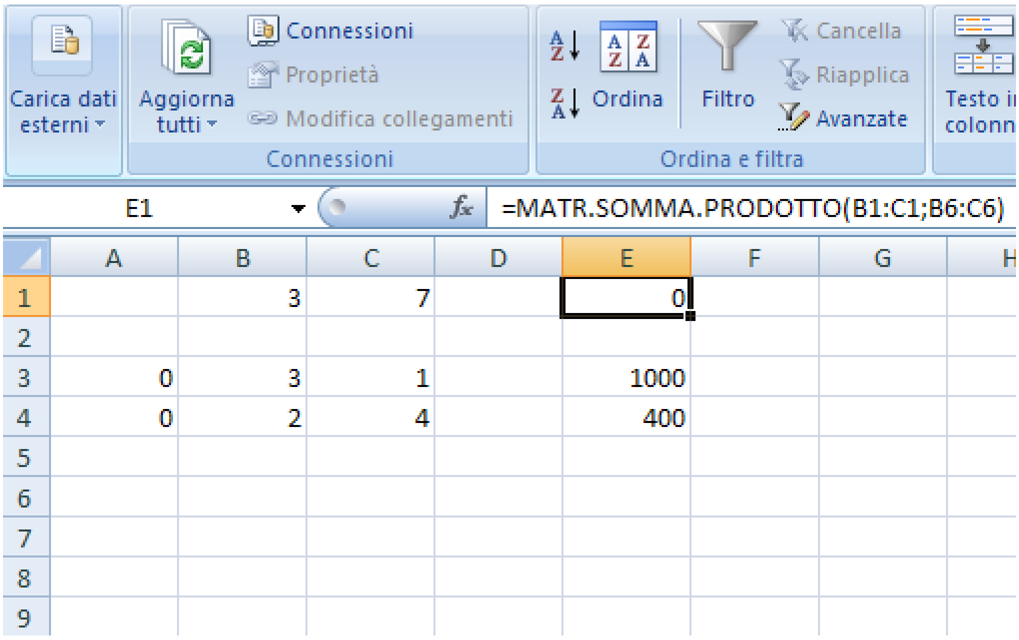
Nella cella A3 inseriamo la matrice somma prodotto (B3 :C3;B6 :C6), cioè il valore $3x_1 + x_2$ relativo alla prima disuguaglianza.



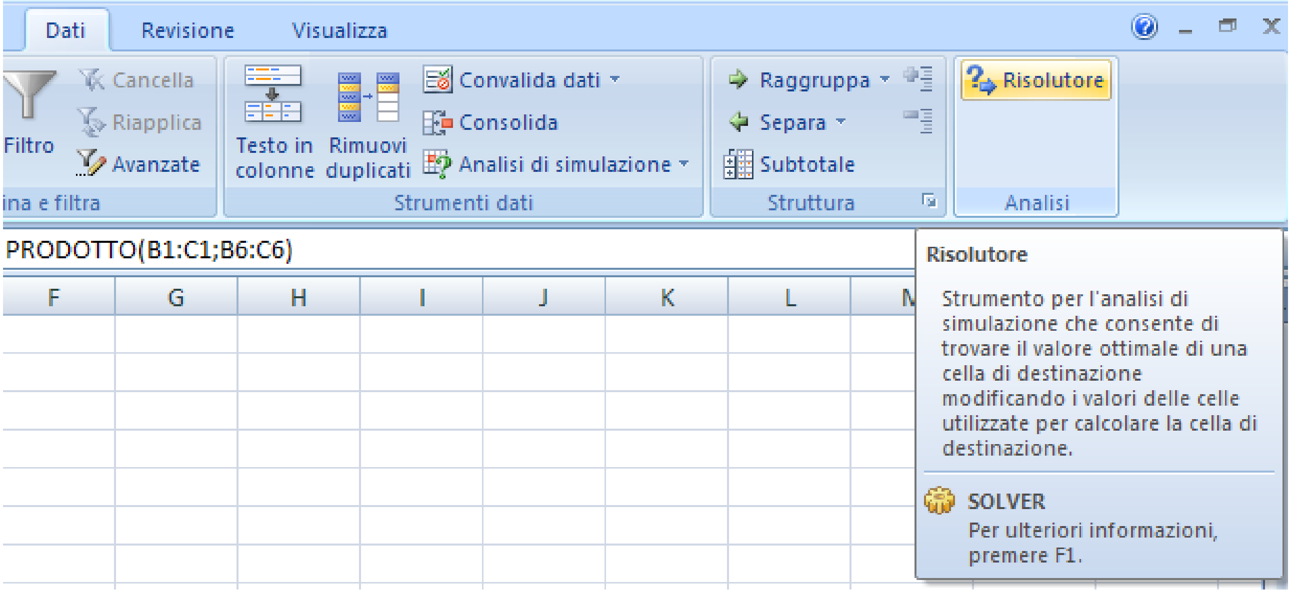
Nella cella A4 procediamo in modo analogo, con riferimento alla seconda disuguaglianza.



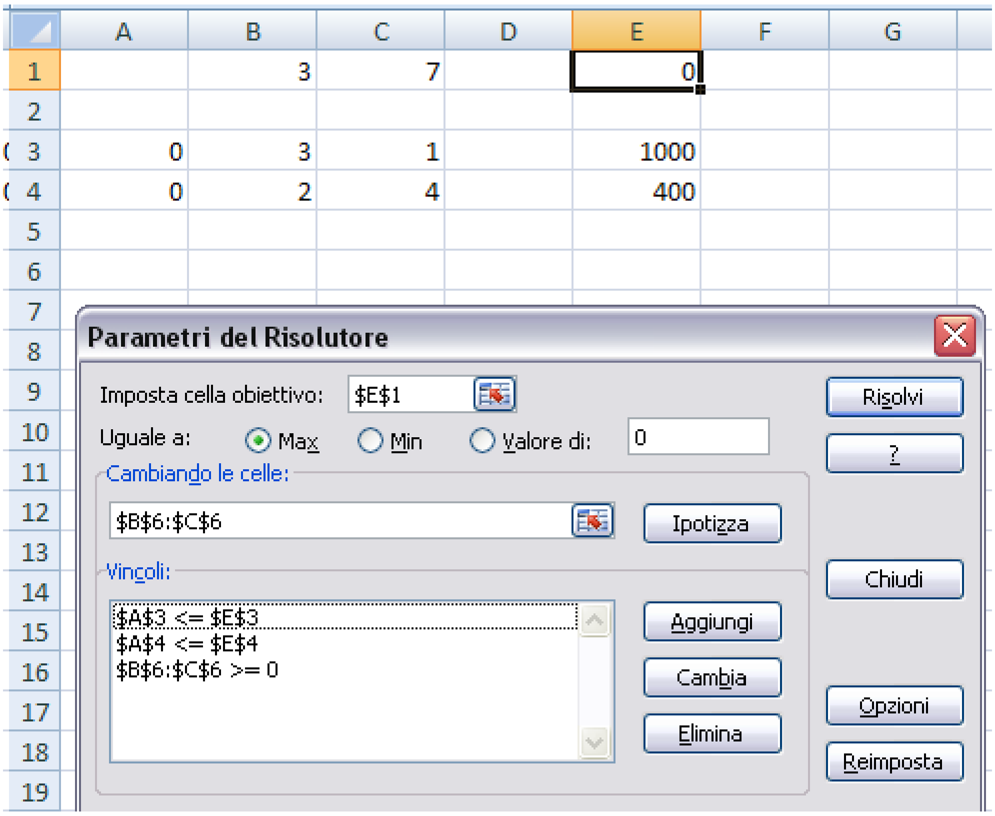
Nella cella E1 inseriamo infine la matrice somma prodotto (B1 :C1;B6 :C6), cioè il valore $3x_1 + 7x_2$ della funzione obiettivo.



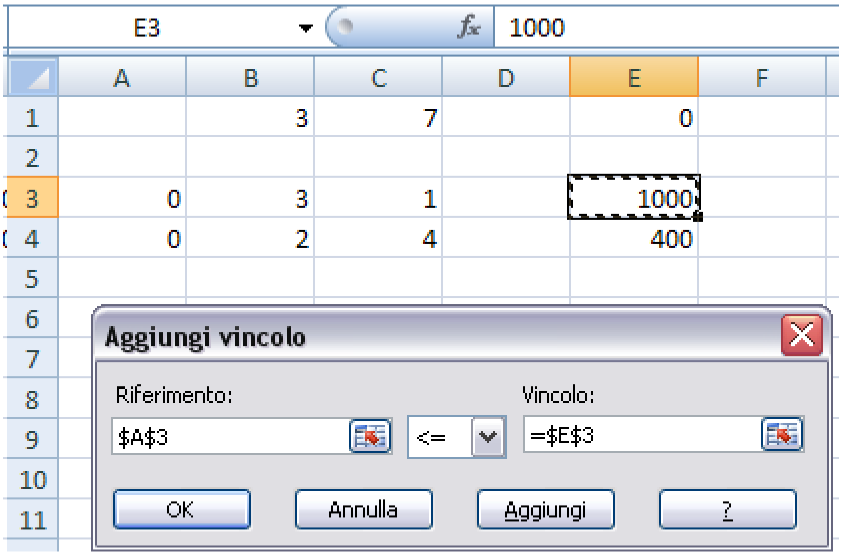
Ora possiamo utilizzare uno strumento fornito da Excel: il Risolutore.



Cliccando su di esso è possibile inserire i parametri del problema :



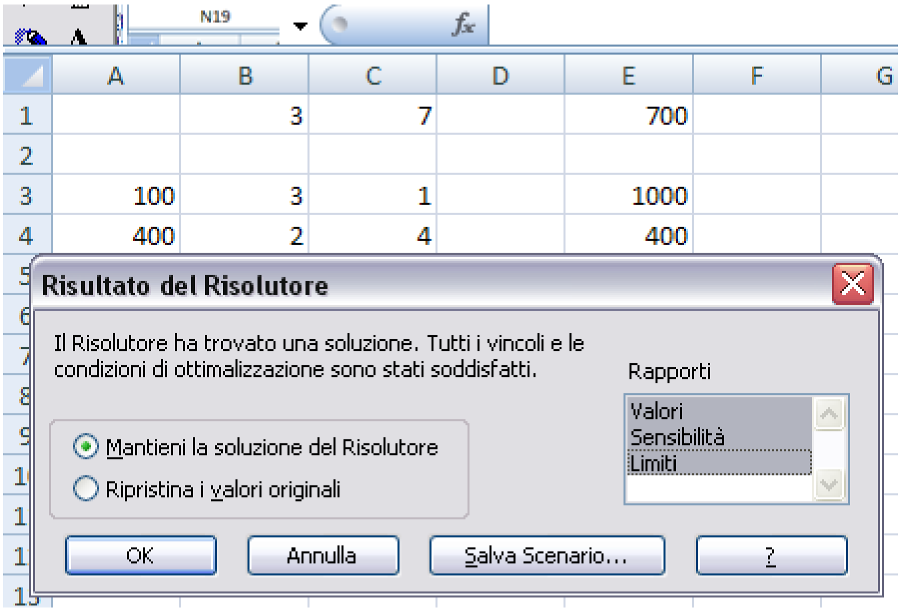
In “Imposta cella obiettivo” (cioè la cella che indica il valore della funzione obiettivo) scriviamo la cella E1; in tale cella comparirà il valore ottimo della funzione obiettivo. Poi scegliamo l’opzione “max”, dato che il problema è di “max”. In “Cambiano le celle” (cioè le celle che indicano le variabili) scriviamo le celle B6 e C6; in tali celle compariranno i valori ottimi delle variabili, cioè i valori di x_1 e x_2. Infine in “Vincoli” inseriamo tutti i vincoli, mediante l’uso di “Aggiungi”, come illustrato di seguito rispetto al solo primo vincolo.



Poi andiamo su “Opzioni” (tra i parametri del Risolutore), spuntiamo l’opzione “Presupponi modello lineare” e diamo l’OK.

Ora possiamo procedere al calcolo della soluzione, cliccando su “Risolvi”.

A questo punto è possibile anche richiedere il rapporto sui valori, sulla sensibilità e sui limiti (come illustrato di seguito) cliccando su ognuno di essi.



Diamo l’OK e finalmente abbiamo i risultati che attendevamo.

La soluzione ottima è: $x^*_1 = 0$, $x^*_2 = 100$, con valore 700,

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		3	7		700			
2								
3	100	3	1		1000			
4	400	2	4		400			
5								
6		0	100					
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								

Rapporto valori 1 | Rapporto sensibilità 1 | Rapporto limiti 1 | **Foglio1**

In basso possiamo cliccare sui vari rapporti per avere delle indicazioni più precise sui risultati. Vediamo in particolare il “Rapporto sensibilità”: in esso possiamo leggere quanto segue.

1. I prezzi ombra delle risorse, che sono la soluzione ottima del problema duale:

$$\begin{aligned} \min \quad & 1000\, y_1 + 400\, y_2 \\ & 3y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 7 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

cioè, $y^*_1 = 0$, $y^*_2 = 1{,}75$, con valore 700.

6	Celle variabili							
7			Valore	ridotto	oggettivo	consentito	consentito
8	Cella	Nome	finale	Costo	Coefficiente	Incremento	Decremento
9	B6		0	-0,5	3	0,5	1E+30
10	C6		100	0	7	1E+30	1
11							
12	Vincoli						
13			Valore	ombra	Vincolo	consentito	consentito
14	Cella	Nome	finale	Prezzo	a destra	Incremento	Decremento
15	A3		100	0	1000	1E+30	900
16	A4		400	1,75	400	3600	400

2. L'analisi di post-ottimalità relativa ai coefficienti della funzione obiettivo; la soluzione ottima di base resterà la stessa a condizione che: il prezzo unitario di vendita del vino da tavola aumenti al massimo di 0,5, e il prezzo unitario di vendita del vino da dessert diminuisca al massimo di 1.

6	Celle variabili						
7			Valore	ridotto	oggettivo	consentito	consentito
8	Cella	Nome	finale	Costo	Coefficiente	Incremento	Decremento
9	B6	Tavola	0	-0,5	3	0,5	1E+30
10	C6	Dess.	100	0	7	1E+30	0,999999999
11							
12	Vincoli						
13			Valore	ombra	Vincolo	consentito	consentito
14	Cella	Nome	finale	Prezzo	a destra	Incremento	Decremento
15	A3	uva A	100	0	1000	1E+30	900
16	A4	uva B	400	1,75	400	3600	400

3. L'analisi di post-ottimalità relativa ai termini noti; la soluzione ottima di base resterà la stessa a condizione che: la disponibilità di uva A diminuisca al massimo di 900, e la disponibilità di uva B aumenti al massimo di 3600 e diminuisca al massimo di 400.

Celle variabili

Cella	Nome	Valore finale	ridotto Costo	oggettivo Coefficiente	consentito Incremento	consentito Decremento
B6	Tavola	0	-0,5	3	0,5	1E+30
C6	Dess.	100	0	7	1E+30	0,999999999

Vincoli

Cella	Nome	Valore finale	ombra Prezzo	Vincolo a destra	consentito Incremento	consentito Decremento
A3	uva A	100	0	1000	1E+30	900
A4	uva B	400	1,75	400	3600	400

In accordo con quanto introdotto nell'esempio di interpretazione economica della dualità, presentiamo una possibile parziale lettura di questi dati.

Consideriamo la risorsa uva B: il suo prezzo ombra è 1,75. Allora:

• è conveniente acquistare l'uva B a un prezzo unitario p < 1,75; ciò garantirebbe un aumento del profitto (cioè del valore della soluzione ottima) pari a 1,75 – p per unità di uva B; questo vale però solo per una quantità non superiore a 3600 unità, dato che superato tale valore la soluzione ottima di base cambia.

• è conveniente vendere l'uva B a un prezzo unitario p > 1,75; ciò garantirebbe un aumento del profitto (cioè del valore della soluzione ottima) pari a p – 1,75 per unità di uva B; questo vale però solo per una quantità non superiore a 400 unità, dato che superato tale valore la soluzione ottima di base cambia.