Esempi sull'interpretazione economica della dualità

1) *Componendo risorse*

Un'azienda vinicola desidera produrre due tipi di vino: uno da tavola, uno da dessert. Il profitto che l'azienda trae dalla produzione di 1 unità di vino da tavola è 3, mentre dalla produzione di 1 unità di vino da dessert è 7. Tale produzione necessita di una particolare combinazione di due tipi di uva: diciamo di tipo A e di tipo B rispettivamente. Per produrre 1 unità di vino da tavola, si ha bisogno di 3 unità di uva di tipo A e di 2 unità di uva di tipo B. Per produrre 1 unità di vino da dessert, si ha bisogno di 1 unità di uva di tipo A e di 4 unità di uva di tipo B. Infine l'azienda ha a disposizione 1000 unità di uva di tipo A e 400 unità di uva di tipo B. Il problema è determinare le quantità di vino da tavola e da dessert da produrre in modo da massimizzare il profitto totale.

Variabili decisionali: x_1, x_2
x_1 = quantità di vino da tavola prodotta
x_2 = quantità di vino da dessert prodotta

$$
(1) \qquad \max \quad 3x_1 + 7x_2 \\
3x_1 + x_2 \leq 1000 \\
2x_1 + 4x_2 \leq 400 \\
x_1, x_2 \geq 0
$$

La soluzione ottima è $x^*_1 = 0$, $x^*_2 = 100$, con valore 700.

Si consideri di seguito il problema duale del problema (1).

$$
(2) \qquad \min \quad 1000\, y_1 + 400\, y_2 \\
3y_1 + 2y_2 \geq 3 \\
y_1 + 4y_2 \geq 7 \\
y_1, y_2 \geq 0
$$

La soluzione ottima è $y^*_1 = 0$, $y^*_2 = 7/4$, con valore 700.

Sia y_j* una componente della soluzione ottima del problema duale. Ricordando che a ogni vincolo del problema primale è associato una variabile del problema duale, sia b_j il termine noto del vincolo del problema primale associato alla variabile y_j, cioè la disponibilità della risorsa j. In particolare b_jy_j è un termine della funzione obiettivo del problema duale: all'ottimo esso vale $b_jy^*_j$.
Ora si assuma di poter far variare b_j : sia $b_j + \Delta b_j$.

- Se $\Delta b_j > 0$ (che significa un <u>acquisto</u> della risorsa j), allora per il Teorema della Dualità Forte il profitto ottimo varia di $y^*_j\Delta b_j \geq 0$ (nel caso di acquisto gratuito); ma in generale varia di $y^*_j\Delta b_j - y'_j\Delta b_j$, dove y'_j è il prezzo unitario di acquisto della risorsa j; perciò tale acquisto è conveniente solo se $y^*_j\Delta b_j - y'_j\Delta b_j > 0$, cioè solo se $y'_j < y^*_j$.
- Se $\Delta b_j < 0$ (che significa una <u>vendita</u> della risorsa j), allora per il Teorema della Dualità Forte il profitto ottimo varia di $y^*_j\Delta b_j \leq 0$ (nel caso di vendita gratuita); ma in generale varia di $y^*_j\Delta b_j + y'_j|\Delta b_j| = y^*_j\Delta b_j - y'_j\Delta b_j$, dove y'_j è il prezzo unitario di vendita della risorsa j; perciò tale vendita è conveniente solo se $y^*_j\Delta b_j - y'_j\Delta b_j > 0$, cioè solo se $y'_j > y^*_j$ (essendo $\Delta b_j < 0$).

Quindi la soluzione ottima del problema duale ($y^*_1, \ldots, y^*_m$) rappresenta il valore intrinseco di ogni risorsa j, per $j = 1, \ldots, m$. Tale valore è detto anche *prezzo ombra*, nel senso che:

- è conveniente <u>acquistare</u> la risorsa j (entro un certo limite di quantità), se la si acquista a un prezzo unitario che è <u>al di sotto del prezzo ombra y_j*</u>.
- è conveniente <u>vendere</u> la risorsa j (entro un certo limite di quantità), se la si vende a un prezzo unitario che è <u>al di sopra del prezzo ombra y_j*</u>.

<u>Osservazione</u>: i limiti di quantità entro i quali conviene acquistare/vendere una risorsa dipendono dal fatto che la soluzione ottima di base può cambiare per variazioni della disponibilità della risorsa, cioè del termine noto corrispondente; tali limiti sono calcolabili mediante semplici operazioni riportate nell'analisi di sensitività (o di post-ottimalità) e comunque sono calcolati dai software che risolvono i problemi di PL.

Tornando al nostro esempio si ha che:
y^*_1 = prezzo ombra dell'uva A
y^*_2 = prezzo ombra dell'uva B

Consideriamo ad esempio il prezzo ombra $y^*_2 = 7/4$ dell'uva di tipo B.
E' conveniente acquistare tale risorsa (entro un certo limite di quantità) ad un prezzo unitario

inferiore a 7/4, dato che ciò garantisce un aumento del profitto totale.

E' conveniente vendere tale risorsa (entro un certo limite di quantità) ad un prezzo unitario superiore a 7/4, dato che ciò garantisce un aumento del profitto totale.

E' indifferente acquistare o vendere tale risorsa (entro un certo limite di quantità) ad un prezzo unitario pari a 7/4, dato che ciò non cambia il profitto totale.

2) *Decomponendo risorse*

Una persona vuole fare una dieta. In particolare deve assumere due tipi di sostanze, cioè proteine e vitamine, che può ricavare comprando tre tipi di alimenti, cioè frutta, latte, uova. In dettaglio:

1 unità di frutta contiene: 0 u. di proteine, 7 u. di vitamine;

1 unità di latte contiene: 2 u. di proteine, 3 u. di vitamine;

1 unità di uova contiene: 5 u. di proteine, 1 u. di vitamine.

Il costo unitario della frutta, del latte e delle uova è rispettivamente di 10, 20, 10.

La dieta richiede di assumere almeno 15 unità di proteine e 25 unità di vitamine.

Il problema è determinare le quantità di frutta, latte, uova da acquistare in modo da minimizzare il costo totale.

Variabili decisionali: x_F, x_L, x_U

x_F = quantità di frutta da acquistare

x_L = quantità di latte da acquistare

x_U = quantità di uova da acquistare

$$
(1) \qquad \min \quad 10x_F + 20x_L + 10x_U
$$
$$
0x_F + 2x_L + 5x_U \geq 15
$$
$$
7x_F + 3x_L + 1x_U \geq 25
$$
$$
x_F, x_L, x_U \geq 0
$$

La soluzione ottima è $x^*_F = 3{,}14$, $x^*_L = 0$, $x^*_U = 3$, con valore 61,42.

Si consideri di seguito il problema duale del problema (1).

$$
(2) \qquad \max \quad 15\, y_1 + 25\, y_2
$$
$$
0y_1 + 7y_2 \leq 10
$$

$$2y_1 + 3y_2 \leq 20$$
$$5y_1 + 1y_2 \leq 10$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

La soluzione ottima è $y^*_1 = 1{,}71$ e $y^*_2 = 1{,}42$, con valore 61,42.

Con un argomentazione simile a quella dell'Esempio 1, si può verificare che la soluzione ottima del problema duale ($y^*_1, \ldots, y^*_m$) rappresenta il valore intrinseco y_j^* di ogni produzione j, per $j = 1, \ldots, m$ (proteine, vitamine). Tale valore è detto anche *prezzo ombra*, nel senso che:

- è conveniente acquistare la produzione j (entro un certo limite di quantità), se la si acquista a un prezzo unitario che è al di sotto del prezzo ombra y_j^*.

Osservazione: i limiti di quantità entro i quali conviene acquistare una produzione dipendono dal fatto che la soluzione ottima di base può cambiare per variazioni della richiesta della produzione, cioè del termine noto corrispondente; tali limiti sono calcolabili mediante semplici operazioni riportate nell'analisi di sensitività (o di post-ottimalità) e comunque sono calcolati dai software che risolvono i problemi di PL.

Tornando al nostro esempio si ha che:
y^*_1 = prezzo ombra delle proteine
y^*_2 = prezzo ombra delle vitamine

Consideriamo ad esempio il prezzo ombra $y^*_2 = 1{,}42$ delle vitamine.
E' conveniente acquistare tale produzione – cioè vitamine, ad esempio sotto forma di integratore alimentare – (entro certi limiti di quantità) ad un prezzo unitario inferiore a 1,42, dato che ciò garantisce una diminuzione della spesa totale.
E' indifferente acquistare tale produzione (entro un certo limite di quantità) ad un prezzo unitario pari a 1,42, dato che ciò non cambia la spesa totale.