

Scritto del 10 febbraio 2022
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

1.

Sia $\{S_t\}_{t \geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes, ossia soluzione della EDS

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0,$$

con μ (rendimento atteso), e $\sigma > 0$ (volatilità) costanti. Si indichi con $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente.

(i) Determinare il prezzo $v(t, x)$ (al tempo $t \in [0, T]$ se $S_t = x$) del derivato di payoff finale $F(S_T) = I_{\{S_T > S_0\}}$.

(ii) Spiegare che cos'è il Delta del portafoglio di copertura e determinarlo.

(iii) Sono previste vendite allo scoperto per coprirsi dal rischio se si ha una posizione corta sul derivato?

(iv) [Facoltativo: Calcolare il Gamma del portafoglio di replica e determinarne il segno.]

(v) E' possibile costruire un portafoglio corto sul derivato, negoziando azioni e un'altro derivato di prezzo $g(t, x)$ (al tempo $t \in [0, T]$ se $S_t = x$), che sia Delta e Gamma neutrale?

2.

Siano $\{S_t^i\}_{t \geq 0}$, $i = 1, 2$, i prezzi di due azioni descritti dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1 + \sigma_{12} dW_t^2), \quad S_0^1 > 0.$$

$$dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_{21} dW_t^1 + \sigma_{23} dW_t^3 + \sigma_{24} dW_t^4), \quad S_0^2 > 0.$$

con μ_i , $i = 1, 2$ e $\sigma_{ij} > 0$ costanti, $\{W_t^i\}_{t \geq 0}$, $i = 1, 2, 3, 4$, moti browniani indipendenti. Considerare un mercato finanziario costituito dai 2 titoli ed il bond con tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.

(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente, di mercato completo e di strategia autofinanziante;

(ii) Determinare le misure martingala equivalenti. Il mercato è libero da arbitraggi? è completo o incompleto? (giustificare le risposte)

(iii) È possibile aggiungere titoli affinché il mercato risulti completo?

3.

Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente.

(i) Calcolare $Q(\tau > T | \tau > t)$, $\forall 0 \leq t < T$.

(ii) Determinare il prezzo al tempo $0 \leq t < T$, $p_1(t, T)$, di un DZCB senza recovery di valore nominale x e maturità T .

(iii) Determinare il prezzo al tempo $0 \leq t < T$, $p_{RT}(t, T)$, di un DZCB con recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta$, di valore nominale x e maturità T .

(iv) Sia $x = 100$ euro, $T = 2$ anni, $r = 1\%$ e $p_1(1, 2) = 85$ euro. Determinare l'intensità di default dell'istituzione finanziaria.

(v) Sia $x = 100$ euro, $T = 2$ anni, $r = 1\%$, $\delta = 30\%$. Calcolare $p_{RT}(1, 2)$ nelle 2 circostanze: il default non si è verificato entro l'anno oppure il default si è verificato entro l'anno.

1.) $dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t)$ $S_0 > 0$

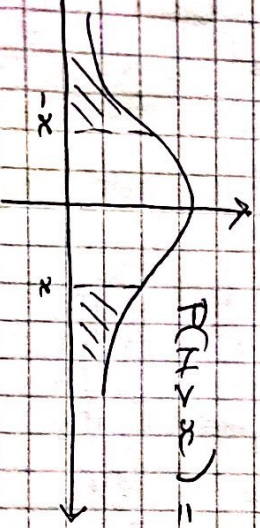
(ii) Pricing $F(S_T) = \mathbb{E}[S_T > S_0]$ $\mathbb{Q}$ misura martingala: $S_T = S_t e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q)}$
 $\{W_t^Q\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ $\mathbb{Q}$ -moto browniano

$U(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[F(S_T) | S_t = x] = e^{-r(T-t)} \mathbb{Q}(S_T > S_0 | S_t = x) =$

$= e^{-r(T-t)} \mathbb{Q}\left(x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q)} > S_0\right) = e^{-r(T-t)} \mathbb{Q}\left((r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q) > \log\left(\frac{S_0}{x}\right)\right)$

abbiamo abbreviato $(e^a > b) = (a > \log b)$

$= e^{-r(T-t)} \mathbb{Q}\left(\sigma \sqrt{T-t} N > \ln\left(\frac{S_0}{x}\right) - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right) = e^{-r(T-t)} \mathbb{Q}\left(N > \frac{\ln\left(\frac{S_0}{x}\right) - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}\right)$
 abbiamo abbreviato da $W_T^Q - W_t^Q \sim N(0, T-t) \Rightarrow W_T^Q - W_t^Q \sim \sqrt{T-t} N$



$F(N > x) = F(N < -x) = \Phi(-x)$

$U(t, x) = e^{-r(T-t)} \Phi(d_2(t, x))$

ove $d_2(t, x) = \frac{\ln\left(\frac{x}{S_0}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$

ed è dato da $\Delta(t, x) = \frac{\partial U}{\partial x}(t, x)$

(iii) Nel modello di Black & Scholes è stato dimostrato che per ogni derivato esiste

una strategia autofinanziante che replica il derivato alla scadenza. La quale in

azioni del portafoglio di replica è il cosiddetto delta. Significa che se l'investitore

la vendita di derivato è possibile eliminare il rischio detenendo una quantità di azioni per tempo e pari a $\Delta(t, x) = \frac{\partial V}{\partial x}(t, x)$ se $S_t = x$

$$\Delta(t, x) = \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) = e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2(t, x)) \frac{\partial d_2}{\partial x} = \frac{e^{-r(T-t)}}{x \sigma \sqrt{T-t}} \Phi'(d_2(t, x))$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial x} = \frac{1}{x \sigma \sqrt{T-t}} \quad \theta_n\left(\frac{x}{S_0}\right) = \theta_n x + \epsilon_n S_0 \quad e \quad D(\epsilon, x) = \frac{1}{x}$$

(iii) Non sono possibili vendite allo scoperto in quanto $\Delta(t, x) > 0$, infatti $\Phi'(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}}$

(iv) Calcolare le Gamma del portafoglio di replica:

$$\Gamma(t, x) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma \sqrt{T-t}} \left\{ -\frac{1}{x^2} \Phi'(d_2) + \frac{1}{x^2} \Phi''(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial x} \right\}$$

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \Phi''(x) = -\frac{x}{2} \Phi'(x) = -x \Phi'(x)$$

$$\Gamma(t, x) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma \sqrt{T-t}} \left\{ -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} \right\} = -x \Phi'(d_2)$$

$$\Gamma(t, x) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma \sqrt{T-t}} \Phi'(d_2) \left\{ -\frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) \right\} < 0$$

aumenta

se il prezzo dell'azione ~~diminuisce~~ ^{aumenta} e a quota in azioni nel portafoglio di replica diminuisce.

$$(v) \quad V(t, x) = -S(t, x) + \beta q(t, x) + \alpha x$$

$q(t, x)$ prezzo di un secondo derivato al tempo t se $S_t = x$

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial x} + \beta \frac{\partial q}{\partial x} + \alpha = 0$$

$$\Gamma V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0$$

Scegliendo la quota nel secondo derivato pari a:

$$\Rightarrow \beta = \frac{\Gamma_v(t, x)}{\Gamma_q(t, x)}$$

è possibile costruire un hedge perfetto Γ -neutrale

Offrendo in ante Δ -neutrale: $\alpha = \frac{\partial V}{\partial x} - \beta \frac{\partial q}{\partial x}$

2) - Q misura mg : $Q(A) = 0 \iff P(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$

$i=1,2$
 $S_t^i = e^{-rt} S_t^i$ solo Q - mg : $\forall t > s \quad E^Q[S_t^i | \mathcal{F}_s] = S_s^i$

Questo è equivalente a dire che $S_t^i, i=1,2$, ha trendimento atteso e ~~rispetto a~~ Q

$$E^Q[S_t^i | \mathcal{F}_s] = S_s^i e^{r(t-s)} \quad \forall t > s$$

- Un mercato si dice completo se ogni derivato può essere replicato da una strategia autofinanziante

- Una strategia $R_t = (\alpha_t^1, \alpha_t^2, \beta_t)$ α_t^i quota di azioni mediate in
 si dice autofinanziante se dato $V_t^R = \alpha_t^1 S_t^1 + \alpha_t^2 S_t^2 + \beta_t B_t$
 se valsa al tempo t B_t è la bond soluzione di $dB_t = r B_t dt$
 se con differenza è $dV_t^R = \alpha_t^1 dS_t^1 + \alpha_t^2 dS_t^2 + \beta_t dB_t$

2) (i) Vedere anche conlik

$$\underline{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \\ \Theta_4 \end{pmatrix}$$

(ii) Le misure mg equivalenti sono individuate dal stesso prezzo di mercato dei rischi isolati
dal sistema Enace

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{\Theta} = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{pmatrix} \quad \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & \sigma_{23} & \sigma_{24} \end{pmatrix}$$

$$\text{reg}(\underline{\sigma}) = 2 \quad \text{in quanto} \quad \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & 0 \end{vmatrix} = -\sigma_{12} \cdot \sigma_{21} \neq 0 \quad \text{ed essendo} \quad \text{reg} \left(\begin{pmatrix} \underline{\sigma} \\ \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{pmatrix} \right) = 2$$

per le teoreme di Rouché-Capelli il sistema ammette ∞^2 soluzioni:

$$\begin{cases} \sigma_{11} \Theta_1 + \sigma_{12} \Theta_2 = \mu_1 - r \\ \sigma_{21} \Theta_1 = -\sigma_{23} \Theta_3 - \sigma_{24} \Theta_4 + \mu_2 - r \\ \Theta_3, \Theta_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{cases} \Theta_1 = \frac{-\sigma_{23} \Theta_3 - \sigma_{24} \Theta_4 + \mu_2 - r}{\sigma_{21}} \\ \Theta_2 = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_{12}} - \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}} \Theta_1 \end{cases}$$

Il mercato è allora arbitrario ma incompleto.

(iii) Per completezza del mercato dobbiamo aggiungere 2 titoli in modo tale da Co malice di volatilità abbia $\text{det} \neq 0$. In questo modo per le teoreme di Cramer il sistema ammette una sua soluzione e per i teoremi Fondamentali dell'Asset Pricing:

$$\begin{aligned} dS_t^3 &= S_t^3 (\mu_3 dt + \sigma_{34} dW_t^4) \\ dS_t^4 &= S_t^4 (\mu_4 dt + \sigma_{41} dW_t^1) \end{aligned}$$

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } \underline{\sigma} = -\sigma_{41} \begin{vmatrix} \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ 0 & 0 & \sigma_{34} \end{vmatrix} = -\sigma_{41} \cdot \sigma_{12} \cdot \sigma_{23} \cdot \sigma_{34} \neq 0$$

3) essendo $(\tau > T) \subset (\tau > t)$

$$(i) \quad Q(\tau > T | \tau > t) = \frac{Q(\tau > T, \tau > t)}{Q(\tau > t)} = \frac{Q(\tau > T)}{Q(\tau > t)} = \frac{e^{-\lambda T}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(T-t)}$$

$$Q(\tau > T | \mathcal{H}_t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \tau \leq t \\ Q(\tau > T | \tau > t) = e^{-\lambda(T-t)} & \text{se } \tau > t \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q(\tau > T | \mathcal{H}_t) = e^{-\lambda(T-t)} \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}$$

$$(ii) \quad P(t, T) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q \left[\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} | \mathcal{H}_t \right] = x e^{-r(T-t)} Q(\tau > T | \mathcal{H}_t)$$

$$P(t, T) = x e^{-r(T-t)} e^{-\lambda(T-t)} \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}$$

(iv) $x = 800 \text{ €}$ $T = 2$ anni $t = 1$ anno e dopo 1 anno non c'è ancora stato il default

$$x P(1, 2) = 85 \text{ €} \quad r = 1\% \quad \text{determiniamo } \lambda \text{ dalla seguente}$$

relazione:

$$85 = 100 e^{-0.01} e^{-\lambda} \quad e^{-\lambda} = \frac{85}{100} e^{0.01} \quad \lambda = -\ln\left(\frac{85 e^{0.01}}{100}\right) = 0.1525$$

(iii) Recupero pari $(1-\delta)x$ alla scadenza:

$$P_{RT}(t, T) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q \left[x \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + x(1-\delta) \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} | \mathcal{H}_t \right] = e^{-r(T-t)} x \mathbb{E}^Q \left[\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + 1 - \delta - (1-\delta) \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} | \mathcal{H}_t \right]$$

$$P_{RT}(t, T) = x e^{-r(T-t)} \left\{ (1-\delta) + \delta \underbrace{Q(T > T | x(t))}_{e^{-\lambda(T-t)} \mathbb{1}_{\{T > t\}} \right\}$$

$$P_{RT}(t, T) = x e^{-r(T-t)} \left\{ (1-\delta) + \delta e^{-\lambda(T-t)} \mathbb{1}_{\{T > t\}} \right\}$$

$$\delta = 30\%$$

Se il default è avvenuto entro il primo anno $T \leq t$ quindi è di valore

$$P_{RT}(1, 2) = 100 e^{-0.01} \cdot 0.7 = 69.3035 \text{ €}$$

$$T-t=1 \text{ anno}$$

Se il default non si è verificato entro il primo anno $T > t$:

$$69.3035$$

$$P_{RT}(1, 2) = 100 e^{-0.01} \cdot 0.7 + \underbrace{100 e^{-0.01} \cdot 0.3}_{85} e^{-\lambda} = 94.80 \text{ €}$$

$$T-t=1 \text{ anno}$$