Esempi di modelli di programmazione lineare (intera) 2022/2023

Una possibile descrizione di una possibile utilità della Ricerca Operativa è lo schema:

problema di ottimizzazione (informale) → modello matematico (formale) → risoluzione

che sintetizza quanto segue:

• primo passaggio: si parte da un dato problema di ottimizzazione (in termini informali) e si arriva possibilmente a un suo modello matematico (in termini formali); <u>tale passaggio si ottiene grazie all'abilità e all'esperienza umana</u>;

• secondo passaggio: si parte dal modello matematico di sopra e si arriva possibilmente alla sua risoluzione cioè al calcolo di una "soluzione ottima" del problema di ottimizzazione dato; <u>tale passaggio si ottiene grazie a software specifici.</u>

In particolare: per *problema di ottimizzazione* si intende un problema in cui un decisore deve scegliere, in un certo insieme di decisioni/soluzioni ammissibili, una decisione/soluzione che ottimizza una certa utilità; per *modello matematico*, in accordo con il libro di M. Fischetti, si intende un problema di Programmazione Matematica.

Un problema di *Programmazione Matematica* consiste nel calcolare

$$\min \{ f(x) : x \in X\}$$

dove:

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) un insieme detto *insieme delle soluzioni ammissibili* e

$f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione reale detta *funzione obiettivo*.

<u>Nota</u>: il "min" può essere sostituito con il "max" cambiando il segno della funzione.

Risolvere un problema di Programmazione Matematica significa calcolare una *soluzione ottima* del problema cioè una soluzione $x^* \in X$ tale che $f(x^*) \leq f(x)$ per ogni $x \in X$.

Un problema di Programmazione Matematica è detto di *Programmazione Lineare* se:

X è l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni e/o disequazioni lineari;

f è una funzione lineare.

Esempio:

$$\begin{array}{ll} \max & 12x_1 + 7x_2 \\ & 3\,x_1 + 2\,x_2 \leq 20 \\ & 5\,x_1 + 3\,x_2 \leq 50 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Un problema di Programmazione Matematica è detto di *Programmazione Lineare Intera* se:
$X = X' \cap \mathbb{Z}^n$ dove $X' \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) è l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni e/o disequazioni lineari;
f è una funzione lineare.

Esempio:

$$\begin{array}{ll} \max & 12x_1 + 7x_2 \\ & 3\,x_1 + 2\,x_2 \leq 20 \\ & 5\,x_1 + 3\,x_2 \leq 50 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \ \underline{\text{interi}} \end{array}$$

In altri termini un problema di Programmazione Lineare Intera può essere visto come una variante di un problema di Programmazione Lineare attraverso l'aggiunta di "vincoli di interezza" per le variabili – oppure solo per alcune variabili nel qual caso si parla di Programmazione Lineare Intera Mista.

La Programmazione Lineare (Intera), pur costituendo un aspetto basilare/parziale della Programmazione Matematica, sembra essere utile per modellare una larga fascia di problemi di ottimizzazione di natura reale.

Di seguito vedremo alcuni esempi del <u>primo passaggio dello schema</u> nel caso in cui il modello matematico è un problema di Programmazione Lineare (Intera).

A tal fine in genere si procede:
(i) definendo le *variabili decisionali* del problema;
(ii) definendo di conseguenza la *funzione obiettivo* e i *vincoli* (cioè le equazioni e/o disequazioni lineari e gli eventuali vincoli di interezza) del problema.

A. Esempi base

I seguenti sette esempi sono introdotti come riferimento (tipo costellazioni) ricordando che il primo passaggio dello schema si ottiene grazie all'abilità e all'esperienza umana.

A1. *Componendo risorse*

Una ditta produce due tipi di prodotto, siano A e B, componendo e lavorando opportunamente tre risorse, siano R, S, T. In dettaglio:

per produrre 1 unità di A servono: 2 u. di R, 3 u. di S, 1 u. di T;

per produrre 1 unità di B servono: 0 u. di R, 1 u. di S, 3 u. di T.

Il ricavo unitario dalla vendita di A e B è rispettivamente 15 e 20.

Il costo unitario delle risorse R, S, T è rispettivamente 2, 1, 3.

1a – *massimizzare ricavi, con risorse date*

Si hanno rispettivamente 100, 70, 80 unità di R, S, T. Il problema è determinare le quantità di A e B da produrre in modo da massimizzare il ricavo totale.

Variabili decisionali: x_A, x_B (unità rispettivamente di A e B da produrre).

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Modello:} & \max & 15\,x_A + 20\,x_B & & \\
 & & 2\,x_A & \leq 100 & \text{(disponibilità R)} \\
 & & 3\,x_A + 1\,x_B & \leq 70 & \text{(disponibilità S)} \\
 & & 1\,x_A + 3\,x_B & \leq 80 & \text{(disponibilità T)} \\
 & & x_A,\, x_B \geq 0 & & \\
 & & x_A,\, x_B\ \underline{\text{interi}} & & \text{(eventualmente)}
\end{array}
$$

1b – *minimizzare costi, con produzione data*

Bisogna produrre rispettivamente 50 e 70 unità di A e B. Il problema è determinare le quantità di R, S, T da acquistare in modo da minimizzare il costo totale. Tale problema si risolve direttamente mediante moltiplicazioni (le quantità sono: $2 \cdot 50 + 0 \cdot 70$; $3 \cdot 50 + 1 \cdot 70$; $1 \cdot 50 + 3 \cdot 70$), cioè ha una soluzione "forzata", non c'è da modellare.

A2. *Decomponendo risorse*

Una ditta produce due tipi di prodotto, siano A e B, decomponendo e lavorando opportunamente tre risorse, siano R, S, T. In dettaglio:

da 1 unità di R si ricavano: 2 u. di A, 3 u. di B;

da 1 unità di S si ricavano: 7 u. di A, 2 u. di B;

da 1 unità di T si ricavano: 4 u. di A, 0 u. di B.

Il ricavo unitario dalla vendita di A e B è rispettivamente 30 e 25.

Il costo unitario delle risorse R, S, T è rispettivamente 20, 40, 30.

2a – *massimizzare ricavi, con risorse date*

Si hanno rispettivamente 40, 80, 50 unità di R, S, T. Il problema è determinare le quantità di A e B da produrre in modo da massimizzare il ricavo totale.

Tale problema si risolve direttamente mediante moltiplicazioni (le quantità sono: $2 \cdot 40 + 7 \cdot 80 + 4 \cdot 50$; $3 \cdot 40 + 2 \cdot 80 + 0 \cdot 50$), cioè ha una soluzione “forzata”, non c’è da modellare.

2b – *minimizzare costi, con produzione data*

Bisogna produrre rispettivamente 80 e 100 unità di A e B. Il problema è determinare le quantità di R, S, T da acquistare in modo da minimizzare il costo totale.

Variabili decisionali: x_R, x_S, x_T (unità rispettivamente di R, S, T da acquistare).

Modello:	min	$20\,x_R + 40\,x_S + 30\,x_T$	
		$2\,x_R + 7\,x_S + 4\,x_T \geq 80$	(produzione di A)
		$3\,x_R + 2\,x_S + 0\,x_T \geq 100$	(produzione di B)
		$x_R, x_S, x_T \geq 0$	
		x_R, x_S, x_T <u>interi</u>	(eventualmente)

A3. *Assegnamento*

Bisogna eseguire *n* lavori avendo a disposizione *n* macchine. In particolare: ogni macchina esegue un solo lavoro, ogni lavoro è eseguito da una sola macchina. Per eseguire il lavoro *i*, la macchina *j* richiede un costo c_{ij}. Il problema è assegnare a ciascuna macchina un lavoro al fine di minimizzare il costo totale.

Variabili decisionali: x_{ij} per $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, n$;

x_{ij} avrà valore 1 se il lavoro i è assegnato alla macchina j;

x_{ij} avrà valore 0 se il lavoro i non è assegnato alla macchina j.

Modello: min $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$ per $j = 1, \dots, n$

(ogni macchina esegue un solo lavoro)

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ per $i = 1, \dots, n$

(ogni lavoro è eseguito da una sola macchina)

$x_{ij} \geq 0$ per $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$

$x_{ij} \leq 1$ per $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$

x_{ij} intero per $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$

A4. *Matching*

Un insieme N di n donne e un insieme M di m uomini si recano presso un'agenzia matrimoniale. Mediante colloqui e questionari, l'agenzia matrimoniale stabilisce che presumibilmente la donna i (per $i = 1, \dots, n$) è compatibile con un certo sottoinsieme M_i di M e che di conseguenza l'uomo j (per $j = 1, \dots, m$) è compatibile con un certo sottoinsieme N_j di N. Il problema è accoppiare il maggior numero possibile di persone.

Sia F l'insieme delle coppie (i, j) *compatibili*, cioè, $F = \{(i, j) : i \in N_j \text{ e } j \in M_i\}$

Variabili decisionali: x_{ij} per ogni coppia $(i, j) \in F$;

x_{ij} avrà valore 1 se la donna i è accoppiata all'uomo j;

x_{ij} avrà valore 0 se la donna i non è accoppiata all'uomo j.

Modello: max $\sum_{(i,j)\in F} x_{ij}$

$\sum_{(i,j)\in F} x_{ij} \leq 1$ per $i = 1, \dots, n$

(ogni donna è accoppiata al più a un uomo)

$\sum_{(i,j)\in F} x_{ij} \leq 1$ per $j = 1, \dots, m$

(ogni uomo è accoppiato al più a una donna)

$x_{ij} \geq 0$ per ogni $(i, j) \in F$

$x_{ij} \leq 1$ per ogni $(i, j) \in F$

x_{ij} intero per ogni $(i, j) \in F$

A5. *Riempimento* (*Packing*)

Un'azienda ha a disposizione un budget b per finanziare alcuni progetti. Essa può scegliere fra n progetti. Ognuno di tali progetti ha un costo a_i, per $i = 1, \ldots, n$. D'altro canto ognuno di tali progetti garantisce dopo un anno un profitto p_i, per $i = 1, \ldots, n$. Non è possibile finanziare parzialmente un progetto. Il problema è scegliere quali progetti finanziare in modo da massimizzare il profitto totale dopo un anno.

Variabili decisionali: x_i per $i = 1, \ldots, n$;

x_i avrà valore 1 se il progetto i è scelto;

x_i avrà valore 0 se il progetto i non è scelto.

Modello: max $p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b$

$x_i \geq 0$ per $i = 1, \ldots, n$

$x_i \leq 1$ per $i = 1, \ldots, n$

x_i intero per $i = 1, \ldots, n$

A6. *Copertura* (*Covering*)

In una scuola-lingue si insegnano m lingue. La scuola vuole convocare degli interpreti esterni in modo che per ognuna delle lingue insegnate sia convocato almeno un interprete qualificato. E' possibile scegliere fra un insieme N di n di interpreti, ognuno dei quali è qualificato solo per alcune lingue: in particolare, per ogni lingua j, sia N_j il sottoinsieme di N degli interpreti qualificati per la lingua j. Il problema è convocare il minor numero possibile di interpreti.

Variabili decisionali: x_i per $i = 1, \ldots, n$;

x_i avrà valore 1 se l'interprete i è scelto;

x_i avrà valore 0 se l'interprete i non è scelto.

Modello: min $\sum_{i=1}^{n} x_i$

$\sum_{i \in N_j} x_i \geq 1$ per $j = 1, \ldots, m$

(per ogni lingua esiste almeno un interprete)

$x_i \geq 0$ per $i = 1, \ldots, n$

$x_i \leq 1$ per $i = 1, \ldots, n$

x_i <u>intero</u> per $i = 1, \ldots, n$

A7. *Trasporti*

Ci sono s località sorgente e t località destinazione. Ogni località sorgente $i \in \{1, \ldots, s\}$ ha a disposizione $d_i \geq 0$ unità di un certo tipo di merce, e ogni destinazione $j \in \{1, \ldots, t\}$ richiede almeno $r_j \geq 0$ unità della stessa merce. Per ogni coppia (i, j), per $i \in \{1, \ldots, s\}$ e $j \in \{1, \ldots, t\}$, sono inoltre stabiliti il costo unitario di trasporto c_{ij} e la quantità massima trasportabile q_{ij}. Il problema è pianificare i trasporti in modo da minimizzare il costo totale.

Variabili decisionali: x_{ij} per $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, t$;
x_{ij} indica la quantità trasportata dalla sorgente i alla destinazione j.

Modello: min $\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} c_{ij} x_{ij}$

$\sum_{j=1}^{t} x_{ij} \leq d_i$ per $i = 1, \ldots, s$ (vincoli di disponibilità)

$\sum_{i=1}^{s} x_{ij} \geq r_j$ per $j = 1, \ldots, t$ (vincoli di richiesta)

$x_{ij} \leq q_{ij}$ per $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, t$
(vincoli di capacità)

$x_{ij} \geq 0$ per $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, t$

x_{ij} <u>intero</u> per $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, t$ (eventualmente)

B. Esercizi (sugli esempi base)

Formulare ognuno dei seguenti sette problemi in termini di programmazione lineare (intera). Ognuno di tali problemi è riconducibile a uno dei sette esempi base introdotti prima.

B1. Un libero professionista ha a disposizione ogni settimana 10 ore che pensa di dedicare all'allargamento della propria attività. In particolare, c'è la possibilità di prestare consulenza a cinque nuovi clienti, siano A, B, C, D, E. Ognuno di essi richiede una quantità di tempo lavorativo settimanale, come di seguito: $t_A = 4$, $t_B = 5$, $t_C = 4$, $t_D = 3$, $t_E = 1$. Quindi il libero professionista comunque non potrebbe prestare consulenza per tutti loro. In base al tipo di consulenza da svolgere, a ognuno può chiedere una parcella settimanale che comporta un ricavo, come di seguito: $p_A = 70$, $p_B = 30$, $p_C = 70$, $p_D = 40$, $p_E = 30$.
Il problema è scegliere i clienti a cui prestare consulenza in modo da massimizzare il ricavo totale.

B2. Una ditta decide di intraprendere 4 attività. A tale scopo ci sono a disposizione 4 agenzie già operanti. Per diversi motivi, ogni agenzia può gestire al più una sola di queste attività, e ogni attività può essere gestita al più da una sola di queste agenzie. Infine, si stima a priori che assegnare all'agenzia i (per $i = 1, \ldots, 4$) l'attività j (per $j = 1, \ldots, 4$) garantisca un profitto p_{ij}.
Il problema è assegnare ad ogni agenzia una attività in modo da massimizzare il profitto totale.
Variante: Con le ipotesi sopra indicate, si supponga che una delle agenzie debba essere chiusa per certi motivi. Il problema è scegliere quali attività intraprendere (dato che ora se ne possono intraprendere solo tre) in modo da massimizzare il profitto totale.

B3. Una persona vuole fare una dieta. In particolare deve assumere due tipi di sostanze, cioè proteine e vitamine, che può ricavare comprando tre tipi di alimenti, cioè frutta, latte, uova.
In dettaglio:
1 unità di frutta contiene: 0 u. di proteine, 7 u. di vitamine;
1 unità di latte contiene: 2 u. di proteine, 3 u. di vitamine;
1 unità di uova contiene: 5 u. di proteine, 1 u. di vitamine.
Il costo unitario di frutta, latte, uova è rispettivamente di 10, 20, 10.
La dieta richiede di assumere almeno 15 unità di proteine e 25 unità di vitamine.

Il problema è determinare le quantità di frutta, latte, uova da acquistare in modo da minimizzare il costo totale.

B4. Un'azienda vinicola desidera produrre due tipi di vino: uno da tavola, uno da dessert. Il profitto che l'azienda trae dalla produzione di 1 unità di vino da tavola è 3, mentre dalla produzione di 1 unità di vino da dessert è 7. Tale produzione necessita di una particolare combinazione di due tipi di uva: diciamo di tipo A e di tipo B rispettivamente. Per produrre 1 unità di vino da tavola, si ha bisogno di 3 unità di uva di tipo A, e di 2 unità di uva di tipo B. Per produrre 1 unità di vino da dessert, si ha bisogno di 1 unità di uva di tipo A, e di 4 unità di uva di tipo B. Infine, l'azienda ha a disposizione 1000 unità di uva di tipo A e 400 unità di uva di tipo B.
Il problema è determinare le quantità di vino da tavola e da dessert da produrre in modo da massimizzare il profitto totale.

B5. Una ditta che tratta sale marino ha 2 depositi, siano A e B, che riforniscono 4 suoi negozi. La disponibilità di sale di ogni deposito è pari rispettivamente a $d_{\mathrm{A}} = 190$ e $d_{\mathrm{B}} = 370$ unità. La richiesta di sale da parte di ogni negozio è pari rispettivamente a $r_1 = 130$, $r_2 = 140$, $r_3 = 100$, $r_4 = 70$ unità. Il costo unitario c_{ij} di trasporto dal deposito i al negozio j è pari a: $c_{\mathrm{A}1} = 2$, $c_{\mathrm{A}2} = 3$, $c_{\mathrm{A}3} = 3$, $c_{\mathrm{A}4} = 1$, $c_{\mathrm{B}1} = 3$, $c_{\mathrm{B}2} = 2$, $c_{\mathrm{B}3} = 1$, $c_{\mathrm{B}4} = 2$. (Opzionale: Inoltre, per motivi logistici, il deposito A non può rifornire ogni singolo negozio con più di 100 unità, mentre il deposito B non può rifornire ogni singolo negozio con più di 150 unità). Il problema è pianificare i rifornimenti dei negozi in modo da minimizzare il costo totale.

B6. Un'agenzia vuole aprire delle filiali in una certa regione, che ha cinque province, siano 1, 2, 3, 4, 5. Per ogni provincia $i \in \{1, \ldots, 5\}$ c'è la possibilità di aprire una filiale F_i nel capoluogo della provincia i. In base alle caratteristiche di tali eventuali filiali e del territorio, si stima che:
la eventuale filiale F_1 servirebbe solo le province 1, 3;
la eventuale filiale F_2 servirebbe solo le province 2, 3;
la eventuale filiale F_3 servirebbe solo le province 3, 4;
la eventuale filiale F_4 servirebbe solo le province 1, 2, 4;
la eventuale filiale F_5 servirebbe solo le province 2, 3, 5.
Il problema è determinare quali filiali aprire, garantendo che ogni provincia sia servita, in modo da minimizzare il totale delle filiali aperte (cioè in modo da aprirne il meno possibile);

Variante: si assuma che aprire la filiale F_i comporti un costo c_i (i = 1, …, 5): determinare quali filiali aprire, garantendo che ogni provincia sia servita, in modo da minimizzare il costo totale.

B7. In un'agenzia di viaggio si presentano 5 clienti. Le offerte dell'agenzia riguardano un insieme di 3 località. Ogni cliente gradirebbe recarsi in vacanza solo in un certo sottoinsieme delle località: il cliente 1 solo nella località 3; il cliente 2 solo nelle località 1, 3; il cliente 3 solo nella località 1; il cliente 4 solo nelle località 1, 3; il cliente 5 solo nelle località 1, 2. Per ogni località c'è a disposizione solo 1 posto.
Il problema è accontentare il maggior numero possibile di clienti.
Variante 1: Con le ipotesi sopra indicate, si supponga che per ogni località j ci siano a disposizione solo b_j posti: nello specifico, per la località 1 ci sono 4 posti, per la località 2 ci sono 2 posti, per la località 3 di sono 2 posti. Il problema è accontentare il maggior numero possibile di clienti.
Variante 2: Con le ipotesi sopra indicate, si supponga che mandare un cliente in una località j renda all'agenzia un profitto p_j: nello specifico, la località 1 rende un profitto 150, la località 2 rende un profitto 250, la località 3 rende un profitto 100. Un problema alternativo da risolvere può essere il seguente: massimizzare il profitto dell'agenzia.

C. Cinque esempi specifici

Di seguito sono riportati, in termini di programmazione lineare (intera), i modelli di cinque problemi specifici che saranno ripresi nella seconda parte del programma del corso.

C1. *Cammino di costo minimo*

Sia $G = (V, A)$ un grafo orientato e siano s e t due vertici di G. Ad ogni arco $(i, j) \in A$ è associato un costo $q_{ij} \geq 0$. Il costo di un cammino da s a t è dato dalla somma dei costi degli archi che formano il cammino.
Determinare un cammino da s a t di costo minimo.

Soluzione

Variabili decisionali: x_{ij} per ogni arco $(i, j) \in A$;
x_{ij} avrà valore 1 se l'arco (i, j) sta nel cammino;
x_{ij} avrà valore 0 se l'arco (i, j) non sta nel cammino.

Modello: min $\sum_{(i,j)\in A} q_{ij} x_{ij}$

$$\sum_{(s,j)\in A} x_{sj} = 1$$

$$\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = 0 \quad \text{per ogni vertice } i \neq s, t \text{ di } G$$

$x_{ij} \geq 0$ per ogni $(i, j) \in A$

$x_{ij} \leq 1$ per ogni $(i, j) \in A$

x_{ij} <u>intero</u> per ogni $(i, j) \in A$

C2. *Pianificazione di progetti*

Un *progetto* è un insieme di n attività A_i, per $i \in \{1, \ldots, n\}$, ciascuna con una durata $d_i \geq 0$ nota. Fra alcune attività sono specificate relazioni di precedenza $A_i < A_j$ ad indicare che l'istante di completamento dell'attività A_i deve precedere l'istante di inizio dell'attività A_j.
Pianificare le attività in modo da minimizzare il tempo di completamento del progetto.

Soluzione

Variabili decisionali: t_i^- e t_i^+ per $i = 1, \ldots, n$;
t_i^- indica l'istante in cui l'attività A_i ha inizio;

t_i^+ indica l'istante in cui l'attività A_i ha termine;

si introduce anche una variabile ausiliaria y che avrà valore $y = \max\{t_i^+ : i = 1, \ldots, n\}$

Modello: min y

$t_i^+ \geq t_i^- + d_i$ per $i = 1, \ldots, n$

$t_i^+ \leq t_j^-$ per ogni relazione di precedenza $A_i < A_j$

$t_i^- \geq 0$ per $i = 1, \ldots, n$

$t_i^+ \leq y$ per $i = 1, \ldots, n$

C3. *Massimo flusso*

Sia $G = (V, A)$ un grafo orientato e siano s e t due vertici di G. Ad ogni arco $(i, j) \in A$ è associata una capacità $b_{ij} \geq 0$. Un flusso da s a t è un'assegnazione di valori $x_{ij} \geq 0$ per ogni arco $(i, j) \in A$ tale che:

:: $\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = 0$ per ogni vertice $i \neq s, t$ di G (cioè per ogni vertice $i \neq s, t$ di G, la somma di ciò che entra è pari alla somma di ciò che esce);

:: $x_{ij} \leq b_{ij}$ per ogni arco $(i, j) \in A$.

Il valore di un flusso da s a t è $\sum_{(s,j)\in A} x_{sj}$.

Determinare un flusso da s a t di valore massimo.

Soluzione

Variabili decisionali: x_{ij} per ogni arco $(i, j) \in A$;

x_{ij} indica l'assegnazione di flusso per l'arco (i, j).

Modello: max $\sum_{(s,j)\in A} x_{sj}$

$\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = 0$ per ogni vertice $i \neq s, t$ di G

$x_{ij} \leq b_{ij}$ per ogni $(i, j) \in A$

$x_{ij} \geq 0$ per ogni $(i, j) \in A$

x_{ij} <u>intero</u> per ogni $(i, j) \in A$ (eventualmente)

C4. *Programmazione della produzione*

Un'azienda deve produrre un bene, per soddisfare un piano di vendita di 4 mesi, che stabilisce le vendite da effettuare alla fine di ogni mese. La capacità produttiva varia da mese a mese, così come il costo unitario di produzione e il costo unitario di giacenza (alla fine di ogni mese nel magazzino di cui l'azienda può servirsi). Non ci sono giacenze in magazzino all'inizio, né si desidera averne alla fine dei 4 mesi. In dettaglio:

Mese	vendite da effettuare	capacità prod.	costo prod.	costo giacenza
1	20 unità	40 unità	34	2
2	30 unità	50 unità	36	3
3	50 unità	30 unità	32	2
4	40 unità	50 unità	38	

Determinare le quantità di bene da produrre in ogni mese in modo da minimizzare il costo totale.

Soluzione

Variabili decisionali: x_i per i = 1, 2, 3, 4;

x_i indica la quantità di prodotto da produrre nel mese i.

Modello: min $34x_1 + 36x_2 + 32x_3 + 38x_4 + 2(x_1 - 20) + 3(x_1 + x_2 - 50) +$

$+ 2(x_1 + x_2 + x_3 - 100)$

$x_1 \leq 40$

$x_2 \leq 50$

$x_3 \leq 30$

$x_4 \leq 50$

$x_1 \geq 20$

$x_1 + x_2 \geq 50$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 100$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 140$

$x_i \geq 0$ per i = 1, 2, 3, 4

x_i intero per i = 1, 2, 3, 4 (eventualmente)

C5. *Localizzazione di impianti*

Bisogna attivare un certo numero di impianti, da scegliere fra m potenziali impianti, che dovranno rifornire n clienti. Attivare il potenziale impianto j costa f_j. Ogni impianto si intende abbia capacità di rifornimento illimitata. Ogni cliente sarà collegato ad un unico impianto: in particolare collegare un cliente i ad un impianto j comporta un costo c_{ij}.

Scegliere quali impianti attivare in modo da minimizzare i costi complessivi di attivazione e di collegamento ai clienti.

Soluzione

Variabili decisionali: x_{ij} per $i = 1, \dots, n$, e $j = 1, \dots, m$; y_j per $j = 1, \dots, m$;

x_{ij} avrà valore 1 se il cliente i è collegato all'impianto j;

x_{ij} avrà valore 0 se il cliente i non è collegato all'impianto j;

y_j avrà valore 1 se l'impianto j è attivato;

y_j avrà valore 0 se l'impianto j non è attivato.

Modello: min $$\sum_{j=1}^{m} f_j y_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1$ per $i = 1, \dots, n$

(ogni cliente è collegato ad un unico impianto)

$x_{ij} \le y_j$ per $i = 1, \dots, n$, e $j = 1, \dots, m$

(ogni impianto si attiva se c'è almeno un cliente collegato)

$x_{ij} \ge 0$ per $i = 1, \dots, n$, e $j = 1, \dots, m$

$x_{ij} \le 1$ per $i = 1, \dots, n$, e $j = 1, \dots, m$

x_{ij} <u>intero</u> per $i = 1, \dots, n$, e $j = 1, \dots, m$

$y_j \ge 0$ per $j = 1, \dots, m$

$y_j \le 1$ per $j = 1, \dots, m$

y_j <u>intero</u> per $j = 1, \dots, m$

D. Esempi "con la grande M"

D1. *Prima variante a "problema dei trasporti":* ***costi fissi****.*

Nel problema dei trasporti la funzione costo per il trasporto di merce da sorgente i a deposito j è $c_{ij}x_{ij}$. Si consideri la variante in cui tale funzione sia $F_{ij} + c_{ij}x_{ij}$, dove $F_{ij} \geq 0$ rappresenta un costo fisso (un costo di avviamento), tale che $F_{ij} \geq 0$ se $x_{ij} > 0$ (cioè se il trasporto fra i e j avviene) e $F_{ij} = 0$ se $x_{ij} = 0$ (cioè se il trasporto fra i e j non avviene).

Soluzione

Si introducono nuove variabili decisionali: y_{ij} per $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, t$;

y_{ij} avrà valore 1 se si trasporta merce da sorgente i a destinazione j (cioè se $x_{ij} > 0$)

y_{ij} avrà valore 0 se non si trasporta merce da sorgente i a destinazione j (cioè se $x_{ij} = 0$)

Modello: min $\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} F_{ij}y_{ij}$ [<u>variazione in funzione obiettivo</u>]

$\sum_{j=1}^{t} x_{ij} \leq d_i$ per $i = 1, \ldots, s$ (vincoli di disponibilità)

$\sum_{i=1}^{s} x_{ij} \geq r_j$ per $j = 1, \ldots, t$ (vincoli di richiesta)

$x_{ij} \geq 0$ per $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, t$

x_{ij} <u>intero</u> per $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, t$ (eventualmente)

[<u>aggiunta di vincoli</u>]

$x_{ij} \leq M\, y_{ij}$ per $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, t$

$y_{ij} \geq 0$ per $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, t$

$y_{ij} \leq 1$ per $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, t$

y_{ij} <u>intero</u> per $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, t$

Commento sul vincolo $x_{ij} \leq M\, y_{ij}$:

M è un numero molto grande (più grande di ogni possibile termine della formulazione);

se $x_{ij} > 0$, allora $x_{ij} \leq M\, y_{ij}$ implica $y_{ij} = 1$ (quindi il costo fisso nella f. obiettivo è attivato);

se $x_{ij} = 0$, allora $x_{ij} \leq M\, y_{ij}$ è sempre soddisfatto, non crea problemi (si osservi che essendo il termine F_{ij} positivo, la f. obiettivo determinerà $y_{ij} = 0$).

D2. *Seconda variante a "problema dei trasporti":* ***lotti minimi***.

Nel problema dei trasporti ogni quantità effettivamente trasportata x_{ij} (cioè per cui $x_{ij} > 0$) non è vincolata ad assumere almeno un certo valore. Si consideri la variante in cui ogni quantità effettivamente trasportata x_{ij} (cioè per cui $x_{ij} > 0$) debba essere maggiore o uguale a un valore L_{ij} che rappresenta il lotto minimo da trasportare in caso di effettivo trasporto.

Soluzione

Si introducono nuove variabili decisionali: y_{ij} per $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, t$;

y_{ij} avrà valore 1 se si trasporta merce da sorgente i a destinazione j (cioè se $x_{ij} > 0$)

y_{ij} avrà valore 0 se non si trasporta merce da sorgente i a destinazione j (cioè se $x_{ij} = 0$)

Modello: min $\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} c_{ij} x_{ij}$

$\sum_{j=1}^{t} x_{ij} \le d_i$ per $i = 1, \ldots, s$ (vincoli di disponibilità)

$\sum_{i=1}^{s} x_{ij} \ge r_j$ per $j = 1, \ldots, t$ (vincoli di richiesta)

$x_{ij} \ge 0$ per $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, t$;

x_{ij} <u>intero</u> per $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, t$. (eventualmente)

[<u>aggiunta di vincoli</u>]

$x_{ij} \le M\, y_{ij}$ per $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, t$

$x_{ij} \ge L_{ij}\, y_{ij}$ per $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, t$

$y_{ij} \ge 0$ per $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, t$

$y_{ij} \le 1$ per $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, t$

y_{ij} <u>intero</u> per $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, t$

Commento sui vincoli $x_{ij} \le M\, y_{ij}$ e $x_{ij} \ge L_{ij}\, y_{ij}$:

M è un numero molto grande (più grande di ogni possibile termine della formulazione);

se $x_{ij} > 0$, allora $x_{ij} \le M\, y_{ij}$ implica $y_{ij} = 1$ e di conseguenza $x_{ij} \ge L_{ij}\, y_{ij}$ diventa $x_{ij} \ge L_{ij}$;

se $x_{ij} = 0$, allora nessun problema è creato (si osservi che $0 \ge L_{ij}\, y_{ij}$ implica $y_{ij} = 0$, mentre $0 \le M\, y_{ij}$ è sempre soddisfatto).

D3. *Schedulazione su un processore (con deadlines e release times):* ***vincoli disgiuntivi***.

Bisogna far eseguire n lavori ad un processore, che ne può eseguire uno alla volta.

Ogni lavoro i, per $i \in \{1, \ldots, n\}$, è caratterizzato da:

p_i = tempo di processamento;

r_i = istante prima del quale il lavoro i non può iniziare (*release time*);

d_i = istante entro il quale il lavoro i deve essere completato (*deadline*).

Problema: assegnare al processore una sequenza dei lavori, rispettando i release times e i deadlines, in modo da minimizzare la somma degli istanti di completamento delle lavorazioni.

Soluzione

Variabili decisionali: C_i per $i = 1, \ldots, n$; x_{ij} per $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, n$ ($\neq i$);

C_i = istante di completamento del lavoro i;

x_{ij} avrà valore 1 se il lavoro i è eseguito prima del lavoro j

x_{ij} avrà valore 0 se il lavoro i non è eseguito prima del lavoro j

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} C_i$$

$$\begin{array}{ll}
C_i \geq r_i + p_i & \text{per } i = 1, \ldots, n \\
C_i \leq d_i & \text{per } i = 1, \ldots, n \\
C_i \leq C_j - p_j + M\,(1 - x_{ij}) & \text{per } i = 1, \ldots, n \text{ e } j = 1, \ldots, n\ (\neq i) \\
C_j \leq C_i - p_i + M\,x_{ij} & \text{per } i = 1, \ldots, n \text{ e } j = 1, \ldots, n\ (\neq i) \\
x_{ij} \geq 0 & \text{per } i = 1, \ldots, n \text{ e } j = 1, \ldots, n\ (\neq i) \\
x_{ij} \leq 1 & \text{per } i = 1, \ldots, n \text{ e } j = 1, \ldots, n\ (\neq i) \\
x_{ij}\ \underline{\text{intero}} & \text{per } i = 1, \ldots, n \text{ e } j = 1, \ldots, n\ (\neq i)
\end{array}$$

Commento sui due vincoli $C_i \leq C_j - p_j + M\,(1 - x_{ij})$ e $C_j \leq C_i - p_i + M\,x_{ij}$:

M è un numero molto grande (più grande di ogni possibile termine della formulazione);

se $x_{ij} = 1$ (cioè i precede j), allora si ha $C_i \leq C_j - p_j$ (che è un vincolo sensato/utile per il problema) e $C_j \leq C_i - p_i + M$ (che diventa un vincolo sempre soddisfatto);

se $x_{ij} = 0$ (cioè i è preceduto da j), allora si ha $C_i \leq C_j - p_i + M$ (che diventa un vincolo sempre soddisfatto) e $C_j \leq C_i - p_i$ (che è un vincolo sensato/utile per il problema).

E. Altri esempi

E1. Produzione su una macchina

Una macchina M che lavora non più di 45 ore alla settimana può produrre 3 tipi di prodotto, P_1, P_2, P_3. Per ciascun tipo di prodotto sono noti: il ricavo unitario, la produzione effettuata da M in 1 ora, la produzione massima effettuabile da M in una settimana (come di seguito).

	ricavo unitario	produzione in 1 ora	produzione max settimanale
P_1	4	50 pezzi	1000 pezzi
P_2	12	25 pezzi	500 pezzi
P_3	3	75 pezzi	1500 pezzi

Determinare le quantità di P_1, P_2, P_3 da produrre in una settimana in modo da massimizzare il ricavo totale.

E2. Produzione in due stabilimenti

Una casa automobilistica dispone di 2 stabilimenti dove vengono prodotti 4 tipi di automobili. La capacità produttiva dei 2 stabilimenti è rispettivamente pari a 8000 e 12000 automobili (si intende che, riguardo la capacità produttiva, per ogni stabilimento è indifferente produrre una automobile di un certo tipo oppure di un altro), mentre la quantità (esatta) da produrre per ogni tipo di automobile è rispettivamente pari a 5000, 4800, 3800, 6400 unità. Produrre nello stabilimento i una automobile di tipo j garantisce un profitto p_{ij} : tali valori p_{ij} sono riportati nella tabella di seguito.

		automobili			
		1	2	3	4
stabilimenti	1	2	3	4	1
	2	2	2	6	2

Determinare le quantità di automobili da produrre in ogni stabilimento in modo da massimizzare il profitto totale.

E3. Scelta dei processi

Una raffineria può utilizzare due procedimenti di raffinazione. Nel procedimento A, 1 u. di greggio libico e 2 u. di greggio nigeriano producono 5 u. di benzina e 2 u. di gasolio. Nel procedimento B, 4 u. di greggio libico e 2 u. di greggio nigeriano producono 3 u. di benzina e 8 u. di gasolio. Le disponibilità di greggio sono: 100 u. di greggio libico e 150 u. di greggio nigeriano. Le vendite previste (cioè le quantità minime da produrre) sono: 200 u. di benzina e 75 u. di gasolio; i profitti unitari sono p_B e p_G rispettivamente.
Determinare quante volte utilizzare ognuno dei processi A e B in modo da massimizzare il profitto totale.
(suggerimento: definire variabili decisionali x_1 e x_2 che indicano rispettivamente quante volte usare ognuno dei processi A e B)

E4. Pubblicità

Un'agenzia pubblicitaria ha annunciato di essere in grado di investire in modo ottimo il denaro dei suoi clienti usando la programmazione lineare.
Ci sono un insieme *N* di *n* audience (esempio: i single, le coppie sposate, ecc.) e un insieme *M* di *m* mezzi pubblicitari (esempio: periodici, radio, TV, ecc.). Per ogni audience *i* (per *i* = 1, …, *n*) il cliente desidera un livello di esposizione E_i che indica il numero di persone appartenenti all'audience *i* da raggiungere. Per ogni audience *i* (per *i* = 1, …, *n*) e per ogni mezzo pubblicitario *j* (per *j* = 1, …, *m*) si definisce un coefficiente a_{ij} che indica il numero di persone appartenenti alla *i*-esima audience che vendono raggiunte quando si spende 1 Euro nel *j*-esimo mezzo pubblicitario. In che modo l'agenzia può usare la programmazione lineare?
(suggerimento: definire variabili decisionali x_j = somma destinata al mezzo pubblicitario *j*).

Soluzioni

E1. Variabili decisionali: x_i per $i = 1, 2, 3$;
x_i indica la quantità di prodotto P_i da produrre (in una settimana).

Modello: max $4x_1 + 12x_2 + 3x_3$

$x_1 \leq 1000$

$x_2 \leq 500$

$x_3 \leq 1500$

$(1/50)\, x_1 + (1/25)\, x_2 + (1/75)\, x_3 \leq 45$

$x_i \geq 0$ per $i = 1, 2, 3$

x_i intero per $i = 1, 2, 3$

E2. Variabili decisionali: x_{ij} per $i = 1, 2$, e $j = 1, 2, 3, 4$;

x_{ij} indica la quantità prodotta nello stabilimento i di automobili di tipo j.

Modello: max $2x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 1x_{14} + 2x_{21} + 2x_{22} + 6x_{23} + 2x_{24}$

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 8000$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 12000$

$x_{11} + x_{21} = 5000$

$x_{12} + x_{22} = 4800$

$x_{13} + x_{23} = 3800$

$x_{14} + x_{24} = 6400$

$x_{ij} \geq 0$ per $i = 1, 2$, e $j = 1, 2, 3, 4$

x_{ij} <u>intero</u> per $i = 1, 2$, e $j = 1, 2, 3, 4$ (eventualmente)

E3. max $p_B\,(5x_1 + 3x_2) + p_G\,(2x_1 + 8x_2)$

$x_1 + 4x_2 \leq 100$

$2x_1 + 2x_2 \leq 150$

$5x_1 + 3x_2 \geq 200$

$2x_1 + 8x_2 \geq 75$

$x_1, x_2 \geq 0$

E4. min $\sum_{j=1}^{m} x_j$

$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_j \geq E_i$ $\quad i = 1, \ldots, n$

$x_j \geq 0$ $\quad j = 1, \ldots, m$

Appendice: esempi in ambito sanitario

In letteratura esistono molti articoli sulle possibili applicazioni della Ricerca Operativa allo studio di problemi in ambito sanitario; in particolare sembra che l'utilità di tali possibili applicazioni, che sembrano comunque da adattare a realtà specifiche, sia quella di fornire un supporto alle decisioni.

http://www.choir.utwente.nl/en/orchestra/
http://orahs.di.unito.it/

Di seguito riportiamo alcune possibili applicazioni che usano la Programmazione Lineare (Intera).

1. Turni in ospedale (cfr. libro M. Fischetti; inoltre per diversi aspetti cfr. [a2] e [a8])
Bisogna definire i turni degli infermieri. Ogni giorno è necessaria la presenza di un certo numero di infermieri. In particolare il turno di un infermiere dura cinque giorni consecutivi di lavoro seguiti da due giorni consecutivi di riposo. Il problema è minimizzare il numero degli infermieri coinvolti.

Parametri:
:: sia $D = \{1, \ldots, 7\}$ l'insieme dei giorni della settimana;
:: per $i = 1, \ldots, 7$, sia r_i la richiesta stimata di infermieri per il giorno i;
:: i turni sono del tipo: cinque giorni lavorativi consecutivi, seguiti da due giorni di riposo.
Variabili decisionali:
x_i per $i = 1, \ldots, 7$;
$x_i =$ numero di infermieri che inizieranno il turno nel giorno i;
Modello:

$$\min \sum_{i=1}^{7} x_i$$

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + \ldots + x_5 \geq r_5\\
&x_2 + x_3 + \ldots + x_6 \geq r_6\\
&x_3 + x_4 + \ldots + x_7 \geq r_7\\
&x_4 + x_5 + \ldots + x_1 \geq r_1\\
&x_5 + x_6 + \ldots + x_2 \geq r_2\\
&x_6 + x_7 + \ldots + x_3 \geq r_3\\
&x_7 + x_1 + \ldots + x_4 \geq r_4\\
&x_i \geq 0\\
&x_i \ \underline{\text{intero}}
\end{aligned}$$

2. Sala operatoria (cfr. [a9] slide 22-28; inoltre per diversi aspetti cfr. [a1] e [a6])

Nella sala operatoria di un reparto di Ortopedia devono essere eseguite delle operazioni. La durata giornaliera della disponibilità della sala operatoria è nota. Le durate delle operazioni sono note mediante dati storici. Il problema è determinare una sequenza delle operazioni da eseguire, con l'obiettivo di minimizzare il numero di giorni in cui la sala operatoria è utilizzata.

Parametri:

:: sia $P = \{1, \ldots, n\}$ l'insieme delle operazioni da effettuare;

:: per $i = 1, \ldots, n$, sia d_i la durata stimata (in ore) per l'operazione i;

:: sia $G = \{1, \ldots, m\}$ l'insieme dei giorni in un orizzonte temporale di m giorni;

:: per $j = 1, \ldots, m$, sia K_j il tempo (in ore) in cui è possibile utilizzare la sala operatoria nel giorno j.

Variabili decisionali:

x_{ij} per $i = 1, \ldots, n$, e per $j = 1, \ldots, m$;

$x_{ij} = 1$ se l'operazione i è effettuata nel giorno j;

$x_{ij} = 0$ altrimenti;

y_j per $j = 1, \ldots, m$;

$y_j = 1$ se la sala operatoria è utilizzata nel giorno j;

$y_j = 0$ altrimenti;

Modello:

$$\min \quad \sum_{j=1}^{m} y_j$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad \text{per } i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i x_{ij} \le K_j \qquad \text{per } j = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le M y_j \qquad \text{per } i = 1, \ldots, n \text{ e per } j = 1, \ldots, m$$

(dove M è uno scalare molto grande)

$x_{ij} \in \{0, 1\}$ per $i = 1, \ldots, n$ e per $j = 1, \ldots, m$

$y_j \in \{0, 1\}$ per $j = 1, \ldots, m$

3. Allocazione di pazienti in reparti (per diversi aspetti cfr. [a8])

Il problema è allocare il maggior numero possibile di persone, fra quelle che chiedono di essere ricoverate in reparti, tenendo conto che ogni reparto ha a disposizione solo un certo numero di posti e che ogni persona può essere ricoverata solo in certi reparti.

Parametri:

:: sia $P = \{1, \ldots, n\}$ l'insieme delle persone che deve essere ricoverata in ospedale;

:: sia $R = \{1, \ldots, m\}$ l'insieme dei reparti dell'ospedale;

:: per $j = 1, \ldots, m$, sia d_j la disponibilità di posti nel reparto j;

:: sia $F = \{(i, j)$: la persona i può essere ricoverata nel reparto $j\}$

(cioè F è l'insieme delle coppie persona/reparto compatibili, considerando il fatto che ogni persona può essere ricoverata solo in alcuni reparti, per diversi motivi ad esempio per evitare un contagio);

Variabili decisionali:

x_{ij} per ogni $(i, j) \in F$;

$x_{ij} = 1$ se la persona i è assegnata al reparto j;

$x_{ij} = 0$ se la persona i non è assegnata al reparto j.

Modello: max $\displaystyle\sum_{(i,j)\in F} x_{ij}$

$$\sum_{(i,j)\in F} x_{ij} \leq 1 \qquad \text{per } i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{(i,j)\in F} x_{ij} \leq d_j \qquad \text{per } j = 1, \ldots, m$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \text{per ogni } (i, j) \in F$$

<u>4. Localizzazione di CUP o di Guardie Mediche</u> (cfr. libro M. Fischetti)

Il problema è stabilire in quali quartieri di una grande città istallare dei CUP, con il vincolo che ogni utente possa raggiungere un CUP in un tempo non superiore a un tempo fissato, con l'obiettivo di istallarne il minor numero possibile.

Lo stesso problema può essere posto con riferimento a comuni di una regione invece che a quartieri di una grande città e con riferimento alle Guardie Mediche invece che ai CUP.

Parametri:

:: sia $Q = \{1, \ldots, n\}$ l'insieme dei quartieri di una grande città;

:: per $i = 1, \ldots, n$ e per $j = 1, \ldots, n$, sia t_{ij} il tempo medio che occorre per andare dal quartiere i al quartiere j;

:: sia T il tempo massimo tollerato;

:: per $i = 1, \ldots, n$, sia $R(i) = \{j \in Q: t_{ij} \leq T\}$, cioè $R(i)$ è l'insieme dei quartieri raggiungibili dal quartiere i in un tempo $\leq T$.

Variabili decisionali:

x_i per i = 1, …, n;

x_i = 1 se nel quartiere i è istallato un CUP;

x_i = 0 altrimenti.

Modello:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{j \in R(i)} x_j \geq 1 \qquad \text{per } i = 1, \dots, n$$

$$x_i \in \{0, 1\} \qquad \text{per } i = 1, \dots, n$$

5. Acquisto di macchinari

Il problema è acquistare nuovi macchinari ospedalieri, con un budget fissato, con l'obiettivo di massimizzare l'utilità dei macchinari acquistati (dove l'*utilità* di un macchinario può essere intesa come il numero delle persone che, secondo una stima, beneficeranno di quel macchinario in un certo orizzonte temporale).

Parametri:

:: sia M = {1, …, n} l'insieme dei macchinari eventualmente da acquistare;

:: sia b il budget a disposizione per tali acquisti;

:: per i = 1, …, n: sia c_i il *costo* del macchinario i, e sia u_i l'*utiltà* del macchinario i (intesa come il numero delle persone che, secondo una stima, beneficeranno di quel macchinario in un certo orizzonte temporale).

Variabili decisionali:

x_i per i = 1, …, n;

x_i = 1 se il macchinario i è acquistato;

x_i = 0 altrimenti.

Modello:

$$\max \quad \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leq b \qquad \text{per } i = 1, \dots, n$$

$$x_i \in \{0, 1\} \qquad \text{per } i = 1, \dots, n$$

6. Ridefinizione della rete ospedaliera (tagli di risorse)

Il problema è ridefinire i reparti della rete ospedaliera di un Regione a seguito di tagli di risorse. Per semplicità, fissiamo un solo tipo di reparto, ad esempio il tipo di reparto di Ortopedia.

Parametri:
:: $R = \{R_1, \ldots, R_n\}$ = insieme dei reparti di Ortopedia della Regione;
:: $D = \{D_1, \ldots, D_m\}$ = insieme di distretti [indicativi] in cui è divisa la Regione;
:: r_i = numero massimo di pazienti che si stima sia possibile ricoverare nel reparto R_i (per $i = 1, \ldots, n$) in un certo orizzonte temporale;
:: d_j = numero di pazienti (attesi) che si stima siano da ricoverare in uno fra i reparti in R (cioè in un reparto di Ortopedia) dal distretto D_j (per $j = 1, \ldots, m$) in un certo orizzonte temporale;
:: C_i = "costo fisso" = costo stimato per la sola apertura del reparto R_i (per $i = 1, \ldots, n$) in un certo orizzonte temporale;
:: c_{ij} = "costo marginale" = costo stimato per ricoverare nel reparto R_i (per $i = 1, \ldots, n$) un paziente del distretto D_j (per $j = 1, \ldots, m$) [tale costo può essere ad esempio inteso come $c_i + q_{ij}$ dove: c_i è il costo stimato sostenuto dalla Regione per ricoverare nel reparto R_i un generico paziente, e q_{ij} è il costo stimato sostenuto dal paziente del distretto D_j per essere ricoverato nel reparto R_i]

Problema: individuare quali reparti eventualmente chiudere fra $R_1, \ldots, R_n$ nel contesto di una gestione dei ricoveri che garantisca a ogni paziente (atteso) il ricovero presso uno fra i reparti in R e che minimizzi la somma dei "costi fissi" e dei "costi marginali".

Variabili decisionali:
x_{ij} per $i = 1, \ldots, n$ e per $j = 1, \ldots, m$
y_i per $i = 1, \ldots, n$
dove:
x_{ij} = numero di pazienti (attesi) ricoverati nel reparto R_i dal distretto D_j
$y_i = 1$ se il reparto R_i è da non chiudere
$y_i = 0$ se il reparto R_i è da chiudere

Modello:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq d_j \qquad \text{per } j = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq r_i \qquad \text{per } i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq M\, y_i \quad \text{per } i = 1, \ldots, n \quad \text{(dove } M \text{ è uno scalare molto grande)}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{per } i = 1, \ldots, n \text{ e per } j = 1, \ldots, m$$

$$y_i \in \{0, 1\} \qquad \text{per } i = 1, \ldots, n$$

7. Altro

Alcune altre possibili applicazioni sono le seguenti:

:: Gestione della risorsa sangue [a4],

:: Trattamenti di radioterapia [a3], [a5],

:: Gestione delle scorte (ad esempio di farmaci) [a10].

Ricordiamo infine che i modelli di Programmazione Lineare (Intera) sono molto adattabili a modifiche/varianti delle situazioni modellate.

Riferimenti

[a1] J.T. Blake, J. Donald, Mount Sinai hospital uses integer programming to allocate operating room time, *Interfaces*, 32 (2002), pp. 63-73

[a2] B. Cheang, H. Li, A. Lim, and B. Rodrigues, Nurse rostering problems-a bibiographic survey, *European Journal of Operational Research*, 151, 447-460 (2003).

[a3] D. Conforti, F. Guerriero, R. Guido, Non-block scheduling with priority for radiotherapy treatments, *European Journal of Operational Research*, 201 (1) (2010), pp. 289-296

[a4] V. De Angelis, N. Ricciardi, and G. Storchi, Optimizing blood assignment in a donation - transfusion system, *International Transactions in Operational Research*, August 2001

[a5] M. Ehrgott, R. Johnston, Optimisation of beam directions in intensity modulated radiation therapy planning, *OR Spectr* 25 (2003) 251–264

[a6] A. Guinet, S. Chaabane, Operating theatre planning, *International Journal of Production Economics*, 85 (2003), pp. 69-81

[a7] A. Mazier, X. Xie, M. Sarazin, Real-Time Patients Assignment: a Method for Improving Emergency Department Flow. In: Proceedings of the IEEE workshop on Health Care Management. Venetia (Italia), 2010

[a8] B. Satheeshkumar, S. Nareshkumar and S. Kumaraghuru, Linear programming applied to nurses shifting problems, *International journal of science and research*, 3 (2014) 171–173

[a9] www.unive.it/persone/pesenti

[a10] https://www.vkok.ee/logontrain/wp.../Riga-3-july-2014.pdf