

1. Sia $\{S_t\}_{t \geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes, ossia soluzione della EDS

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0,$$

con μ (rendimento atteso), e $\sigma > 0$ (volatilità) costanti. Si indichi con $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente.

(i) Applicare la formula di Ito per determinare la dinamica del processo $Y_t = \log(S_t)$ e ricavare l'espressione esplicita di S_t .

(ii) Determinare il prezzo $v_n(t, x)$ (al tempo $t \in [0, T]$ se $S_t = x$) del derivato di payoff finale $F_n(S_T) = \frac{1}{S_T^n}$.

(iii) Determinare α e β affinché il portafoglio $V(t, x) = v_1(t, x) + \beta v_2(t, x) + \alpha x$ sia Δ e Γ -neutrale.

2. Considerare un mercato finanziario costituito da tre titoli ed il bond con tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$. Siano $\{S_t^i\}_{t \geq 0}$, $i = 1, 2, 3$, i prezzi delle tre azioni descritti dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1 + \sigma_{13} dW_t^3), \quad S_0^1 > 0$$

con μ_i , $i = 1, 2$ e $\sigma_{11}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23} > 0$, e $\{W_t^i\}_{t \geq 0}$, $i = 1, 2, 3$, moti browniani indipendenti.

(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente e di mercato completo;

(ii) Determinare le misure martingale equivalenti;

(iii) Il mercato è libero da arbitraggi? È completo o incompleto? (giustificare le risposte)

(M) È possibile completare il mercato aggiungendo un terzo titolo?

(N) Sia Q una misura martingala equivalente, scrivere la dinamica di $\{S_t^i\}_{t \geq 0}$, $i = 1, 2$, rispetto a Q , e calcolare il prezzo $v(t, x_1, x_2)$ del derivato di payoff finale:

$$F_1(S_T^1 S_T^2) = \frac{S_T^1}{S_T^2}$$

al tempo t sapendo che $S_t^i = x_i$, $i = 1, 2$. Sugerimento:

$$S_t^1 = S_0^1 e^{(\gamma - \frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{\sigma_2^2}{2})t + \sigma_{11}W_t^{1,Q} + \sigma_{13}W_t^{3,Q}}, \quad t \in [0, T]$$

$$S_t^2 = S_0^2 e^{(\gamma - \frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{\sigma_2^2}{2} - \frac{\sigma_3^2}{2})t + \sigma_{21}W_t^{1,Q} + \sigma_{22}W_t^{2,Q} + \sigma_{23}W_t^{3,Q}}, \quad t \in [0, T].$$

3. Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda^Q > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente.

(i) Determinare il prezzo $p_{\tau T}(0, T)$ al tempo $t = 0$ di un DZCB con recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta$, di valore nominale x e maturità T .

(ii) Determinare il prezzo $p_{\tau T}(t, T)$ ad un generico istante $t \in [0, T]$.

(iii) Sia oggi il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 100 euro, maturità $T = 12$ mesi, pari a $p_0 = 98$ euro e quello di un DZCB, di stesso valore nominale e maturità, con $\delta = 40\%$ pari a $p_{\tau T} = 92$ euro. Determinare l'intensità di default λ^Q dell'istituzione finanziaria e la probabilità di default in un anno.

(iv) Determinare il prezzo $v_{\tau T}^Q(0, T)$ del DCB con recovery of treasury nel caso in cui vengano pagate cedole semestrali pari a 10 euro. Assumere il recupero solo sul valore nominale.

$$1. \quad dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t)$$

$$2. \quad Y_t = E_q(S_t)$$

$$f(x) = E_q x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$dP(S_t) = f(S_t) dS_t + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(S_t) dt = \frac{1}{S_t} S_t (\mu dt + \sigma dW_t) - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{S_t^2} dt$$

$$dE_q(S_t) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) dt + \sigma dW_t$$

$$E_q(S_t) = E_q(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t \Rightarrow E_q\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t$$

$$\Rightarrow S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

$$(ii) \quad Y_n(t, x) = e^{-r(T-t)} E^Q \left[(S_T)^{-n} \mid S_t = x \right] \quad S_T = S_t e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q)}$$

$$Y_n(t, x) = \frac{e^{-r(T-t)}}{x^n} e^{-n(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} E^Q \left[e^{-n\sigma(W_T^Q - W_t^Q)} \right]$$

$$E^Q \left[e^{-n\sigma(W_T^Q - W_t^Q)} \right]$$

$$\stackrel{''}{=} e^{\frac{n^2 \sigma^2}{2}(T-t)}$$

$$\Rightarrow Y_n(t, x) = \frac{e^{-r(T-t)}}{x^n} e^{-n\mu(T-t)} e^{+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)(n + n^2)} = \frac{1}{x^n} e^{-\pi(m+1)(T-t)} e^{\frac{\sigma^2}{2} m(m+1)(T-t)}$$

$$Y_1(t, x) = \frac{1}{x} e^{-2\pi(T-t)} e^{\sigma^2(T-t)} \quad Y_2(t, x) = \frac{1}{x^2} e^{-3\pi(T-t)} e^{2\sigma^2(T-t)}$$

ciii) $V(t, x) = U_1(t, x) + \beta U_2(t, x) + \alpha x$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \beta \frac{\partial U_2}{\partial x} + \alpha = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{\Gamma_{U_1}}{\Gamma_{U_2}}$$

$$\beta = -\frac{\frac{2}{x^3} e^{-2\pi(T-t)} e^{\sigma^2(T-t)}}{\frac{2}{x^4} e^{-3\pi(T-t)} e^{3\sigma^2(T-t)}}$$

$$\beta = -\frac{x}{3} e^{\pi(T-t)} e^{-2\sigma^2(T-t)}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{\partial U_1}{\partial x} - \beta \frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{1}{x^2} e^{-2\pi(T-t)} e^{\sigma^2(T-t)} + \frac{2}{x^3} e^{-2\pi(T-t)} e^{\sigma^2(T-t)} + \frac{2}{x^4} e^{-3\pi(T-t)} e^{3\sigma^2(T-t)} \cdot \left(-\frac{2}{x^3} e^{-3\pi(T-t)} e^{3\sigma^2(T-t)}\right)$$

$$\alpha = \frac{1}{x^2} e^{-2\pi(T-t)} e^{\sigma^2(T-t)} + \frac{2}{3} \frac{1}{x^2} e^{-2\pi(T-t)} e^{\sigma^2(T-t)}$$

$$\alpha = \frac{5}{3} \frac{1}{x^2} e^{-2\pi(T-t)} e^{\sigma^2(T-t)}$$

2) Vedere es. 1) punti (i) - (v) del paragrafo del 13/01/22

3) Vedere es. 2) punti (i) - (iv) "

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} e^{-2\pi(T-t)} e^{\sigma^2(T-t)}$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = -\frac{2}{x^3} e^{-3\pi(T-t)} e^{3\sigma^2(T-t)}$$

$$\Gamma_{U_1} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = -\frac{2}{x^3} e^{-3\pi(T-t)} e^{3\sigma^2(T-t)}$$

$$\Gamma_{U_2} = \frac{2}{x^4} e^{-3\pi(T-t)} e^{3\sigma^2(T-t)}$$

1.

Considerare un mercato finanziario costituito da tre titoli ed il bond con tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$. Siano $\{S_t^i\}_{t \geq 0}$, $i = 1, 2, 3$, i prezzi delle tre azioni descritti dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1 + \sigma_{13} dW_t^3), \quad S_0^1 > 0$$

$$dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_{21} dW_t^1 + \sigma_{22} dW_t^2 + \sigma_{23} dW_t^3), \quad S_0^2 > 0$$

con μ_i , $i = 1, 2$ e $\sigma_{11}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23} > 0$, e $\{W_t^i\}_{t \geq 0}$, $i = 1, 2, 3$, moti browniani indipendenti.

- (i) Dare la definizione di misura martingala equivalente e di mercato completo;
- (ii) Determinare le misure martingale equivalenti;
- (iii) Il mercato é libero da arbitraggi? é completo o incompleto? (giustificare le risposte)
- (iv) E' possibile completare il mercato aggiungendo un terzo titolo?
- (v) Sia Q una misura martingala equivalente, scrivere la dinamica di $\{S_t^i\}_{t \geq 0}$, $i = 1, 2$, rispetto a Q , e calcolare il prezzo $v(t, x_1, x_2)$ del derivato di payoff finale:

$$F_1(S_T^1 S_T^2) = \frac{S_T^1}{S_T^2}$$

al tempo t sapendo che $S_t^i = x_i$, $i = 1, 2$. **Suggerimento:**

$$S_t^1 = S_0^1 e^{(r - \frac{\sigma_{11}^2}{2} - \frac{\sigma_{13}^2}{2})t + \sigma_{11} W_t^{1,Q} + \sigma_{13} W_t^{3,Q}}, \quad t \in [0, T]$$

$$S_t^2 = S_0^2 e^{(r - \frac{\sigma_{21}^2}{2} - \frac{\sigma_{22}^2}{2} - \frac{\sigma_{23}^2}{2})t + \sigma_{21} W_t^{1,Q} + \sigma_{22} W_t^{2,Q} + \sigma_{23} W_t^{3,Q}}, \quad t \in [0, T].$$

- (iv) Determinare le quote in azioni del portafoglio di copertura e il loro segno (posizione corta/lunga).

2.

Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda^Q > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente.

- (i) Determinare il prezzo $p_{RT}(0, T)$ al tempo $t = 0$ di un DZCB con recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta$, di valore nominale x e maturità T .
- (ii) Determinare il prezzo $p_{RT}(t, T)$ ad un generico istante $t \in [0, T]$.
- (iii) Sia oggi il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 100 euro, maturità $T = 12$ mesi, pari a $p_0 = 98$ euro e quello di un DZCB, di stesso valore nominale e maturità, con $\delta = 40\%$ pari a $p_{RT} = 92$ euro. Determinare l'intensità di default λ^Q dell'istituzione finanziaria e la probabilità di default in un anno.
- (iv) Determinare il prezzo $p_{RT}^c(0, T)$ del DCB con recovery of treasury nel caso in cui vengano pagate cedole semestrali pari a 10 euro. Assumere il recupero solo sul valore nominale.
- (v) Determinare il prezzo $p_{RT}^c(t, T)$ del DCB ad un generico istante $t \in [0, T]$.

(1)

$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1 (\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1 + \sigma_{13} dW_t^3) \\ dS_t^2 = S_t^2 (\mu_2 dt + \sigma_{21} dW_t^1 + \sigma_{22} dW_t^2 + \sigma_{23} dW_t^3) \end{cases}$$

(ii) Θ è una misura martingale equivalente se: $Q \sim P$ ossia $Q(A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$
 $\forall A \in \mathcal{F}$

e $S_t^i e^{-rt}$ $i=1,2$ sono Q -mg, ossia

$$\forall t \leq T \quad E^Q [S_t^i e^{-rt} | \mathcal{F}_s] = S_s^i e^{-rs}$$

$$E^Q [S_t^i | \mathcal{F}_s] = S_s^i e^{r(t-s)}$$

è azione da rendimento r rispetto a Q

Un mercato si dice completo se ogni derivato può essere replicato da una strategia autofinanziante

(iii) Le misure mg equivalenti sono associate ai prezzi di mercato del rischio $\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$

Soluzioni del sistema lineare: $\sigma \cdot \Theta = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{pmatrix}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \end{pmatrix}$$

Il rango di σ è pari a 2:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} = \sigma_{11} \sigma_{22} \neq 0$$

e anche la matrice completa

$$\text{rang} \left(\sigma, \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{pmatrix} \right) = 2$$

$$\infty^{3-2} = \infty^1 \text{ 'Solutions'}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 \Theta_1 + \sigma_3 \Theta_3 = \rho_1 - r \\ \sigma_2 \Theta_1 + \sigma_2 \Theta_2 + \sigma_3 \Theta_3 = \rho_2 - r \end{cases} \quad \begin{cases} \Theta_3 = -\frac{\sigma_1}{\sigma_3} \Theta_1 + \frac{\rho_1 - r}{\sigma_3} \\ \Theta_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Theta_3 = -\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{13}} \Theta_1 + \frac{\mu_1 - r}{\sigma_{13}} & \Theta_1 \in \mathbb{R} \\ \Theta_2 = \frac{r}{\sigma_{22}} \left(\mu_2 - r - \sigma_{21} \Theta_1 - \sigma_{23} \left(-\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{13}} \Theta_1 + \frac{\mu_1 - r}{\sigma_{13}} \right) \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Theta_1 \in \mathbb{R} \\ \Theta_2 = -\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{13}} \Theta_1 + \frac{\mu_1 - \tau}{\sigma_{13}} \\ \Theta_3 = \frac{\mu_2 - \tau}{\sigma_{12}} - \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}} + \sigma_{23} \cdot \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{13}} \right) \Theta_1 - \sigma_{23} \frac{\mu_1 - \tau}{\sigma_{13}} \end{cases}$$

126 mecofo piaziauo

own mēre ∞ misse mgf

(iii) Per il trattamento fondamentale del Asset Pricing il mercato è libero da arbitraggi.

卷之五

11

11

二

o mercado é incompleto

Chit

Se aplicamos un terzo filho

$$ds_t^2 = \dot{s}_t^2 (\mu_3 dt + \sigma_{33} dx_t^3)$$

$$\Rightarrow \underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{25} = 63 \cdot 67 \cdot 62 \neq 0$$

per el heorne di

Erangel III. 22.10.2020

ॐ, गिद्धि म्! ॐ मिश्र

maningale e per i

formi find. place AP

o mercado é completo

(ciii)

$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1 (r dt + \sigma_{r1} dW_t^{1Q} + \sigma_{r3} dW_t^{3Q}) \\ dS_t^2 = S_t^2 (r dt + \sigma_{21} dW_t^{1Q} + \sigma_{22} dW_t^{2Q} + \sigma_{23} dW_t^{3Q}) \end{cases}$$

$$u(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)} E^Q \left[\frac{S_t^1}{S_t^2} \mid S_t^1 = x_1, S_t^2 = x_2 \right]$$

$$S_t^1 = S_t^1 e^{(r - \sigma_{r1}^2/2 - \sigma_{r3}^2/2)(T-t)} \sigma_{r1} (W_t^{1Q} - W_t^{1Q}) + \sigma_{r3} (W_t^{3Q} - W_t^{3Q})$$

$$S_t^2 = S_t^2 e^{(r - \sigma_{21}^2/2 - \sigma_{22}^2/2 - \sigma_{23}^2/2)(T-t)} \sigma_{21} (W_t^{1Q} - W_t^{1Q}) + \sigma_{22} (W_t^{2Q} - W_t^{2Q}) + \sigma_{23} (W_t^{3Q} - W_t^{3Q})$$

$$u(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)} \frac{x_1}{x_2} e^{(r - \sigma_{r1}^2/2 - \sigma_{r3}^2/2 - \sigma_{21}^2/2 - \sigma_{22}^2/2 - \sigma_{23}^2/2)(T-t)} \times$$

$$E^Q \left[e^{(\sigma_{r1} - \sigma_{21})(W_t^{1Q} - W_t^{1Q}) - \sigma_{22} (W_t^{2Q} - W_t^{2Q})} e^{(\sigma_{r3} - \sigma_{23})(W_t^{3Q} - W_t^{3Q})} \right]$$

grazie all'indipendenza

$$E^Q \left[e^{(\sigma_{r1} - \sigma_{21}) \sqrt{T-t} N} \right] E^Q \left[e^{-\sigma_{22} \sqrt{T-t} N} \right] E^Q \left[e^{(\sigma_{r3} - \sigma_{23}) \sqrt{T-t} N} \right]$$

$$e^{\frac{(\sigma_{r1} - \sigma_{21})^2 (T-t)}{2}} e^{\frac{\sigma_{22}^2 (T-t)}{2}} e^{\frac{(\sigma_{r3} - \sigma_{23})^2 (T-t)}{2}}$$

$$e^{\frac{1}{2} (\sigma_{r1}^2 + \sigma_{21}^2 - 2\sigma_{r1}\sigma_{21} + \sigma_{22}^2 + \sigma_{r3}^2 + \sigma_{23}^2 - 2\sigma_{r3}\sigma_{23})(T-t)}$$

$$V_2(t, x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2} e^{-(r + \sigma_1 \sigma_{21} + \sigma_3 \sigma_{23})(T-t)} e^{(\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{23}^2)(T-t)}$$

$$(iv) \quad \frac{\partial V_1}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2} e^{-(r + \sigma_1 \sigma_{21} + \sigma_3 \sigma_{23})(T-t)} e^{(\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{23}^2)(T-t)} \quad \text{quote in azioni di tipo 1}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_2^2} e^{-(r + \sigma_1 \sigma_{21} + \sigma_3 \sigma_{23})(T-t)} e^{(\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{23}^2)(T-t)} \quad \text{quote in azioni di tipo 2}$$

$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} > 0$ e non dipende da x_1 mentre $\frac{\partial V_1}{\partial x_2} < 0$ e dipende sia da x_1 che da x_2

$\Downarrow$ Pos. Bunga in azioni del primo tipo $\Downarrow$ posizione corta in azioni di tipo 2

2. $Q(\tau > t) = e^{-\lambda \tau t} \quad t > 0$

(i) $P_{RT}(0, T) = \mathbb{E}^Q [x e^{-rT} \mathbb{1}_{\tau > T} + e^{-rT} (1-\delta) \mathbb{1}_{\tau \leq T}] =$

$$= x e^{-rT} \{ Q(\tau > T) + (1-\delta)(1 - Q(\tau > T)) \} =$$

$$= x e^{-rT} \{ (1-\delta) + \delta Q(\tau > T) \} = x e^{-rT} \{ (1-\delta) + \delta e^{-\lambda \tau T} \}$$

(ii)

$$P_{RT}(t, T) = \mathbb{E}^Q [x e^{-r(T-t)} \mathbb{1}_{\tau > T} + x e^{-r(T-t)} (1-\delta) \mathbb{1}_{\tau \leq T} \mid \mathcal{F}_t]$$

$$x e^{-r(T-t)} \mathbb{1}_{\tau > T} \quad t \leq T$$

$$x e^{-r(T-t)} \mathbb{1}_{\tau \leq T} \quad t \leq T$$

Tenendo conto de $Q(\tau > T | \mathcal{F}_t) = e^{-\lambda Q(\tau-t)} \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}$, $Q(\tau \leq T | \mathcal{F}_t) = 1 - Q(\tau > T | \mathcal{F}_t)$

eseguendo dei conti analoghi al caso precedente

$$\Rightarrow P_{R_T}(t, T) = x e^{-\lambda(t-T)} (1-\delta) + \delta e^{-\lambda Q(\tau > T | \mathcal{F}_t)} = x e^{-\lambda(t-T)} (1-\delta) + \delta e^{-\lambda Q(\tau-t)} \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}$$

(iii) $P_0 = 98 = 100 e^{-rT}$ $T = 10 \text{ mesi}$ $\delta = 0.4$

$$P_{R_T}(0, T) = 92$$

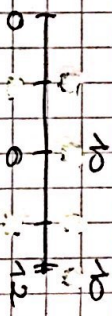
$$P_{R_T}(0, T) = P_0(0, T) \{ 1 - \delta + \delta e^{-\lambda T} \}$$

$$\Rightarrow \frac{P_{R_T}(0, T)}{P_0(0, T)} = 1 - \delta + \delta e^{-\lambda T} \quad e^{-\lambda T} = \frac{P_{R_T}(0, T)}{\delta P_0(0, T)} - \frac{1-\delta}{\delta} = \frac{92}{0.4 \cdot 98} - \frac{0.6}{0.4} = 0.8469$$

$$Q(\tau \leq T) = 1 - e^{-\lambda Q T} = 1 - 0.8469 = 0.1531 \quad \text{prob. di default entro 1 anno}$$

$$\lambda^Q = -\frac{1}{T} \ln(0.8469) = 0.166$$

(iv) Calcolare semestrali pari a 10 €



$$P_{R_T}^C(0, T) = P_{R_T}(0, T) + \text{valore cedole}$$

$$\text{valore delle cedole} = E^Q[10 \cdot e^{-r \frac{T}{2}} \mathbb{1}_{\{\tau > \frac{T}{2}\}} + 10 e^{-rT} \mathbb{1}_{\{\tau > T\}}] =$$

$$\text{tenendo conto de } E^Q[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}}] = Q(\tau > t) = e^{-\lambda^Q t}$$

$$\text{valore delle cedole} = 10 \text{ f} e^{-(r+x^Q)^{1/2}} + e^{-(r+x^Q)} \quad x^Q = 0.166$$

Calcoliamo il valore del titolo al tempo 0: $e^{-rt} = \frac{98}{100}$ $r = -\frac{1}{t} \ln\left(\frac{98}{100}\right) = 0.02 = 2\%$

$$\Rightarrow 10 \text{ f} e^{-(0.02+0.166)^{1/2}} + e^{-(0.02+0.166)} = 87.412 \text{ €}$$

$$P_{RT}^C(0, T) = 92 + 87.412 = 109.412 \text{ €}$$

(iv) $P_{RT}^C(t, T) = P_{RT}^C(t, T) + \text{valore delle cedole al tempo } t$

$$10 \sum_{t_i > t} e^{-r(t_i-t)} \mathbb{1}_{\{r > t_i\}} | \mathcal{R}_t$$

"

$$10 \sum_{t_i > t} e^{-r(t_i-t)} \underbrace{\mathbb{Q}(r > t_i | \mathcal{R}_t)}_{e^{-x^Q(t_i-t)} \mathbb{1}_{\{r > t_i\}}}$$

$$t_1 = \frac{1}{2} \text{ anno}$$

$$t_2 = 1 \text{ anno}$$

$$\Rightarrow P_{RT}^C(t, T) = P_{RT}^C(t, T) + 10 \text{ f} \left\{ e^{-(r+x^Q)(\frac{1}{2}-t)} \mathbb{1}_{\{t < \frac{1}{2}\}} + e^{-(r+x^Q)(1-t)} \mathbb{1}_{\{t > \frac{1}{2}\}} \right\}$$