Scritto del 27 gennaio 2022
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II
Prof.ssa Claudia Ceci

1. Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes, ossia soluzione della EDS

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0,$$

con μ (rendimento atteso), e $\sigma > 0$ (volatilitá) costanti. Si indichi con $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente.
(i) Determinare il prezzo $v(t,x)$ (al tempo $t \in [0,T]$ se $S_t = x$) del derivato di payoff finale $F(S_T) = log^2(S_T)$.
(ii) Applicare la formula di Ito per determinare la EDS che $Y_t = log^2(S_t)$ risolve. Scrivere la EDS nella forma:

$$dY_t = b(t, Y_t)dt + a(t, Y_t)dW_t.$$

Facoltativo: (iii) Verificare che $v(t,x)$ é soluzione dell'equazione di valutazione di Black & Scholes.

2. Considerare un mercato finanziario costituito da tre titoli ed il bond con tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$. Siano $\{S^i_t\}_{t\geq 0}$, $i = 1,2,3$, i prezzi delle tre azioni descritti dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS^1_t = S^1_t(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW^1_t), \quad S^1_0 > 0$$

$$dS^2_t = S^2_t(\mu_2 dt + \sigma_{22} dW^2_t + \sigma_{23} dW^3_t), \quad S^2_0 > 0$$

$$dS^3_t = S^3_t(\mu_3 dt + \sigma_{32} dW^2_t + \sigma_{33} dW^3_t), \quad S^3_0 > 0$$

con $\sigma_{ij} > 0$, e $\{W^i_t\}_{t\geq 0}$, $i = 1,2,3$, moti browniani indipendenti.
(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente e di mercato completo;
(ii) In quale circostanze il mercato é libero da arbitraggi? é completo o incompleto? (giustificare le risposte)
(iii) Sia Q una misura martingala equivalente, scrivere la dinamica di $\{S^i_t\}_{t\geq 0}$, $i = 1,2$, rispetto a Q, e calcolare il prezzo $v(t, x_1, x_2)$ del derivato di payoff finale:

$$F(S^1_T, S^2_T) = S^1_T \log(S^2_T)$$

al tempo t sapendo che $S^i_t = x_i$, $i = 1,2$.
Suggerimento:

$$S^2_t = S^2_0 e^{(r - \frac{\sigma^2_{22}}{2} - \frac{\sigma^2_{23}}{2})t + \sigma_{22} W^{2,Q}_t + \sigma_{23} W^{3,Q}_t}, \quad t \in [0,T].$$

3. Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria R di distribuzione esponenziale $\lambda^Q > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente e δ il LGD di R. Considerare un CDS scritto su R con scadenza 1 anno e premi semestrali.
(i) Indicato con x il CDS spread, determinare il valore del flusso dei premi al tempo $t = 0$, $V_0^{prem}(x)$;
(ii) Determinare il valore del pagamento al default al tempo $t = 0$, V_0^{def};
(iii) Determinare il fair CDS spread x^*_0.

Titoli Derivati e Gestione del Rischio II   27/01/2022

1. $F(S_T) = \lg^2(S_T)$

$$S_T = S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q)} \Rightarrow \lg(S_T) = \lg S_t + (r-\tfrac{\sigma^2}{2})T + \sigma(W_T^Q - W_t^Q)$$

$$v(t,x) = e^{-r(T-t)} E^Q\left[\left(\lg(S_t) + (r-\tfrac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q)\right)^2 \,\middle|\, S_t = x\right]$$

$$= e^{-r(T-t)}\left\{\left(\lg x + (r-\tfrac{\sigma^2}{2})(T-t)\right)^2 + 2\sigma \underbrace{E^Q[(W_T^Q - W_t^Q)]}_{=0} + \sigma^2 \underbrace{E^Q[(W_T^Q - W_t^Q)^2]}_{=T-t}\right\}$$

$$= e^{-r(T-t)}\left\{\left(\lg x + (r-\tfrac{\sigma^2}{2})(T-t)\right)^2 + \sigma^2(T-t)\right\} \qquad W_T^Q - W_t^Q \sim N(0, T-t)$$

Formula di Itô: $\quad df(S_t) = f'(S_t)\,dS_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f''(S_t)\,dt$

$$f(x) = (\lg x)^2 \qquad f'(x) = 2\lg x \cdot \frac{1}{x} \qquad f''(x) = 2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} + 2\lg x\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= 2\frac{1}{x^2}(1 - \lg x)$$

$Y_t = (\lg S_t)^2$,

$$dY_t = 2\lg S_t \cdot \frac{1}{\cancel{S_t}}\cancel{S_t}(\mu\,dt + \sigma\,dW_t) + \frac{1}{\cancel{2}}\sigma^2 \cancel{S_t^2}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{S_t^2}}(1 - \lg S_t)\,dt$$

$$dY_t = \left[\sigma^2(1 - \lg S_t) + 2\lg S_t\cdot\mu\right]dt + 2\lg(S_t)\,\sigma\,dW_t$$

$\lg S_t = \sqrt{Y_t} \qquad S_t = e^{\sqrt{Y_t}} \qquad dY_t = \sigma^2 dt + 2\sqrt{Y_t}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + 2\sqrt{Y_t}\,\sigma\,dW_t$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + rx\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rv = 0 \\ v(T,x) = \log^2 x \end{cases}$$

$$v(t,x) = e^{-r(T-t)}\left\{ \log^2 x + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 (T-t)^2 + 2\log x\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma^2(T-t)\right\}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = r\,v(t,x) + e^{-r(T-t)}\left\{ -2\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2(T-t) - 2\log x\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right) - \sigma^2\right\}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-r(T-t)}\left\{ 2\log x\cdot\frac{1}{x} + \frac{2}{x}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right\}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^{-r(T-t)}\left\{ 2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} + 2\log x\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right\}$$

$$rx\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-r(T-t)}\left\{ 2r\log x + 2r\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right\}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^{-r(T-t)}\left\{ \sigma^2 - \log x\cdot\sigma^2 - \sigma^2\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right\}$$

$$\cancel{rv} + 2e^{-r(T-t)}\left\{\cancel{r\log x} + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot r(T-t)\right\} + e^{-r(T-t)}\left\{\cancel{\sigma^2} - \cancel{\log x}\cdot\sigma^2 - \sigma^2\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right\} +$$

$$- e^{-r(T-t)}\left\{\cancel{\sigma^2} - 2\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2(T-t) - 2\log x\cancel{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}\right\} - \cancel{rv} =$$

$$e^{-r(T-t)}\left\{ 2\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)r - \sigma^2\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right) - 2\left(r^2 + \frac{\sigma^4}{4} - r\sigma^2\right)\right\}(T-t) = 0 \checkmark$$

$$2r^2 - \sigma^2 r - \sigma^2 r + \frac{\sigma^4}{2} \qquad - 2r^2 - \frac{\sigma^4}{2} + 2r\sigma^2$$

2)
$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1(\mu_1\,dt + \sigma_{11}\,dW_t^1) \\ dS_t^2 = S_t^2(\mu_2\,dt + \sigma_{22}\,dW_t^2 + \sigma_{23}\,dW_t^3) \\ dS_t^3 = S_t^3(\mu_3\,dt + \sigma_{32}\,dW_t^2 + \sigma_{33}\,dW_t^3) \end{cases}$$

(i) Q è una misura mg se $Q \sim P$ $\quad Q(A)=0 \iff P(A)=0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$

e $S_t^i e^{-rt}$ $i=1,2,3$ sono Q-mg : $\forall t>s$ $\quad E^Q[S_t^i e^{-rt} \mid \mathcal{F}_s] = S_s^i e^{-rs} \iff$ ~~$E^Q[S_t^i \mid \mathcal{F}_s]$~~

$E^Q[S_t^i \mid \mathcal{F}_s] = S_s^i e^{r(t-s)}$

Un mercato è completo se ogni derivato può essere replicato da una strategia in azioni autofinanziante: $\exists(\alpha_t^1, \alpha_t^2, \alpha_t^3, \beta_t) = h$ $\quad V_T^h = F(S_T^1, S_T^2, S_T^3)$ $\quad dV_t^h = \sum_{i=1}^{3} \alpha_t^i \cdot dS_t^i + \beta_t\,dB_t$ $\quad dB_t = B_t r\,dt$ bond

(ii) Matrice volatilità
$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \qquad \underline{\sigma} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \\ \mu_3 - r \end{pmatrix}$$

Ad ogni soluzione θ del sistema lineare è associata una misura mg Q^θ

(1) Se $\det \underline{\sigma} = \sigma_{11}(\sigma_{22} \cdot \sigma_{33} - \sigma_{32}\sigma_{23}) \neq 0$ $\quad \exists!\ \underline{\theta}$ per il secondo teorema fondamentale dell'asset pricing il mercato è libero da arbitraggi e completo in quanto $\exists!\ Q$ misura martingale

(2) Se $\sigma_{22} \cdot \sigma_{33} = \sigma_{32}\sigma_{23}$ $\quad rg\,\underline{\sigma} = 2$ in quanto $\det \underline{\sigma} = 0$ e $\begin{vmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{vmatrix} = \sigma_{11} \cdot \sigma_{22} \neq 0$

e possiamo avere 2 casi

(2.1) $rg \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 & \mu_1 - r \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \mu_2 - r \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \mu_3 - r \end{pmatrix} = 3$ allora per il teorema di Rouché-Capelli il sistema non ammette soluzioni e per il primo teorema fondamentale dell'asset pricing poiché $\nexists$ Q il mercato ammette arbitraggi

(2.2) $\quad rg\begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 & \mu_1 - r \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \mu_2 - r \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \mu_3 - r \end{pmatrix} = 2$ allora il sistema ammette ∞^1 - soluzioni e il mercato è libero da arbitraggi ma incompleto.

(2.2) si verifica se $\begin{vmatrix} \sigma_{11} & 0 & \mu_1 - r \\ 0 & \sigma_{22} & \mu_2 - r \\ 0 & \sigma_{32} & \mu_3 - r \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} \sigma_{11} & 0 & \mu_1 - r \\ 0 & \sigma_{23} & \mu_2 - r \\ 0 & \sigma_{33} & \mu_3 - r \end{vmatrix} = 0$, $\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \mu_1 - r \\ \sigma_{22} & \sigma_{23} & \mu_2 - r \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} & \mu_3 - r \end{vmatrix} = 0}$

$\swarrow \qquad\qquad \swarrow$

$\sigma_{22}(\mu_3 - r) = \sigma_{32}(\mu_2 - r)$ $\qquad$ $\sigma_{23}(\mu_3 - r) = \sigma_{33}(\mu_2 - r)$ $\qquad$ questo è sempre vero se $\sigma_{22}\cdot\sigma_{33} = \sigma_{23}\cdot\sigma_{32}$

dalla condizione $\sigma_{22}\cdot\sigma_{33} = \sigma_{32}\cdot\sigma_{23} \Rightarrow \dfrac{\sigma_{22}}{\sigma_{32}} = \dfrac{\sigma_{23}}{\sigma_{33}}$

e quindi (2.2) è verificata se $\dfrac{\sigma_{22}}{\sigma_{32}} = \dfrac{\sigma_{23}}{\sigma_{33}} = \dfrac{\mu_2 - r}{\mu_3 - r}$

e (2.1) è verificata se $\dfrac{\sigma_{22}}{\sigma_{32}} = \dfrac{\sigma_{23}}{\sigma_{33}} \neq \dfrac{\mu_2 - r}{\mu_3 - r}$

(iii) $\quad F(S_T^1, S_T^2) = S_T^1 \cdot \lg(S_T^2)$

$$F(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{Q}\left[S_T^1 \cdot \lg(S_T^2) \mid S_t^1 = x_1,\ S_t^2 = x_2 \right] =$$

$$= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{Q}\Big[S_0^1 e^{(r - \sigma_{11}^2/2)(T-t)} e^{\sigma_{11}(W_T^{Q,1} - W_t^{Q,1})} \Big\{ \lg(S_0^2) + \left(r - \tfrac{\sigma_{22}^2}{2} - \tfrac{\sigma_{23}^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_{22}(W_T^{Q,2} - W_t^{Q,2}) + \sigma_{23}(W_T^{Q,3} - W_t^{Q,3}) \ \Big|\ S_t^1 = x_1,\ S_t^2 = x_2$$

$$v(t,x_1,x_2) = e^{-r(T-t)}\Big\{ x_1 e^{(r-\sigma_{11}^2/2)(T-t)}\ \mathbb{E}^{Q}\Big[e^{\sigma_{11}(W_T^{Q,1}-W_t^{Q,1})}\cdot\Big(\lg(x_2)+\big(r-\tfrac{\sigma_{22}^2}{2}-\tfrac{\sigma_{23}^2}{2}\big)(T-t)$$

$$+\sigma_{22}(W_T^{Q,2}-W_t^{Q,2})+\sigma_{23}(W_T^{Q,3}-W_t^{Q,3})\Big)\Big]$$

ora poiché $W^{Q,1}$, $W^{Q,2}$ e $W^{Q,3}$ sono moti browniani indipendenti

$$\mathbb{E}^{Q}\Big[e^{\sigma_{11}(W_T^{Q,1}-W_t^{Q,1})}\cdot\sigma_{22}(W_T^{Q,2}-W_t^{Q,2})\Big] = \mathbb{E}^{Q}\Big[e^{\sigma_{11}(W_T^{Q,1}-W_t^{Q,1})}\Big]\sigma_{22}\,\underbrace{\mathbb{E}^{Q}\big[W_T^{Q,2}-W_t^{Q,2}\big]}_{=0}=0$$

ed analogamente per l'ultimo termine.

$$v(t,x_1,x_2) = x_1 e^{-\frac{\sigma_{11}^2}{2}(T-t)}\ \underbrace{\mathbb{E}^{Q}\big[e^{\sigma_{11}\sqrt{T-t}\,N}\big]}_{e^{\frac{\sigma_{11}^2}{2}(T-t)}}\Big(\lg(x_2)+\big(r-\tfrac{\sigma_{22}^2}{2}-\tfrac{\sigma_{23}^2}{2}\big)(T-t)\Big)$$

$$W_T^{Q,i}-W_t^{Q,i}\sim\mathcal{N}(0,T-t)$$

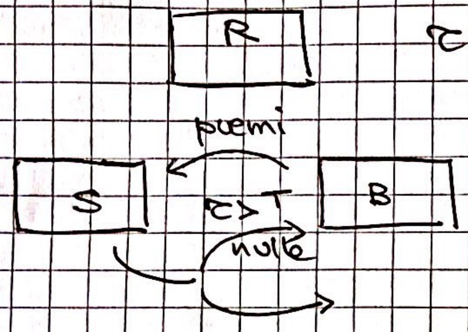
$$W_T^{Q,i}-W_t^{Q,i}\sim\sqrt{T-t}\,N$$

$$v(t,x_1,x_2) = x_1\Big(\lg(x_2)+\big(r-\tfrac{\sigma_{22}^2}{2}-\tfrac{\sigma_{23}^2}{2}\big)(T-t)\Big)$$

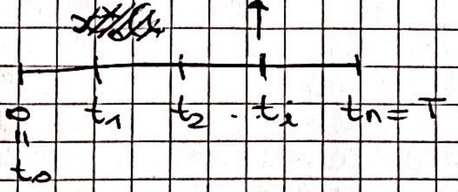
Oppure si poteva giungere allo stesso risultato osservando che S^1 e S^2 sono indipendenti e quindi

$$\mathbb{E}^{Q}\big[S_T^1\cdot\lg(S_T^2)\mid S_t^1=x_1,\ S_t^2=x_2\big] = \underbrace{\mathbb{E}^{Q}\big[S_T^1\mid S_t^1=x_1\big]}_{x_1 e^{r(T-t)}}\cdot\underbrace{\mathbb{E}^{Q}\big[\lg(S_T^2)\mid S_t^2=x_2\big]}_{\lg(x_2)+\left(r-\frac{\sigma_{22}^2}{2}-\frac{\sigma_{23}^2}{2}\right)(T-t)}$$

3) CDS $\quad \tau \sim \exp(\lambda^{\mathbb{Q}}) \quad$ τ tempo di default di R



se $\tau \le T$
S paga δ al tempo τ



$x_0^*(t_i - t_{i-1})$ premio pagato al tempo t_i se $\tau > t_i$

i) $$V_0^{prem}(x_0^*) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sum_{i=1}^{n} x_0^*(t_i - t_{i-1}) e^{-rt_i} \mathbb{1}_{\{\tau > t_i\}}\right] = \sum_{i=1}^{n} x_0^*(t_i - t_{i-1}) e^{-rt_i} \underbrace{\mathbb{Q}(\tau > t_i)}_{e^{-\lambda^{\mathbb{Q}} t_i}}$$

$$V_0^{prem}(x_0^*) = \sum_{i=1}^{n} x_0^*(t_i - t_{i-1}) e^{-(r+\lambda^{\mathbb{Q}})t_i} \qquad t_1 = \tfrac{1}{2} \quad t_2 = 1$$

$$= \frac{1}{2} x_0^* \left\{ e^{-(r+\lambda^{\mathbb{Q}})\cdot \frac{1}{2}} + e^{-(r+\lambda^{\mathbb{Q}})} \right\}$$

ii) $$V_0^{def} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\tau} \delta \, \mathbb{1}_{\{\tau \le T\}}\right] = \delta \int_0^T e^{-rt} \underbrace{\lambda^{\mathbb{Q}} e^{-\lambda^{\mathbb{Q}} t}}_{f_\tau(t) \text{ densità di } \tau} dt$$

$$= \delta \lambda^{\mathbb{Q}} \int_0^T e^{-(r+\lambda^{\mathbb{Q}})t} dt = -\delta \frac{\lambda^{\mathbb{Q}}}{\lambda^{\mathbb{Q}}+r} e^{-(r+\lambda^{\mathbb{Q}})t}\Big|_0^T = \delta \frac{\lambda^{\mathbb{Q}}}{\lambda^{\mathbb{Q}}+r}\left(1 - e^{-(r+\lambda^{\mathbb{Q}})T}\right)$$

iii) x_0^* è il fair CDS premium, ossia è tale che $V_0^{prem}(x_0^*) = V_0^{def}$

$T = 1$ anno

$$\frac{1}{2} x_0^* \left\{ e^{-(r+\lambda^{\mathbb{Q}})\frac{1}{2}} + e^{-(r+\lambda^{\mathbb{Q}})} \right\} = \frac{\delta \lambda^{\mathbb{Q}}}{\lambda^{\mathbb{Q}}+r}\left(1 - e^{-(r+\lambda^{\mathbb{Q}})T}\right) \Rightarrow x_0^* = \frac{\frac{2\delta\lambda^{\mathbb{Q}}}{\lambda^{\mathbb{Q}}+r}\left(1 - e^{-(r+\lambda^{\mathbb{Q}})}\right)}{e^{-(r+\lambda^{\mathbb{Q}})\frac{1}{2}} + e^{-(r+\lambda^{\mathbb{Q}})}}$$