Capitolo 6

Problemi di Localizzazione

I modelli di localizzazione ed i relativi algoritmi di soluzione sono uno dei principali strumenti quantitativi per la pianificazione territoriale di *reti di servizio*. Questi modelli hanno come obiettivo generale quello di definire le localizzazioni di *centri di servizio* (impianti di produzione, centri di distribuzione, sportelli bancari etc.) che debbono soddisfare una domanda dispersa nel territorio (negozi, comunità o singoli clienti). Elemento caratteristico di tutti i modelli di localizzazione è quello di definire *simultaneamente* la localizzazione dei centri di servizio e l'allocazione della domanda a tali centri. Per tale caratteristica i modelli di localizzazione vengono anche detti modelli di *localizzazione/allocazione ("location/allocation")*.

La capacità di rappresentare il progetto della rete di distribuzione come soluzione di un unico problema di ottimizzazione è certamente uno dei principali motivi del successo di questi modelli negli ultimi venticinque anni. Infatti, è evidente come la scelta della localizzazione di un singolo centro di servizio condizioni il distribuirsi complessivo della domanda e, di conseguenza, modifichi la qualità della localizzazione scelta per tutti gli altri centri di servizio. Pertanto, tutti i metodi che definiscono le localizzazioni effettuando una analisi costi/benefici di un singolo centro alla volta, tendono a valutare la qualità delle reti di servizio con criteri di gran lunga meno significativi di quelli ottenibili utilizzando i modelli che studieremo in questo capitolo.

Altre due ragioni del grande successo dei modelli di localizzazione / allocazione sono la grande varietà degli indici (funzioni obiettivo) che possono essere utilizzati per valutare la qualità delle reti di servi-

zio e la possibilità di incorporare facilmente nel modello matematico vincoli ed ipotesi specifiche del problema reale che si vuole rappresentare. Un'ultima, ma non meno importante, motivazione per il crescente utilizzo di tali modelli è costituita dalla disponibilità di semplici ed efficienti algoritmi di soluzione. Tali algoritmi, estremamente efficienti e di facile programmazione, consentono di ottenere, con un ragionevole sforzo computazionale, soluzioni ottime o quasi-ottime anche per problemi di grandi dimensioni.

In questo capitolo, dopo aver illustrato con alcuni esempi le principali tipologie di problemi reali di progetto di reti di servizi, descriveremo brevemente le caratteristiche dei più diffusi modelli di localizzazione. Successivamente, allo scopo di illustrare alcune metodologie utilizzate per l'analisi e l'individuazione di soluzioni ottime per tali modelli, approfondiremo lo studio di un modello sufficientemente semplice ma di grande generalità: il problema della *Localizzazione degli Impianti* (*"Plant Location"*). Di tale problema descriveremo alcune formulazioni di programmazione lineare $\{0,1\}$ ed i più efficaci algoritmi di soluzione.

6.1 Problemi di Localizzazione

6.1.1 Progetto di Sistemi di Distribuzione

La localizzazione ed il dimensionamento dei centri di distribuzione costituisce uno dei principali problemi che le grandi aziende industriali e commerciali debbono affrontare per ottimizzare la loro posizione di mercato. Si consideri, ad esempio, il caso di una grande azienda alimentare che commercializzi i suoi prodotti su scala nazionale. Essa ha bisogno di gestire grandi centri di immagazzinamento regionali, riforniti direttamente dai centri di produzione, e piccoli centri di distribuzione locali, riforniti dai centri regionali e che, a loro volta riforniscono negozi e supermercati.

La progettazione di tale rete di distribuzione richiede la determinazione della localizzazione di un certo numero di centri di distribuzione regionali e locali in un insieme di *localizzazioni potenziali* e la simultanea assegnazione della domanda dei negozi ai centri di distribuzione locali, del conseguente fabbisogno di questi ultimi ai centri regionali ed, infine, l'assegnazione del fabbisogno dei singoli centri regionali agli impianti produttivi.

La valutazione della qualità della rete di distribuzione può essere fatta definendo alcune *funzioni obiettivo* che dipendono, a loro volta, da alcuni parametri oggettivi associati alle localizzazioni potenziali, alla struttura della domanda al dettaglio ed alle caratteristiche degli impianti produttivi.

In particolare, ciascun impianto produttivo potrà essere caratterizzato da specifici costi unitari di produzione e dalla capacità produttiva massima; ciascuna localizzazione potenziale per i centri di distribuzione (regionali o locali) ha costi di costruzione e manutenzione suoi propri che dipendono, tra l'altro, dalle infrastrutture esistenti, dalle politiche di incentivazione, dal costo e dalla disponibilità della manodopera. Infine, ciascun negozio o supermercato è caratterizzato da una precisa localizzazione e da una domanda stimata di ciascun bene.

Inoltre, poichè il problema di allocazione della domanda deve essere sempre valutato simultaneamente a quello della localizzazione, sono parametri fondamentali anche le distanze ed i costi di trasporto unitari da ciascun impianto a ciascuna localizzazione potenziale e da queste ultime ai negozi ed ai supermercati.

Utilizzando tali parametri è possibile definire funzioni obiettivo da minimizzare quali la somma totale dei costi di produzione, stoccaggio e trasporto oppure la somma totale delle distanze della rete di distribuzione.

Evidentemente, problemi analoghi al progetto di reti di distribuzione sorgono nella progettazione di sistemi di supporto logistico, nella localizzazione di sportelli bancari, uffici postali, servizi di emergenza e centri di commutazione in sistemi di telecomunicazioni.

6.1.2 Modelli di Localizzazione Competitiva

Il progetto di una rete di servizi assume connotati assai diversi da quelli visti nell'esempio precedente quando si vogliano tenere in conto gli effetti che lo stabilirsi dei nuovi centri produce sulla struttura del mercato ed in particolare sulla quota di mercato posseduta dell'azienda. Infatti, nell'esempio precedente la domanda finale di beni si è assunta nota ed indipendente dalla localizzazione dei centri di distribuzione locali. Tale assunzione è valida solo se si ipotizza che negozi e supermercati possano essere riforniti unicamente dalla nostra azienda e che, indipendentemente dalla localizzazione dei centri di distribuzione, la domanda di ciascun negozio resti costante.

Tale ipotesi è estremamente ragionevole quando l'azienda possiede una posizione dominante sul mercato (modello monopolistico) e l'effetto della concorrenza delle altre aziende in grado di fornire gli stessi beni e servizi può essere trascurato. Quando invece l'azienda non ha tale posizione dominante (modello non-monopolistico) allora l'effetto della competizione deve essere tenuto in conto sia nella definizione degli obiettivi che nella formulazione del modello.

In particolare, in un *problema di localizzazione competitiva* più aziende, ciascuna con la propria rete di servizi, competono sul mercato per attrarre la domanda dei clienti finali. La quota di mercato di ciascuna azienda dipende, a parità di costi di produzione, trasporto e stoccaggio, dalla localizzazione dei suoi centri di servizio e dalla interazione di tali centri con quelli delle aziende concorrenti.

I modelli di localizzazione competitiva si distinguono in base alle assunzioni sul tipo di reazione delle aziende concorrenti all'ingresso sul mercato di una nuova azienda. Se i concorrenti non reagiscono e non modificano la localizzazione dei loro centri di servizio il problema si dice di localizzazione competitiva *passiva*. Se, al contrario, si ipotizza che le aziende concorrenti modifichino la localizzazione dei loro centri di servizio in risposta alle nostre scelte, abbiamo un problema di localizzazione competitiva *attiva*. I problemi di localizzazione competitiva attiva sono, ovviamente, più complessi e possono essere affrontati utilizzando le tecniche della *Teoria dei Giochi*.

Al contrario, i problemi di localizzazione competitiva passiva possono essere studiati utilizzando i modelli di ottimizzazione e gli algoritmi che verranno descritti in questo capitolo. In particolare, il più semplice problema di localizzazione competitiva passiva è quello nel quale una azienda deve progettare la sua rete di servizio in un mercato già occupato dalle aziende concorrenti. Si assume che ciascun cliente (utente finale) si rivolga al centro di servizio più vicino. Dei concorrenti sono note le localizzazioni dei centri di servizio e, di conseguenza, le quote di mercato.

Il problema è quello di determinare la localizzazione di un numero fissato p di centri di servizio in modo tale da massimizzare il numero di clienti che afferiranno a tali centri (quota di mercato dell'azienda).

Si osservi che l'ipotesi che un cliente si rivolga al centro più vicino non è molto realistica. Tale assunzione implica che l'unico obiettivo del cliente sia quello di minimizzare la distanza percorsa e che non abbiano alcun effetto altri criteri quali la fedeltà ai fornitori abituali, il nome dell'azienda fornitrice e le condizioni di vendita. Per rendere più realistico il modello sono stati proposti in letteratura indici di attrattività più significativi, basati su una più articolata struttura della funzione di utilità del cliente.

6.1.3 Localizzazione di Conti Bancari

È noto che un assegno fuori piazza viene effettivamente versato sul conto con un certo numero di giorni di ritardo. Tale ritardo costituisce un costo per l'azienda che incassa l'assegno, sia per il mancato accredito degli interessi che per la temporanea indisponibilità della somma. Una grande azienda con clienti distribuiti sul territorio nazionale ha la possibilità di ridurre in modo sostanziale tali costi aprendo una serie di conti bancari localizzati il "più vicino" possibile ai suoi clienti in modo tale che i maggiori costi di apertura e gestione dei nuovi conti vengano controbilanciati dai risparmi (minori costi) ottenuti anticipando l'accredito degli interessi e la disponibiltà valutaria.

Il problema di localizzazione consiste dunque nello scegliere, tra un insieme di localizzazioni possibili, in quante e quali banche attivare i conti tenendo conto del fatturato annuo e della localizzazione territoriale dei clienti, del costo di apertura e gestione dei conti ed infine dei risparmi realizzabili anticipando l'accredito degli interessi e la disponibilità della valuta.

6.1.4 Problemi di Classificazione ("Clustering")

Un problema di Classificazione consiste nel partizionare gli oggetti in classi ("clusters") in modo tale che gli elementi di ciascuna classe abbiano tra loro un alto livello di affinità, mentre gli elementi appartenenti a classi diverse siano sufficientemente distinti l'uno dall'altro. Problemi di Classificazione sorgono abbastanza naturalmente in biologia, psicologia, medicirra, intelligenza artificiale, marketing ed in molti altri dominii applicativi.

Sia $I = \{1, \dots, m\}$ l'insieme degli oggetti da classificare. Il processo di classificazione è usualmente realizzato individuando un sottoinsieme $J = \{j_1, \dots, j_n\}$ di I (rappresentanti) e successivamente partizionando l'insieme I in n classi, ciascuna contenente uno specifico rappresentante e costituita da elementi "affini" al rappresentante.

L'affinità di due elementi è usualmente rappresentata da un indice c_{ij} con $i, j \in I$. Ad esempio, c_{ij} potrebbe essere il numero di sintomi comuni di due malattie o di caratteri biologici in comune a due specie animali. Detto I_j l'insieme di elementi della classe rappresentata da j, abbiamo che l'obiettivo del processo di classificazione è quello di selezionare un insieme di rappresentanti $J \subseteq I$ in modo tale da massimizzare la somma:

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} c_{ij}$$

Apparentemente, i problemi di classificazione non hanno nulla in comune con i problemi di localizzazione. Eppure, se si interpretano gli elementi da classificare come clienti, i rappresentanti come centri di servizio ed il generico coefficiente c_{ij} come le propensione del cliente i ad afferire al centro di servizio j, abbiamo che anche il problema della classificazione può essere modellato e risolto come problema di localizzazione.

6.2 Modelli di localizzazione

Un modello di localizzazione è caratterizzato da una serie di attributi che ne specificano le caratteristiche e la cui determinazione deve essere attentamente valutata al momento di formulare in termini quantitativi un problema reale del tipo di quelli visti nel paragrafo precedente. Infatti, la scelta di una o dell'altra caratteristica determina una maggiore o minore aderenza del modello alla effettiva struttura del problema e, quindi, una maggiore o minore possibilità di utilizzare efficacemente le soluzioni ottenute per mezzo degli algoritmi di ottimizzazione.

Un primo fondamentale attributo del modello è costituito dalla struttura della funzione obiettivo. Infatti, possiamo avere modelli ad *obiettivo singolo* o modelli *multi-obiettivo*.

Nel primo caso la funzione obiettivo è costituita da una unica funzione (lineare o non lineare) delle variabili decisionali del problema. Ad esempio, nel problema del progetto di una rete di distribuzione l'obiettivo singolo potrebbe, ad esempio, essere la minimizzazione della funzione costituita dalla somma dei costi di attivazione dei centri regionali e locali meno la sommatoria dei ricavi ottenuti assegnando i clienti ai centri attivati.

Un modello multi-obiettivo (o multicriterio) sarà invece necessario per modellare situazioni in cui si vogliano ottimizzare simultaneamente molte funzioni obiettivo incommensurabili. Evidentemente, un modello multiobiettivo costituisce spesso una rappresentazione più aderente alla realtà. Tuttavia gli algoritmi e le tecniche di analisi sviluppate per i problemi ad obiettivo singolo sono di gran lunga più efficaci di quelli disponibili per i modelli multiobiettivo. Pertanto, pur non sottovalutando l'importanza dell'ottimizzazione multiobiettivo, in queste note limiteremo la nostra indagine a modelli ad obiettivo singolo.

Si osservi, comunque, che obiettivi diversi ed a volte contrastanti possono essere spesso modellati con una funzione obiettivo unica effettuando opportune combinazioni lineari delle funzioni che rappresentano i singoli obiettivi. I coefficienti di tale combinazione potranno essere dimensionati in modo tale da tener conto della nostra soggettiva valutazione dell'importanza relativa degli obiettivi. Ad esempio, se nel problema di localizzazione dei conti bancari vogliamo tener conto dei ricavi ed, allo stesso tempo, della qualità (affidabilità) degli istituti bancari prescelti, potremo definire indici di qualità associati a ciascuna localizzazione potenziale e costruire la funzione obiettivo come somma dei ricavi (maggiori interessi e disponibilità di valuta) meno la somma dei costi di attivazione e gestione più la somma degli indici di qualità delle banche prescelte moltiplicate per una opportuna costante che renda l'effetto di quest'ultima sommatoria sensibile solo a parità di guadagno (ricavi−costi).

Evidentemente, la massimizzazione della precedente funzione obiettivo ci porterà ad attivare l'insieme di conti bancari che massimizza il guadagno (obiettivo primario) ed a scegliere, tra due soluzioni che procurano guadagni uguali (o quasi uguali), quella che possiede un maggiore indice di affidabilità (obiettivo secondario).

Una seconda caratteristica che deve essere specificata al momento

della definizione di un modello di localizzazione è quella che riguarda la struttura del prodotto fornito dalla rete di servizio. In particolare, avremo modelli a *prodotto singolo* ("single-commodity") e modelli *multi-prodotto* ("multi-commodity").

Il modello a prodotto singolo fornisce una efficace rappresentazione di tutti quei problemi di localizzazione per i quali i costi di produzione e distribuzione, il prezzo di vendita al dettaglio e tutti gli altri parametri caratteristici dei prodotti forniti dalla rete di servizio possono essere considerati approssimativamente uguali senza inficiare la significatività del modello.

I modelli a prodotto singolo si adattano particolarmente bene al carattere *strategico* dei problemi di localizzazione. Ad esempio, nel decidere la localizzazione di nuove fabbriche di automobili a livello nazionale o mondiale, i parametri che definiscono i costi ed i benefici debbono essere, in qualche misura, indipendenti dal tipo di prodotto. Bisogna infatti tener presente che, nel lungo ciclo di vita degli impianti e della rete di distribuzione, le caratteristiche dei prodotti così come i valori dei costi di produzione e trasporto potranno subire anche sostanziali modificazioni. Di conseguenza, nel costruire il modello di localizzazione si dovrà ipotizzare che la rete produca e distribuisca un *prodotto standard* le cui caratteristiche (quantità, costi di produzione e trasporto, domanda e prezzi al dettaglio) siano state definite in modo tale da rappresentare nel modo migliore la produzione complessiva (produzione aggregata) futura degli impianti.

Quando, al contrario, i parametri caratteristici dei beni distribuiti dalla rete di servizi assumono valori significativamente divergenti, diventa allora necessario definire modelli multi-prodotto. In tali modelli la quantità prodotta, trasportata e venduta di ogni singolo bene diviene una variabile decisionale e l'interazione tra produzione e distribuzione di beni diversi viene opportunamente rappresentata dai vincoli del modello. In queste note descriveremo soltanto modelli a prodotto singolo.

Concludiamo questa presentazione delle caratteristiche generali dei modelli di localizzazione con una breve discussione sulla rappresentazione dei centri di servizio, della domanda finale e delle interazioni tra questi due elementi fondamentali del modello.

In tutti i modelli di localizzazione, i centri di servizio sono, in genere, caratterizzati da una capacità (produttiva e di immagazzinamento), dalla localizzazione geografica, dai costi (di produzione e stoccaggio) in funzione delle quantità prodotte (o immagazzinate).

Nel caso si trascuri il limite imposto dalla capacità produttiva o di immagazzinamento (capacità infinita) avremo modelli *non-capacitati*. Tali modelli pur essendo, in generale, poco realistici, hanno una struttura matematica più semplice e, quindi, consentono una più accurata analisi delle loro proprietà strutturali e, di conseguenza, la definizione di semplici ed efficienti algoritmi di soluzione. Inoltre, tali algoritmi sono, molto spesso, agevolmente generalizzabili al caso con capacità finita.

Per quanto riguarda la localizzazione geografica, l'ipotesi più frequente, almeno nei modelli che studieremo in questo capitolo, è quella di associare le localizzazioni potenziali dei centri di servizio e le localizzazioni della domanda (*clienti*) ai *nodi di un grafo non orientato*. Tale ipotesi elimina tutte le informazioni geografiche (coordinate della localizzazione, struttura del territorio circostante etc.) e conserva soltanto quelle informazioni topologiche (quali clienti sono connessi alla localizzazione potenziale del centro di servizio, a quale distanza etc.) che sono meglio utilizzabili nella costruzione del modello. In tale rappresentazione, le coppie di nodi sono connesse da *archi* ai quali vengono associati uno o più valori che quantificano la relazione tra i due nodi. Tipici valori associati agli archi sono la distanza tra il centro ed il cliente, la preferibilità di una localizzazione potenziale per un determinato cliente, il costo di trasporto unitario dal centro al cliente etc.

Come già osservato, con il termine "cliente" si indica spesso un *aggregato* di molti individui il cui comportamento possa essere giudicato omogeneo nell'ambito di interesse e validità del modello. Consideriamo, come esempio, il caso di una rete di servizio pubblico (servizio sanitario, di emergenza, postale etc.) che debba essere progettata con l'obiettivo di massimizzare una opportuna funzione del benessere sociale. In tal caso, se l'obiettivo consiste nella minimizzazione della distanza dai centri di servizio dai cittadini, allora il singolo cliente potrà essere rappresentato dai residenti di un quartiere, la domanda sarà la domanda dell'intero quartiere e le distanze saranno calcolate dai centri di servizio ad un punto ideale che rappresenti il centro del quartiere (*centroide*). Se, invece, l'obiettivo è quello di massimizzare il benessere di specifiche categorie di cittadini come gli invalidi o gli anziani allora bisognerà definire i clienti come raggruppamenti territorialmente omogenei di tali categorie e ridefinire, di conseguenza, domanda aggregata e centroidi.

Abbiamo finora illustrato alcune delle principali caratteristiche dei modelli di localizzazione ed osservato come tali caratteristiche influenzino la complessità del modello ed, al tempo stesso, la sua capacità di fornire soluzioni efficienti ai problemi reali che rappresenta.

Intendiamo ora descrivere alcuni specifici modelli di localizzazione ed esemplificare brevemente la loro maggiore o minor efficienza nella rappresentazione e soluzione di semplici problemi reali. Come detto nelle pagine precedenti, ci limiteremo a modelli con *singolo obiettivo*, *singolo prodotto* e nei quali centri di servizio e clienti siano localizzabili, rispettivamente, nei nodi degli insiemi U e V di un grafo *bipartito* non orientato $G(U, V, E)$. In tale ipotesi, a ciascun arco $uv \in E$ sarà associato un valore reale c_{vu} che rappresenta il *costo* da pagare se si vuol mettere in relazione il cliente $v \in V$ con il centro di servizio $u \in U$ (ad esempio la distanza tra i nodi u e v).

Esamineremo ora tre diversi modelli di localizzazione: il modello della *p-Mediana*, il modello del *p-Centro* ed il modello di *Localizzazione degli Impianti*. Tutti e tre questi modelli hanno come obiettivo quello di attivare un certo numero di centri di servizio e di assegnare ogni cliente $v \in V$ ad *un solo* centro di servizio attivato in modo tale da minimizzare, rispettivamente, la somma dei costi di afferenza, il costo di afferenza massimo e la somma dei costi di afferenza e dei costi di attivazione dei centri di servizio.

Nei tre modelli appena descritti non è mai conveniente assegnare un cliente v ad un centro di servizio u (pagando c_{vu}) se è attivato un centro di servizio u' con $c_{vu'} < c_{vu}$. Pertanto, nel modelli di p-centro, p-mediana e localizzazione degli impianti l'*allocazione* dei clienti ai centri di servizio è totalmente determinata dalla scelta dell'insieme dei centri di servizio attivati (*localizzazione*). Infatti, una volta definito l'insieme Tdegli impianti attivati avremo che: *ciascun cliente v sarà*

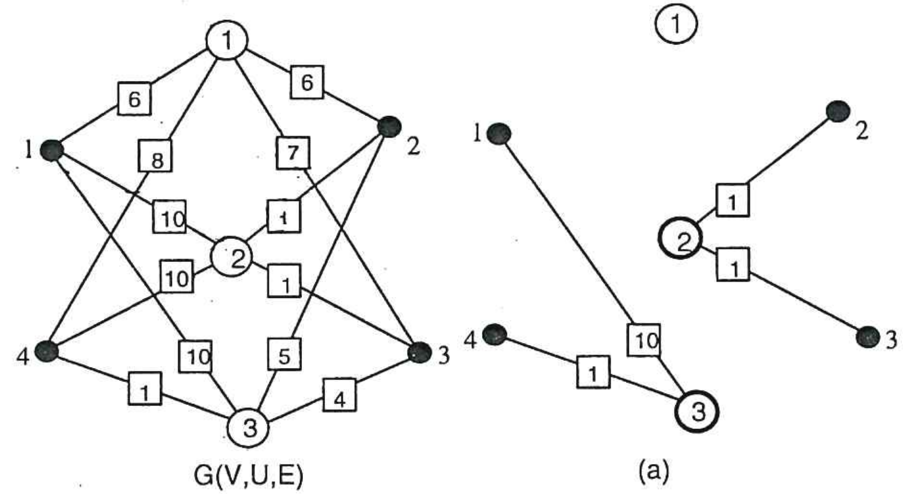

Figura 6.1:

assegnato al centro di servizio $\ell(v,T) \in T$ *che minimizza il costo di allocazione* $c_{v\ell(v,T)}$, ovvero:

$$c_{v\ell(v,T)} = \min_{u \in T}\{c_{vu}\}$$

Esaminiamo ora i tre problemi più in dettaglio. Nel *problema della p-mediana* l'obiettivo è quello di attivare esattamente p centri di servizio e, come si è detto, di assegnare ogni cliente $v \in V$ ad *un solo* centro di servizio attivato in modo tale da *minimizzare la somma dei costi di afferenza.*

Quindi, l'obiettivo del problema della p-mediana può essere espresso, in funzione dell'insieme $T \subseteq U$ dei centri di servizio attivati, nella forma:

$$Z_m(T) = \sum_{v \in V} c_{v\ell(v,T)}$$

Si osservi che nel problema di p-mediana si trascurano i costi di attivazione dei centri servizi e la loro capacità. Tale assunzione è accettabile

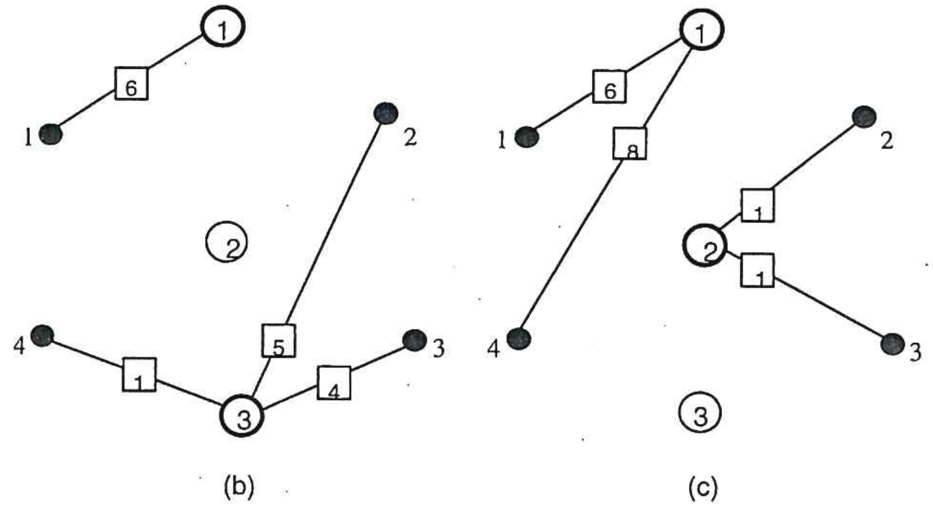

Figura 6.2:

per tutti quei problemi reali nei quali il costo di attivazione sia costante in tutte le localizzazioni potenziali e la capacità sia molto superiore alla domanda complessiva e possa essere considerata infinita.

Ad esempio, il modello di p-mediana può essere efficacemente utilizzato per rappresentare il problema del progetto di una rete di comunicazione a fibre ottiche dove una compagnia telefonica debba localizzare e costruire p nuove centrali di commutazione di uguali caratteristiche ed abbia come unico obiettivo la minimizzazione della lunghezza complessiva dei cavi da mettere in opera.

Un altro problema reale che può essere efficacemente rappresentato dal modello di p-mediana è quello in cui, in una situazione di localizzazione competitiva passiva, si vogliano definire le localizzazioni di p nuovi centri di servizio ai quali afferiscano il maggior numero di clienti, abbandonando i centri di servizio della concorrenza.

Esercizio: Associare al semplice problema di localizzazione competitiva passiva appena descritto un modello di p-mediana.

Un modello di localizzazione molto simile al precedente, ma con una diversa funzione obiettivo è il *problema del p-centro*. In tale modello, l'obiettivo è ancora quello di attivare un insieme $\bar{U} \subseteq U$ di p centri di servizio e di assegnare ogni cliente $v \in V$ ad un centro $\ell(v,T) \in T$, in modo tale da *minimizzare* la quantità:

$$Z_c(T) = \max\{c_{v\ell(v,T)} : v \in V\}$$

ovvero il *massimo costo* che un generico cliente deve pagare per afferire al centro servizi al quale è stato assegnato.

Il problema di p-centro è quindi un esempio di modello con funzione obiettivo di tipo *"minmax"* (minimizzazione del massimo costo) mentre il problema di p-mediana appartiene alla famiglia dei modelli con funzione obiettivo di tipo *"minsum"* (minimizzazione della somma dei costi). I modelli "minsum" hanno come obiettivo la minimizzazione del costo complessivo e sono quindi adatti a rappresentare problemi reali nei quali l'interesse prioritario è quello del decisore (minimizzare i costi) e l'interesse del singolo cliente non deve essere preso in considerazione. I modelli di "minmax", al contrario, sono più adatti a rappresentare situazioni nelle quali si voglia tenere in conto anche l'interesse di ogni singolo cliente, ad esempio nella progettazione di una rete di servizi pubblici. In tal caso, infatti, l'utilizzo di un modello "minmax" consente di minimizzare il costo pagato dal cliente più "sfortunato".

Ad esempio, si supponga di dover localizzare un ospedale che debba servire più comunità distribuite nel territorio. Supponiamo inoltre che le comunità non siano distribuite uniformemente ma che la maggior parte di esse siano concentrate a breve distanza l'una dall'altra mentre un piccolo sottoinsieme sia costituito da comunità localizzate a grande distanza.

Se si sceglie di minimizzare una funzione obiettivo di tipo "minsum" (ad es. la somma delle distanze da tutte le comunità) allora è molto probabile che l'algoritmo individui una localizzazione ottima dell'ospedale in prossimità della maggioranza delle comunità, penalizzando le comunità più lontane. Al contrario, un criterio "minmax" penalizzerà leggermente le comunità più concentrate minimizzando però la distanza dalla comunità più disagiata.

Il terzo modello di localizzazione che intendiamo descrivere è il cosiddetto modello di *Localizzazione degli Impianti* (*"Plant Location"*). Tale modello ha una funzione obiettivo di tipo "minsum" ed è molto

simile al modello di p-mediana. Infatti, anche in questo caso si ha l'obiettivo di attivare un insieme $T \subseteq U$ di centri di servizio e di assegnare ogni cliente $v \in V$ ad un centro di servizio $\ell(v,T) \in T$. Tuttavia, contrariamente al modello di p-mediana, nel modello di Localizzazione degli Impianti non si trascura il *costo di attivazione* f_u di un centro di servizio (impianto) $u \in U$ e non impone di attivare un numero fissato p di centri di servizio. L'obiettivo in questo caso è quello di *minimizzare la somma del costo di afferenza dei clienti ai centri di servizio e del costo di attivazione dei centri di servizio*, ovvero:

$$Z(T) = \sum_{v \in V} c_{v\ell(v,T)} + \sum_{u \in T} f_u$$

Esempio: *Sia dato il grafo $G(V,U,E)$ rappresentato in figura (6.1). Il numero associato a ciascun arco $uv \in E$ rappresenta il "costo" (distanza, preferenza etc.) di afferenza del cliente v al centro di servizio u.*

La 2-mediana del grafo G è rappresentata in figura (6.1) (a). Essa è caratterizzata dall'insieme di centri di servizio attivati $\{2,3\}$ ed ha valore $Z_m(\{2,3\}) = 13$. Il 2-centro del grafo G è invece rappresentato in figura (6.2) (b), è caratterizzato dall'insieme di centri di servizio attivati $\{1,3\}$ ed ha valore $Z_c(\{1,3\}) = 6$.

Infine, se i costi di costruzione sono, rispettivamente, $f_1 = 4$, $f_2 = 5$ ed $f_3 = 10$, abbiamo che la soluzione ottima del problema di localizzazione degli impianti si ottiene attivando gli impianti 1 e 2 (figura (6.2) (c)) ed ha valore $Z(\{1,2\}) = 25$. Si osservi come, nel caso del problema di localizzazione degli impianti, sia necessario valutare le soluzioni associate a tutti i possibili insiemi di impianti aperti. Ad esempio, abbiamo che $Z(\{2\}) = 27$ e $Z(\{1,2,3\}) = 28$. □

6.3 Localizzazione degli Impianti

In questa sezione approfondiremo le proprietà di un problema di localizzazione di grande generalità definito nel paragrafo precedente: il Problema di Localizzazione degli Impianti. Con riferimento a tale problema, descriveremo due metodi euristici per l'individuazione di buone soluzioni ammissibili, il metodo *"greedy"* ed il metodo di *ricerca loale*.

In un paragrafo successivo, descriveremo due interessanti formulazioni di programmazione lineare $\{0,1\}$ per il problema di Localizzazione degli Impianti: la formulazione *forte* e la formulazione *debole*. Infine, nell'ultimo paragrafo descriveremo un algoritmo particolarmente veloce ed efficiente per calcolare una buona approssimazione del "lower bound" associato alla formulazione forte.

Prima di iniziare la descrizione dei principali metodi utilizzati per la soluzione del problema di Localizzazione degli Impianti vogliamo brevemente approfondire la natura dei parametri che caratterizzano il problema.

Iniziamo dai costi di attivazione degli impianti. Come abbiamo visto nella descrizione generale dei problemi di localizzazione, i costi f_u associati a ciascun impianto $u \in U$ possono rappresentare le situazioni più diverse. Tuttavia, la struttura del modello ci permette di assumere che ciascun valore f_u sia *strettamente positivo*. Infatti, se un impianto $\bar{u} \in U$ ha un costo di attivazione *non-positivo* allora è possibile risolvere un problema semplificato nel quale l'impianto $\bar{u}$ appartiene sempre all'insieme degli impianti attivati. Infatti, se $f_{\bar{u}} \leq 0$ abbiamo che il valore della funzione obiettivo corrispondente ad una soluzione con $\bar{u}$ attivato è sempre *non peggiore* del valore della funzione obiettivo corrispondente ad una soluzione con $\bar{u}$ disattivo. Grazie alla precedente osservazione potremo assumere, nel resto del capitolo, che $f_u > 0$ per ogni $u \in U$.

Per quanto riguarda i coefficienti c_{vu}, abbiamo già detto come essi rappresentino lo *svantaggio* (costo) di assegnare un cliente $v \in V$ ad un impianto $u \in U$. Per dare più concretezza a tale concetto illustriamo brevemente le metodologia per definire tale svantaggio in una situazione realistica nella quale si debbano localizzare alcuni impianti produttivi in un insieme U di localizzazioni potenziali allo scopo di rifornire un insieme di clienti V.

Supponiamo che siano noti il *costo di produzione unitario* q_u nella localizzazione potenziale $u \in U$, il *costo di trasporto unitario* t_{vu} dalla localizzazione potenziale $u \in U$ al cliente $v \in V$, la *domanda* d_v di ciascun cliente $v \in V$ ed, infine, il *prezzo unitario di vendita* al cliente $v \in V$. In tal caso, lo svantaggio di assegnare il cliente $v \in V$ alla

localizzazione potenziale $u \in U$ sarà:

$$c_{vu} = d_v(q_u + t_{vu} - p_v)$$

e potrà (anzi dovrà!) anche assumere valori negativi.

Un'altra importante proprietà del problema di Localizzazione degli Impianti consiste nel fatto che i coefficienti c_{vu} possono sempre essere resi non-negativi, senza modificare l'insieme delle soluzioni ottime del problema. Infatti, se sommiamo a ciascun coefficiente c_{vu} la costante:

$$\Delta = \min_{u \in U, v \in V} \{c_{vu}\}$$

otteniamo una nuova matrice con tutte componenti non-negative. Inoltre, poichè ciascun cliente è assegnato ad esattamente una localizzazione potenziale abbiamo che il valore di ogni soluzione ammissibile aumenta della quantità costante:

$$\sum_{v \in V} \Delta = \Delta |V|.$$

Pertanto, l'insieme delle soluzioni ottime resta invariato.

Concludiamo questa breve introduzione osservando che, per semplicità, nel resto di questo capitolo utilizzeremo il termine "impianto" per indicare una localizzazione potenziale $u \in U$.

6.3.1 Localizzazione degli Impianti: Metodi Euristici

In queste note, indicheremo con il termine *metodo euristico* (dal greco "euriskein"= scoprire) un meccanismo logico algoritmico che ci sia di ausilio e guida nella individuazione di soluzioni ammissibili per un problema di ottimizzazione. In modo più specifico, con riferimento ad un problema di $(PL01)$ (S, c), definiremo metodo euristico o, più semplicemente, *euristica*, un metodo in grado di individuare una "buona" soluzione $x \in S$.

Evidentemente, il concetto di "buona soluzione" richiede di essere meglio specificato. Supponiamo, a tal fine, di dover risolvere il problema:

$$(PLI) \min\{c^T x : x \in S\}$$

Abbiamo osservato, nel capitolo dedicato alle formulazioni, come ogni algoritmo di soluzione del problema (PLI) sia caratterizzato da due elementi fondamentali: un "lower bound' ed un "upper bound". L' "upper bound" è il valore di una *qualsiasi soluzione ammissibile* $\bar{x} \in S$ mentre il "lower bound" L fornisce una *certificazione* della qualità della soluzione $\bar{x}$. Infatti, tanto più piccolo è il "gap" $c^T\bar{x} - L$ tanto migliore è la soluzione $\bar{x}$. Il "gap" può essere ridotto in due modi: migliorando la qualità della soluzione $\bar{x}$ o migliorando la qualità del "lower bound" L.

Il "lower bound" è usualmente calcolato risolvendo un rilassamento del problema (PLI) e può essere migliorato migliorando la formulazione.

A sua volta, l' "upper bound" può essere migliorato tentando di individuare soluzioni ammissibili con un valore più basso della funzione obiettivo. È proprio nell'individuazione di tali soluzioni ammissibili che svolgono un fondamentale ruolo i metodi euristici. Infatti, tali metodi cercano di utilizzare la struttura dell'insieme delle soluzioni ammissibili per individuare quelle soluzioni che hanno il valore più basso (possibilmente il minimo) della funzione obiettivo (*soluzioni "buone"*).

Evidentemente, solo la disponibilità di un "lower bound" ci può garantire che una soluzione ottenuta con un metodo euristico sia ottima per il problema (S, c). Per questo motivo, il termine "metodo euristico" è spesso sinonimo di soluzione approssimata (non garantita) di un problema di ottimizzazzione.

Abbiamo già osservato come un problema di Localizzazione degli Impianti (S, c) abbia la proprietà che ogni soluzione ammissibile $x \in S$ sia completamente caratterizzata dall'insieme T dei centri di servizio attivati. Infatti, una volta definito l'insieme $T \subseteq U$, è possibile definire una funzione $\ell(v, T)$ che associ a ciascun cliente $v \in V$ un centro attivato $\ell(v, T) \in T$. Di conseguenza, la funzione obiettivo del problema di localizzazione degli impianti è sempre esprimibile, come funzione dell'insieme dei centri di servizio attivati, nella forma:

$$Z(T) = \sum_{v \in V} c_{v\ell(v,T)} + \sum_{u \in T} f_u.$$

Con riferimento alla funzione d'insieme $Z(T)$, possiamo definire due metodi euristici (dovremmo in realtà parlare di paradigmi euristici per

sottolineare la loro generalità): l'algoritmo *"greedy"* e la *ricerca locale*.

Algoritmo "Greedy"

L'algoritmo "greedy" (avido) costruisce l'insieme degli impianti attivati in passi successivi a partire dall'insieme vuoto. Ad ogni passo, l'algoritmo sceglie tra gli impianti non attivati quell'impianto che, con la sua aggiunta, causa la *massima diminuzione* della funzione obiettivo $Z(T)$.

Se, ad un certo passo, l'aggiunta di un qualsiasi impianto non attivato *non* causa una diminuzione della funzione $Z(T)$ allora l'algoritmo si ferma e l'insieme corrente di impianti attivati definisce la soluzione ammissibile prodotta dall'algoritmo (*soluzione greedy*). Più formalmente abbiamo:

Algoritmo "greedy"

Inizializzazione: $i = 1$; $T_0 = \emptyset$; $Z(T_0) = \infty$.

Iterazione i-esima

$u_i = argmin_{u \in U - T_{i-1}} Z(T_{i-1} \cup \{u\})$;

Se $Z(T_{i-1} \cup \{u_i\}) \geq Z(T_{i-1})$

allora $\Rightarrow$ STOP: T_{i-1} è la soluzione greedy;

altrimenti poni $T_i = T_{i-1} \cup \{u_i\}$.

Se $T_i = U$

allora $\Rightarrow$ STOP: T_i è la soluzione greedy.

altrimenti poni $i := i + 1$ e vai all'iterazione i.

Fine dell'iterazione i-esima.

Si osservi che l'algoritmo "greedy" ha due caratteristiche cruciali:

(i) Una volta che un impianto viene inserito nell'insieme degli impianti attivati *non viene più rimosso*.

(ii) L'impianto da aggiungere viene scelto, ad ogni passo, guardando esclusivamente al *vantaggio imediato* consistente in una diminuzione del valore della funzione obiettivo. A sua volta, tale vantaggio viene valutato esaminando soltanto $|U - T_{i-1}|$ soluzioni ammissibili.

Esempio: Si consideri il problema di Localizzazione degli Impianti caratterizzato dalla seguente matrice $[c_{vu}]$ (le righe sono associate ai clienti e le colonne agli impianti):

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 6 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 10 & 8 \\ 8 & 0 & 5 & 10 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

e dal seguente vettore dei costi di costruzione degli impianti:

$$f = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

Applichiamo l'algoritmo "greedy":

Inizializzazione: $i = 1$; $T_0 = \emptyset$; $Z(T_0) = \infty$.

Iterazione 1. Calcoliamo i valori della funzione obiettivo corrispondenti agli insiemi $T_0 \cup \{u\}$ con $u \in U = \{1, \dots, 5\}$.

$Z(\{1\})$	$Z(\{2\})$	$Z(\{3\})$	$Z(\{4\})$	$Z(\{5\})$
39	31	32	29	**28**

Il valore minimo della funzione obiettivo si ottiene in corrispondenza all'insieme $T_0 \cup \{5\} = \{5\}$. Poichè $Z(\{5\}) = 28 < \infty$, poniamo $i = 2$ e $T_1 = \{5\}$.

Iterazione 2. Calcoliamo i valori della funzione obiettivo corrispondenti agli insiemi $T_1 \cup \{u\}$ con $u \in U - \{5\}$.

$Z(\{1,5\})$	$Z(\{2,5\})$	$Z(\{3,5\})$	$Z(\{4,5\})$
27	**19**	20	29

Il valore minimo della funzione obiettivo si ottiene in corrispondenza all'insieme $T_1 \cup \{2\} = \{2, 5\}$. Poichè $Z(\{2, 5\}) = 19 < 28$, poniamo $i = 2$ e $T_1 = \{2, 5\}$.

Iterazione 3. Calcoliamo i valori della funzione obiettivo corrispondenti agli insiemi $T_2 \cup \{u\}$ con $u \in U - \{2, 5\}$.

$Z(\{1,2,5\})$	$Z(\{2,3,5\})$	$Z(\{2,4,5\})$
30	**17**	19

Il valore minimo della funzione obiettivo si ottiene in corrispondenza all'insieme $T_2 \cup \{3\} = \{2, 3, 5\}$. Poichè $Z(\{2, 3, 5\}) = 17 < 19$, poniamo $i = 3$ e $T_3 = \{2, 3, 5\}$.

Iterazione 4. Calcoliamo i valori della funzione obiettivo corrispondenti agli insiemi $T_3 \cup \{u\}$ con $u \in U - \{2, 3, 5\}$.

$Z(\{1,2,3,5\})$	$Z(\{2,3,4,5\})$
21	**18**

Il valore minimo della funzione obiettivo si ottiene in corrispondenza all'insieme $T_3 \cup \{4\} = \{2, 3, 4, 5\}$. Poichè $Z(\{2, 3, 4, 5\}) = 18 > 17$ abbiamo che la soluzione $T_3 = \{2, 3, 5\}$ è la soluzione "greedy". □

Si osservi che la soluzione ottima del problema precedente è $T^* = \{2, 3, 4\}$ con $Z(T^*) = 11$. Al contrario, l'algoritmo "greedy", inserendo al primo passo l'impianto $\{5\}$, si preclude la possibilità di generarla.

L'euristica "greedy" può essere facilmente modificata rimuovendo le assunzioni (i) ed (ii) sopra descritte; ovvero consentendo all'algoritmo di aggiungere ma anche di *rimuovere* un impianto o, più in generale, di *aggiungere e rimuovere* due diversi impianti ad ogni passo. In tal modo, si consente all'algoritmo di *rivedere le decisioni prese ai passi precedenti* e si ottiene la cosiddetta *euristica di scambio*.

Più formalmente, l'euristica di scambio consiste nel valutare, ad ogni passo, la funzione obiettivo in corrispondenza degli insiemi:

$T_{i-1} \cup \{u\}$ per ogni $u \in U - T_{i-1}$;

$T_{i-1} - \{u\}$ per ogni $u \in T_{i-1}$;

$T_{i-1} - \{w\} \cup \{u\}$ per ogni $u \in U - T_{i-1}$ ed $w \in T_{i-1}$.

e nello scegliere l'insieme che minimizza la funzione $Z(\cdot)$. In altre parole, mentre nell'euristica "greedy" si tenta di *attivare* un impianto alla volta, nell'euristica di scambio si può *attivare* o *disattivare* un impianto, oppure effettuare entrambe le operazioni. Come nell'euristica "greedy", l'algoritmo si arresta quando nessuno scambio del tipo (i), (ii) o (iii) migliora la funzione obiettivo.

Esempio: *Si consideri il problema di Localizzazione degli Impianti caratterizzato dalla seguente matrice* $[c_{vu}]$ *(le righe sono associate ai clienti e le colonne agli impianti):*

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \\ 2 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

e dal seguente vettore dei costi di costruzione degli impianti:

$$f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

Applichiamo l'euristica di scambio al problema.

Inizializzazione: $i = 1$; $T_0 = \emptyset$; $Z(T_0) = \infty$.

Iterazione 1. In questa situazione l'unica operazione è quella di aggiungere un impianto all'insieme T_0. *Calcoliamo quindi i valori della funzione obiettivo corrispondenti agli insiemi* $T_0 \cup \{u\}$ *con* $u \in U = \{1, \dots, 3\}$.

$Z(\{1\})$	$Z(\{2\})$	$Z(\{3\})$
10	23	24

Il valore minimo della funzione obiettivo si ottiene in corrispondenza all'insieme $T_0 \cup \{1\} = \{1\}$. *Poichè* $Z(\{1\}) = 10 < \infty$, *poniamo* $i = 2$ *e* $T_1 = \{1\}$.

Iterazione 2. In questa situazione, l'operazione di eliminazione e di scambio ci riportano agli insiemi valutati all'iterazione precedente e quindi sono inutili. Calcoliamo quindi i valori della funzione obiettivo corrispondenti agli insiemi $T_1 \cup \{u\}$ *con* $u \in U - \{1\}$.

$Z(\{1,2\})$	$Z(\{1,3\})$
9	10

Il valore minimo della funzione obiettivo si ottiene in corrispondenza all'insieme $T_1 \cup \{2\} = \{1, 2\}$. *Poichè* $Z(\{1, 2\}) = 9 < 10$, *poniamo* $i = 2$ *e* $T_2 = \{1, 2\}$.

Iterazione 3. Calcoliamo innanzitutto i valori della funzione obiettivo corrispondenti agli insiemi $T_2 \cup \{u\}$ *con* $u \in U - \{1, 2\}$ *(ottenuti attivando impianti). Poichè* $U - \{1, 2\} = \{3\}$, *dobbiamo valutare soltanto l'insieme* $\{1, 2, 3\}$. *Il suo valore è* $Z(\{1, 2, 3\}) = 9$, *maggiore o uguale di quello dell'ottimo corrente. Quindi la soluzione* $\{1, 2\}$ *è la soluzione "greedy". Eliminando un impianto dall'insieme* $\{1, 2\}$ *si ottengono insiemi già valutati quindi, esaminiamo gli insiemi ottenuti per scambio:*

$Z(\{1,3\})$	$Z(\{2,3\})$
10	**7**

Il valore minimo della funzione obiettivo si ottiene in corrispondenza all'insieme $T_2 \cup \{3\} - \{1\} = \{2, 3\}$. *Poichè* $Z(\{2, 3\}) = 7 < 9$, *poniamo* $i = 3$ *e* $T_3 = \{2, 3\}$. *È facile vedere che attivando o disattivando impianti oppure effettuando operazioni di scambio si generano insiemi già valutati. Quindi la soluzione* T_3 *è la soluzione prodotta dall'algoritmo di scambio. È anche facile (per enumerazione completa) verificare che la soluzione* T_3 *è la soluzione ottima del problema*

□

Euristiche di Ricerca Locale

L'euristica di scambio e l'euristica "greedy" appartengono ad una classe più generale di metodi euristici che vanno sotto il nome di *Euristiche di Ricerca Locale*. Per descrivere tale classe di metodi euristici definiamo un modello di ottimizzazione estremamente generale che astrae le caratteristiche essenziali di tutti i problemi di Programmazione Lineare $\{0, 1\}$.

Sia $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ un qualsiasi insieme finito che diremo *insieme base* (*"ground set"*) e sia $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\} \subseteq \mathcal{P}(E)$ una *famiglia di* *sottoinsiemi di E* (*"Subset System"*). Infine, sia $w : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ una *funzione obiettivo* che associa a ciascun insieme $F \in \mathcal{F}$ un numero reale $w(F)$.

Diremo *Problema di Ottimizzazione Combinatoria*, il problema:

$$\min_{F \in \mathcal{F}} w(F) \tag{6.5}$$

Ogni problema di Programmazione Lineare $\{0,1\}$ (S, c) è un Problema di Ottimizzazione Combinatoria. Infatti, ogni vettore $x \in S \subseteq \{0,1\}^n$ può essere posto in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme T dell'insieme base $\{1, \ldots, n\}$ ed il vettore c definisce sempre una funzione d'insieme $Z(T) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$.

È interessante notare come la classe dei problemi di Ottimizzazione Combinatoria sia molto più ampia di quella dei problemi di Programmazione Lineare $\{0,1\}$ in quanto essa comprende anche i problemi con funzione obiettivo $w(\cdot)$ non-lineare o non esprimibile in forma chiusa (come ad esempio nei problemi in cui il valore $w(F)$ è espresso dal risultato di un complesso algoritmo applicato all'insieme F).

Per un problema di Ottimizzazione Combinatoria è possibile definire un metodo euristico molto generale per l'individuazione di una soluzione ammissibile di buona qualità.
A tale scopo associamo, a ciascun insieme $F \in \mathcal{F}$, una sottofamiglia di $\mathcal{F}$ detta *intorno di F*:

$$\mathcal{N}(F) = \{F_{j_1}, \ldots, F_{j_q}\} \subseteq \mathcal{F}$$

e definiamo *sistema di intorni* di $\mathcal{F}$ la collezione $\{\mathcal{N}(F) : F \in \mathcal{F}\}$ di tutti gli intorni relativi agli elementi $F \in \mathcal{F}$.
Una soluzione $\hat{F} \in \mathcal{F}$ si dice *ottimo locale* rispetto ad un dato sistema di intorni se e solo se:

$$w(\hat{F}) \leq w(F) \quad \text{per ogni } F \in \mathcal{N}(\hat{F}).$$

La soluzione ottima del problema (6.5) viene invece detta *ottimo globale*. Ovviamente, una soluzione può essere un ottimo locale e non essere un ottimo globale.

Dato un sistema di intorni $\{\mathcal{N}(F) : F \in \mathcal{F}\}$ possiamo definire il seguente algoritmo per la individuazione di un ottimo locale:

Algoritmo di Ricerca Locale

Inizializzazione: $i = 1$; Scegliere $F_0 \in \mathcal{F}$

Iterazione i-esima

$F_i = arg\min\{w(F) : F \in \mathcal{N}(F_{i-1})\}$;

Se $w(F_{i-1}) \leq w(F_i)$

allora $\Rightarrow$ STOP: F_{i-1} è un ottimo locale;

altrimenti poni $i := i + 1$ e vai all'iterazione i.

Fine dell'iterazione i-esima.

La grande semplicità dell'algoritmo di ricerca locale non deve trarre in inganno. Infatti, la definizione del sistema di intorni che assicuri l'individuazione di ottimi locali di buona qualità e l'individuazione di una prima soluzione F_0 sono compiti particolarmente difficili e che richiedono una notevole esperienza ed una profonda conoscenza della struttura del problema.

Ad esempio, nel problema di Localizzazione degli Impianti, i tre criteri visti nella definizione dell'euristica di scambio portano alla definizione di (almeno) due sistemi di intorni alternativi e quindi di due algoritmi euristici alternativi. Infatti, se poniamo:

$$\mathcal{N}_0(T) = \{T \cup \{u\} : u \in U - T\} \quad \text{per ogni } T \subseteq U$$

e definiamo $F_0 = \emptyset$, l'algoritmo di Ricerca Locale diviene l'algoritmo "greedy". Se, invece, per ogni $T \subseteq U$ poniamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1(T) = \mathcal{N}_0 \; & \cup \; \{T - \{u\} : u \in T\} \cup \\ & \cup \; \{T - \{w\} \cup \{u\} : w \in T, u \in U - T\}\end{aligned}$$

e definiamo $F_0 = \emptyset$, l'algoritmo di Ricerca Locale diviene l'Euristica di Scambio.

La scelta del sistema di intorni è un processo totalmente arbitrario, tuttavia una regola generale per guidare le nostre decisioni deve sempre essere quella di scegliere intorni di cardinalità sufficientemente elevata da garantire ottimi locali di buona qualità ma, al tempo stesso, non troppo alta, allo scopo di limitare il numero di confronti da effettuare ad ogni iterazione.