7.2 Gestione scorte: parametri fondamentali

In questo paragrafo illustreremo i principali parametri che guidano e condizionano le decisioni operative nell'ambito del processo di produzione e stoccaggio. I parametri che prenderemo in considerazione saranno il *costo di produzione*, il *costo di stoccaggio (o immagazzinamento)*, il *costo fisso di produzione*, il *costo fisso di immagazzinamento*, il *costo di "backlogging"* ed, infine, *il "lead time" o ritardo di consegna*.

7.2.1 Il costo di produzione

Il costo di produzione di un bene è una funzione concava della quantità prodotta Q, che denoteremo con il simbolo $c(Q)$. Esso viene abitualmente espresso in una unità monetaria ed è definito in modi diversi a seconda del significato assunto dal termine "produzione".

Se il termine "produzione" indica il processo di approvvigionamento di un magazzino (sia quando tale approvvigionamento è finalizzato alla produzione che quando il magazzino costituisce solo un passo intermedio tra il produttore ed il cliente finale), il costo di produzione esprime l'andamento della somma del prezzo di acquisto (dal fornitore) e del costo di trasporto unitario al variare della quantità acquistata. La concavità della funzione è dovuta, in questo caso, alla presenza di sconti proporzionali alla quantità acquistata.

Nel caso in cui il termine "produzione" indichi l'effettiva costruzione del bene da parte della stessa azienda che deve immagazzinarlo (ad es. produzione di semilavorati o di prodotti finiti) la struttura della funzione costo di produzione è molto più complessa. Infatti, tale funzione viene usualmente determinata utilizzando uno strumento contabile (parallelo e distinto dalla Contabilità Generale) detto Contabilità Analitica o Contabilità Industriale. Lo scopo della Contabilità Analitica è quello di determinare l'andamento del costo di uno specifico prodotto in funzione dei volumi produttivi tenendo conto di tutti i costi direttamente attribuibili al prodotto, detti *costi diretti* (costo delle materie prime, delle ore di progettazione e lavorazione e delle spese di "marketing") e della quota parte dei *costi indiretti* (ovvero non attribuibili direttamente al prodotto quali i costi di amministrazione e le spese di produzione comuni a prodotti diversi) che l'azienda ha dovuto subire per la sua realizzazione. La struttura concava della funzione costo è in questo caso motivata dalle *economie di scala* delle quali abbiamo parlato nel paragrafo precedente.

Le varie metodologie usate per realizzare un sistema di Contabilità Analitica e la loro giustificazione concettuale vanno certamente oltre lo scopo di queste note. Pertanto, nel seguito ci limiteremo ad assumere che la funzione $c(Q)$ sia stata opportunamente definita e sia disponibile al momento della definizione di un modello di Programmazione della Produzione.

7.2.2 Il costo fisso di produzione

Il *costo fisso di produzione* A (espresso in una opportuna unità monetaria) rappresenta il costo sostenuto dall'azienda per *attivare* una fase produttiva *indipendentemente dai volumi di produzione*.

Nel caso in cui il termine "produzione" indichi il processo di acquisizione di merce dai fornitori, il costo fisso di produzione include il costo di gestione dell'ordine, le spese postali e telefoniche ed, infine, i costi di ricezione e controllo di qualità.

Al contrario, il costo fisso di produzione propriamente detto è essenzialmente rappresentato dal cosiddetto *costo di "setup"* ovvero dal costo di tutte le attività complementari che rendono possibile la produzione ininterrotta del bene. Esempi di costi di "setup" sono il costo delle ore straordinarie di operai specializzati (o ingegneri) che effettuano la messa a punto di tutte le apparecchiature necessarie alla produzione, oppure il costo legato al "fermo macchina" causato da un adeguamento dell'impianto alla specifica produzione (ad es. il lavaggio dei serbatoi nel passaggio da una produzione ad un altra nelle industrie chimiche, il cambio dei cilindri inchiostrati nelle aziende stampatrici etc.). È importante notare che nel costo fisso di produzione non sono considerati i salari o le altre spese fisse che l'azienda deve comunque sostenere (tali spese sono inglobate, con i meccanismi della Contabilità Industriale, nel costo di produzione) ma solo le spese che debbono essere sostenute a causa della decisione di avviare la produzione.

Il costo di produzione totale, somma del costo fisso e del costo di produzione, è quindi dato dalla espressione $C(Q) = A\eta(Q)+c(Q)$, dove $\eta(Q)$ è una funzione che vale 1 se $Q > 0$ e 0 se $Q \leq 0$ (figura (7.1)).

7.2.3 Il costo di stoccaggio

Il costo di stoccaggio (o immagazzinamento) di un bene include il *costo - opportunità* del valore monetario dei beni immagazzinati, il *costo di gestione* del magazzino, il *costo di deterioramento ed obsolescenza* dei beni in magazzino ed infine le spese legate a *tasse ed assicurazioni*.

In particolare, il costo di immagazzinamento è ottenuto sommando il costo fisso di stoccaggio π, indipendente dalla giacenza, al costo di stoccaggio $h(Q)$, funzione concava (ma molto più spesso lineare) della *giacenza* di magazzino.

L'espressione tipica del costo di stoccaggio $h(Q)$ è data dal prodotto del *costo unitario di stoccaggio* $c_s(Q)$ per la *giacenza complessiva* $\bar{Q}$ nell'orizzonte temporale $[0, \dots, T]$.

La giacenza complessiva è pari all'integrale della giacenza (funzione del tempo) sull'orizzonte temporale $[0, \dots, T]$. Pertanto, avremo:

$$\bar{Q} = \int_0^T Q(t)dt$$

nel caso di controllo continuo e:

$$\bar{Q} = \sum_0^T Q(t)$$

nel caso di controllo discreto.

Il costo unitario di stoccaggio è invece calcolato in base al costo-opportunità del *capitale immobilizzato* nel magazzino (valore dei beni). Ovvero, dalla perdita di reddito legata al mancato utilizzo del capitale immobilizzato in investimenti più remunerativi.

Di tale costo-opportunità può essere facilmente data una definizione puramente teorica. Esso può infatti essere posto pari al ricavo che si ottiene impiegando il capitale immobilizzato nella migliore opportunità di investimento alla quale si è dovuto rinunciare per acquisire i beni in magazzino. Tale costo-opportunità marginale è quindi un valore che dipende dalle possibilità di investimento disponibili in ogni istante. Tale variabilità è estremamente difficile da gestire e rende impossibile l'uso di un parametro così calcolato nella definizione di un qualsiasi modello matematico.

La scelta semplificativa che si effettua per valutare il costo - opportunità relativo a ciascuna una unità del bene immobilizzata, è quella di porre $c_s(0) = 0$ e $c_s(Q) = r_0\frac{C(Q)}{Q}$ per $Q > 0$. La quantità $\frac{C(Q)}{Q}$ è il costo unitario del bene (costo di produzione o acquisto diviso la quantità) mentre r_0 è quel *minimo tasso di interesse accettabile* definito nel capitolo dedicato alla pianificazione degli investimenti e che rappresenta la minima percentuale alla quale si ritiene adeguatamente remunerato il proprio capitale.

Il valore $h(Q) = r_0\frac{C(Q)}{Q}\bar{Q}$ non rappresenta, però, in modo completo il costo di stoccaggio. Infatti, per valutare il costo dell'immobilizzo, dobbiamo anche valutare il rischio dovuto all'obsolescenza ed al deterioramento dei beni immagazzinati, il costo legato a tasse ed assicurazioni ed il costo-opportunità legato al mancato utilizzo degli spazi dedicati al magazzino per scopi più remunerativi. Per tener conto di tali costi si può aumentare il valore del tasso r_0 di una opportuna quantità.

Il *costo fisso* π è la parte del costo di stoccaggio indipendente dalla quantità giacente. Esso è dato dai costi di gestione del magazzino che debbono essere sostenuti solo quando la giacenza è non-nulla (ore straordinarie, energia elettrica, usura dei macchinari di movimentazione, sorveglianza etc.) opportunamente suddivisi per ciascun bene immagazzinato.

Il costo complessivo di stoccaggio in funzione della giacenza Q è quindi dato dall'espressione $H(Q) = \pi\eta(Q)$ con $\eta(Q) = 1$ se $Q > 0$ e $\eta(Q) = 0$ se $Q \leq 0$.

7.2.4 Il costo di stoccaggio con "backlogging"

Con il termine *"backlogging"* indicheremo una quantità *negativa* giacente in magazzino. Abbiamo una situazione di "backlogging" ogni volta che la domanda attuale viene soddisfatta impegnando una produzione futura.

Se ammettiamo la possibilità di una situazione di "backlogging", la giacenza Q può assumere valori negativi e la forma del costo complessivo di stoccaggio vista nel paragafo precedente si modifica nel modo seguente:

$$H(Q) = \pi\eta(Q) + \beta\psi(Q) + \phi(Q)$$

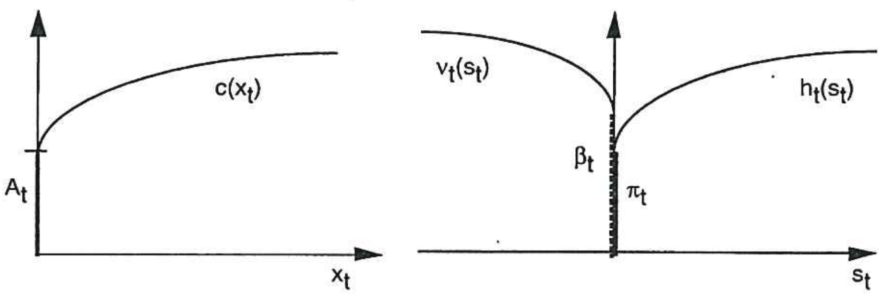

Figura 7.1:

dove $\eta(Q) = 1$ se $Q > 0$, $\eta(Q) = 0$ se $Q \leq 0$, $\psi(Q) = 1$ se $Q < 0$, $\psi(Q) = 0$ se $Q \geq 0$, $\phi(Q) = h(Q)$ se $Q > 0$ ed, infine, $\phi(Q) = \nu(Q)$ se $Q < 0$. Il valore β è il costo fisso di "backlogging" mentre $\nu(Q)$ è la funzione concava del costo di "backlogging" al variare della giacenza (negativa) (figura (7.1)).

Nel caso in cui il termine "produzione" indichi il processo di approvvigionamento da fornitori, il costo $\nu(Q)$ dipende dalla insoddisfazione del cliente per la ritardata consegna e, quindi, dagli eventuali sconti che debbono essere praticati per controbilanciare tale insoddisfazione. La parte fissa β è invece imputabile al lavoro amministrativo non previsto (ordine extra al fornitore) che è necessario per gestire l'emergenza e le eventuali spese per la spedizione d'urgenza del bene mancante.

Nel caso di produzione propriamente detta i costi sono gli stessi del caso precedente con l'aggiunta di eventuali costi di "setup" nei quali si incorre per adattare i macchinari ad una produzione diversa da quella corrente.

7.2.5 Altri parametri caratteristici

La decisione di produrre viene usualmente assunta quando il livello di giacenza di uno specifico bene raggiunge la cosiddetta *scorta minima*. Una volta assunta la decisione di produrre, trascorre una quantità di

tempo (purtroppo variabile) prima che il magazzino venga effettivamente rifornito dei prodotti richiesti. Tale quantità di tempo viene detta *"lead time"*. La presenza di un "lead time" nel processo di approvvigionamento è dovuto a una serie di ritardi che si verificano nella catena di comunicazione tra produzione e magazzino. Esempi di tali ritardi sono: il tempo trascorso dall'effettiva rilevazione del raggiungimento della scorta minima alla partenza dell'ordine, il tempo in cui l'ordine arriva e viene evaso dal fornitore, il tempo di consegna del fornitore, il tempo in cui le quantità vengono ricevute, verificate e poste in magazzino. Tutti i ritardi elencati possono essere rappresentati da *variabili aleatorie* con opportune distribuzioni; quindi, la forma più adatta per rappresentare il "lead time" è quella di variabile aleatoria con una distribuzione Gaussiana. In alcuni modelli il "lead time" è posto, per semplicità, ad un valore costante pari ad L e superiore al massimo ritardo possibile.

Un'altra importante caratteristica che deve essere tenuta in considerazione nel progetto di un Modello di Programmazione della Produzione è la *classificazione* del bene in considerazione. È evidente, infatti, che non tutti i beni in magazzino devono essere "curati" nello stesso modo dal modello. Infatti, l'esperienza mostra che, usualmente, una bassa percentuale dei beni presenti in magazzino (ad es. il 20%) è responsabile della grande maggioranza dei movimenti annuali (ad esempio dell'80% del valore monetario della domanda annuale). Se assumiamo che i beni ai quali corrisponde un volume maggiore (in termini monetari) della domanda annuale meritano una maggiore attenzione da parte del modello, dobbiamo necessariamente procedere ad una classificazione dei beni in classi di priorità. La classificazione più diffusa in pratica è la cosiddetta classificazione $A - B - C$.

Nella classe A vengono inseriti i beni più importanti, nella classe B quelli di importanza intermedia e nella classe C quelli meno importanti. Le tre classi vengono usualmente definite nel modo seguente:

Si calcola il valore annuo della domanda V_i per ogni singolo bene $i \in \{1, \ldots, m\}$ in magazzino; si definisce un ordinamento $\{j_1, \ldots, j_m\}$ dei beni con la proprietà che $V_{j_1} \geq V_{j_2} \geq, \ldots, \geq V_{j_m}$ ed, infine, si definisce l'insieme A come quel sottoinsieme della forma $\{j_1, \ldots, j_h\}$ per il quale la somma dei valori annui è uguale (o superiore) ad una specifica percentuale γ del valore annuo totale del magazzino, ovvero:

$$A = \{j_1, \dots, j_h : \sum_{i=1}^{h} V_{j_i} \geq \gamma \sum_{i=1}^{m} V_{j_i}\}.$$

La costante γ viene usualmente posta ad un valore compreso tra 0.5 e 0.7. Analogamente, la classe B viene definita come:

$$B = \{j_{h+1}, \dots, j_k : \sum_{i=1}^{k} V_{j_i} \geq (\delta + \gamma) \sum_{i=1}^{m} V_{j_i}\}.$$

con la costante δ che assume valori compresi tra 0.2 e 0.4 in modo tale che la quantità $\delta + \gamma$ assuma un valore pari a 0.9. In altre parole, le classi A e B costituiscono almeno il 90% del valore totale annuo del magazzino mentre la classe C è costituita dai rimanenti beni (con un valore annuo inferiore al 10% del valore totale).

Evidentemente, i modelli e gli algoritmi che verranno descritti in questo capitolo contribuiscono in modo sensibile al miglioramento delle prestazioni operative solo quando applicati ai beni in classe A e, raramente, ai beni in classe B.

7.3 Approccio Classico: EOQ

In questo capitolo descriveremo alcune caratteristiche dell'approccio classico alla gestione delle scorte. In particolare, faremo riferimento ad un semplice modello di scorte *deterministico*, sottoposto ad un processo di controllo *continuo* e relativo ad un *singolo bene*. Per il nostro modello varranno, inoltre, le seguenti assunzioni:

(i) Il tasso di domanda è costante ed è pari a D.

(ii) La dimensione del lotto da produrre è sempre la stessa ed è pari a Q.

(iii) Il costo di produzione è dato da $C(Q) = A\eta(Q) + vQ$.

(iv) Il costo di stoccaggio è dato da $r\frac{C(Q)}{Q}\bar{Q}$, dove $\bar{Q}$ è la giacenza complessiva.

(v) Il "lead time" ha valore nullo.

(vi) Il "backlogging" non è consentito.

(vii) Il livello della giacenza viene controllato in modo continuo.

(viii) La quantità Q è disponibile istantaneamente.

La natura continua del processo di controllo implica che il costo di stoccaggio debba essere espresso in funzione della *giacenza media* $\bar{Q}$ il cui valore è pari all'integrale della giacenza di magazzino rispetto al tempo, esteso al periodo in esame. Le stesse considerazioni dovrebbero valere per il costo di produzione (che dovrebbe essere espresso in funzione della produzione media), tuttavia nel nostro semplice modello facciamo l'ipotesi (viii) di produzione concentrata in un singolo istante (*produzione istantanea*) e quindi la funzione costo di produzione avrà la forma vista nei paragrafi precedenti (con $c(Q)$ funzione lineare).

L'assunzione (ii) che la quantità da ordinare sia sempre la stessa non è limitativa in quanto tutti i parametri non variano nel tempo ed è quindi ragionevole assumere che se Q è la quantità ottima da ordinare in un certo istante, allora Q è la dimensione ottima del lotto di riordino in qualsiasi altro istante.

Inoltre, le assunzioni (v) che il "lead time" sia nullo, (vi) che non vi sia possibilità di "backlogging" e (viii) che la produzione sia istantanea, implicano che l'ordine di produzione viene emesso nel momento in cui la giacenza si azzera (momento rilevato senza ritardi grazie all'assunzione di controllo continuo della giacenza). L'andamento della giacenza sarà quindi quello riportato nella figura (7.2).

Si osservi che l'andamento a dente di sega è dovuto all'ipotesi (i) che il tasso di domanda sia costante e pari a D, mentre l'immediata disponibilità della quantità prodotta è testimoniata dall'andamento verticale della curva in corrispondenza alle emissioni degli ordini di produzione. Osserviamo, infine che il tempo necessario a passare da una giacenza Q ad una giacenza 0 è pari a $\frac{Q}{D}$.

L'obiettivo del problema è quello di determinare il valore Q^* che minimizza i costi complessivi di produzione e stoccaggio ovvero la dimensione del *lotto di riordino ottimo* ("Economic Order Quantity" (EOQ)).

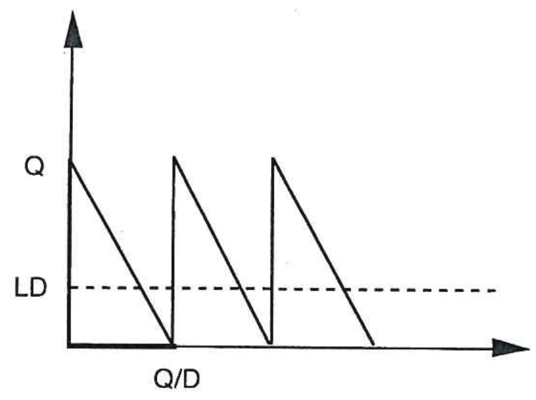

Figura 7.2:

A tale scopo, osserviamo che D rappresenta il tasso di domanda e quindi il numero di unità del bene richieste in un dato periodo. In particolare, si può assumere che D sia il numero di unità del bene richieste in un anno. Poiché in ogni ordine di produzione vengono richieste Q unità, abbiamo che in un anno verranno effettuati $\frac{D}{Q}$ ordini di produzione.

Associato a ciascun ordine di produzione avremo un costo pari a $A + vQ$. Di conseguenza, il costo complessivo dei $\frac{D}{Q}$ ordini di produzione sarà:

$$C_p = \frac{D}{Q}(A + vQ) = \frac{AD}{Q} + Dv = \frac{AD}{Q} + costante \tag{7.1}$$

Per quanto riguarda il costo di stoccaggio dobbiamo osservare che il suo valore è pari al prodotto del costo unitario $r\frac{C(Q)}{Q}$ per la giacenza complessiva annuale di magazzino. Se $Q > 0$ abbiamo che $r\frac{C(Q)}{Q} = r\frac{(A+vQ)}{Q}$.

Per calcolare la giacenza complessiva osserviamo che essa è pari all'integrale della funzione $Q(t)$ nell'intervallo $[0, \ldots, T]$ e, quindi, è pari all'area compresa tra la curva a dente di sega di figura (7.2) e l'asse delle ascisse. Tale area è pari a $\frac{D}{Q}$ volte l'area del triangolo con

base $\frac{Q}{D}$ ed altezza Q, avremo quindi la seguente espressione per il costo di stoccaggio:

$$C_s = r\frac{(A + vQ)}{Q}(\frac{D}{Q}\frac{Q^2}{2D}) = \frac{rA}{2} + \frac{rvQ}{2}. \tag{7.2}$$

Quindi, il costo complessivo di produzione e stoccaggio in funzione di Q è pari a:

$$TC(Q) = C_p + C_s = \frac{AD}{Q} + \frac{rvQ}{2} + Dv + \frac{rA}{2} \tag{7.3}$$

Per individuare il valore minimo della funzione $TC(Q)$ possiamo azzerare la derivata prima di $TC(Q)$ rispetto a Q ottenendo:

$$\frac{dTC(Q)}{dQ} = \frac{rv}{2} - \frac{AD}{Q^2} = 0$$

e quindi un possibile valore ottimo per Q dato dall'espressione:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{rv}} \tag{7.4}$$

Se, inoltre, osserviamo che la derivata seconda di $TC(Q)$:

$$\frac{d^2TC(Q)}{d^2Q} = \frac{2AD}{Q^3}$$

è positiva per ogni Q positivo, abbiamo che la quantità Q^* è il valore del lotto di riordino che minimizza il costo complessivo di produzione e stoccaggio. Tale quantità viene detta *"Economic Order Quantity"* o *lotto minimo di riordino* o *lotto di Wilson* ed è una delle formule maggiormente usate nella pratica della gestione delle scorte.

La formula appena derivata non muta se, mantenendo tutte le altre assunzioni, rimuoviamo l'ipotesi che il "lead time" sia nullo e lo poniamo ad un valore costante pari ad L. In questo caso, però, l'ordine di produzione viene dato quando il magazzino contiene LD unità del bene (e cioè la scorta necessaria ad evitare il "backlogging" in presenza di un ritardo L dal momento dell'ordine all'inizio della produzione). L'espressione della EOQ ci permette di calcolare l'intervallo di approvvigionamento ovvero il numero di mesi che devono intercorrere tra due ordini successivi. In particolare, avremo che tale intervallo ha la seguente espressione:

$$T_{EOQ} = \frac{12 \times EOQ}{D} = \sqrt{\frac{288A}{rDv}}$$

La formula di Wilson può essere facilmente generalizzata per tener conto di sconti quantità e dell'inflazione. Inoltre, anche le ipotesi di produzione istantanea ed assenza di "backlogging" possono essere facilmente rimosse a prezzo di una lieve complicazione del calcolo della funzione $TC(Q)$ [16].

Esempio: Si supponga che la domanda di un determinato bene ammonti a 2400 unità per anno. Si supponga, inoltre che il costo di produzione unitario del bene sia di $v = 0.4$ dollari e che il costo fisso di produzione sia di $A = 3.20$ dollari. Infine, supponiamo che il costo di stoccaggio sia di $r = 0.24$ dollari per ogni dollaro immobilizzato in magazzino. Allora la formula di Wilson ci permette di calcolare il lotto minimo di riordino:

$$EOQ = \sqrt{\frac{(2 \times 3.20 \times 2400)}{0.4 \times 0.24}} = 400$$

$$T_{EOQ} = \frac{12 \times EOQ}{D} = \frac{12 \times 400}{2400} = 2$$

Ovvero, in accordo alla formula di Wilson, per minimizzare i costi complessivi bisogna ordinare 400 unità del bene ogni 2 mesi. □

7.4 Programmazione della Produzione ("Lot Sizing")

Il modello di scorte che abbiamo utilizzato per determinare il valore ottimo del lotto di riordino è certamente molto rudimentale. In particolare, le assunzioni più limitative sono quella di domanda, costo di produzione e di stoccaggio costanti nel tempo. Abbiamo infatti osservato, nell'introduzione di questo capitolo, come la domanda ed il costo di produzione possano essere soggetti a fluttuazioni stagionali o, più in generale, ad oscillazioni dovute all'imprevedibilità del mercato. Abbiamo anche osservato come le moderne tecniche di monitoraggio della produzione e della domanda consentano di prevedere con una certa accuratezza l'andamento della domanda e dei costi di produzione e stoccaggio a breve termine. Questa accresciuta capacità ha stimolato i ricercatori a definire e studiare modelli di scorte più complessi di quello classico nei quali la domanda ed il costo di produzione e stoccaggio sono variabili nel tempo. Tali modelli prendono il nome di modelli per la Programmazione della Produzione o Modelli di "Lot Sizing".

In questo paragrafo descriveremo due semplici modelli di Programmazione della Produzione ed i relativi algoritmi risolutivi. Entrambi i modelli che intendiamo descrivere fanno riferimento ad un problema caratterizzato da un insieme finito $\{1, \ldots, T\}$ di periodi di controllo (*orizzonte temporale*) e da una *domanda variabile* rappresentata da un vettore $d \in I\!R^T$ con $d_t > 0$ per ogni $t \in \{1, \ldots, T\}$.

In ciascun periodo di controllo $t \in \{1, \ldots, T\}$ la giacenza di magazzino è pari ad s_t ed il livello di produzione è $x_t \geq 0$. Non vi è alcuna limitazione superiore (capacità produttiva) al valore che il livello di produzione può assumere in un certo periodo.

La struttura delle funzioni del costo (di produzione e di stoccaggio) rispetto ai volumi produttivi (o alle giacenze) è variabile con il periodo di controllo. In particolare, in ciascun periodo dell'insieme $\{1, \ldots, T\}$ tali funzioni avranno, coerentemente a quanto osservato nei paragrafi precedenti, un andamento *concavo* per tener conto delle economie di scala e saranno caratterizzate da un costo fisso indipendente dal volume produttivo (dalla giacenza).

La forma generica della funzione costo sarà quindi, per ogni periodo $t \in \{1, \ldots, T\}$, la seguente:

$$C_t(x_t) = A_t \eta(x_t) + c_t(x_t)$$

Si ricordi che il costo fisso di produzione A_t deve essere effettivamente pagato solo quando $x_t > 0$ e, quindi, il valore A_t è moltiplicato per una funzione $\eta(\cdot)$ con la proprietà che $\eta(x_t) = 1$ se $x_t > 0$ e $\eta(x_t) = 0$ se $x_t \leq 0$. La funzione $c_t(\cdot)$ è una generica funzione concava e, quindi, la funzione (non-continua) $C_t(\cdot)$ è, anch'essa, una funzione concava.
Come osservato nei paragrafi precedenti, la struttura del costo di stoccaggio al variare della giacenza sarà, per ogni $t \in \{1, \ldots, T\}$, la seguente:

$$H_t(s_t) = \pi_t \eta(s_t) + \beta_t \psi(s_t) + \phi_t(s_t)$$

dove π_t e β_t sono, rispettivamente, i costi fissi di stoccaggio e di "backlogging" e $\phi_t(s_t)$ è una funzione concava della giacenza di magazzino che, per valori $s_t > 0$ rappresenta il costo di stoccaggio $h_t(s_t)$ mentre per valori $s_t < 0$ rappresenta il costo di "backlogging" $\nu_t(s_t)$.

L'obiettivo del problema è quello di determinare il livello di produzione x_t e di stoccaggio s_t in ogni periodo $t \in \{1, \ldots, T\}$ in modo tale da soddisfare la domanda complessiva e minimizzare il costo totale espresso dalla funzione:

$$\sum_{t=1}^{T} (C_t(x_t) + H_t(s_t))$$

Nel primo dei due modelli di Programmazione della Produzione che intendiamo studiare assumeremo che la giacenza s_t non possa avere un valore negativo (assenza di "backlogging") e descriveremo un efficiente algoritmo di programmazione dinamica dovuto a Wagner e Whitin (1958). Nel secondo modello, al contrario, consentiremo al magazzino di assumere valori negativi e, quindi, di soddisfare la domanda presente con la produzione futura (modello con "backlogging"). Con riferimento a questo modello descriveremo un algoritmo risolutivo, dovuto a Zangwill (1966) che costituisce la naturale estensione dell'algoritmo di Wagner e Whitin.

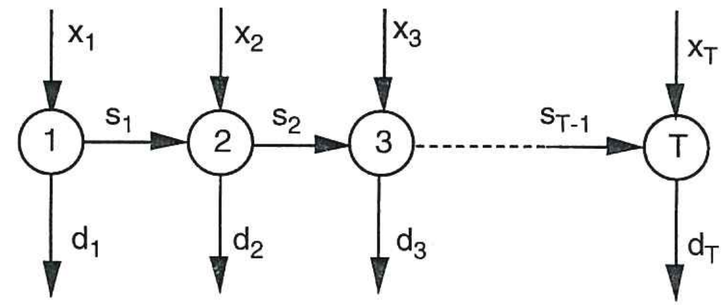

Figura 7.3:

7.4.1 Modello senza "backlogging" (Wagner-Whitin)

Per definire i vincoli che caratterizzano le soluzioni ammissibili del problema, osserviamo (figura (7.3)) che l'assenza di "backlogging" implica che la domanda in ciascun periodo $t \in \{1, \ldots, T\}$ deve essere soddisfatta dalla produzione x_t e dalla giacenza s_{t-1} mentre il "surplus" $d_t - s_{t-1} - x_t$ definisce la giacenza s_t.

In altre parole, un vettore $(x, s) \in I\!R^{2T-1}$ con $x = (x_1, \ldots, x_T)^T$ ed $s = (s_1, \ldots, s_{T-1})^T$, è una soluzione ammissibile del problema di Programmazione della Produzione se e solo se soddisfa il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x_1 - s_1 = d_1 & \\ s_{t-1} + x_t - s_t = d_t & t = 2, \ldots, T-1 \\ s_{T-1} + x_T = d_T & \\ s_t \geq 0 \quad x_t \geq 0, & t = 1, \ldots, T \end{cases} \tag{7.5}$$

Il problema di Programmazione della Produzione può essere espresso in forma compatta definendo la matrice dei coefficienti A del precedente sistema, un vettore $y = (x, s) \in I\!R^{2T-1}$ ed una funzione di costo (concava):

$$f(y) = \sum_{t=1}^{T} (C_t(x_t) + H_t(s_t)).$$

Con tali posizioni, il problema diviene:

$$\min\{f(y) : Ay = d, y \geq 0_{2T-1}\} \tag{7.6}$$

Il problema (7.6) richiede l'individuazione del valore minimo della funzione concava $f(y)$ al variare di y in un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^{2T-1} : Ay = d, y \geq 0_{2T-1}\}$. A tale proposito, si osservi che il poliedro P è, in realtà, un politopo (poliedro limitato) in quanto, sommando le equazioni del sistema (7.5), abbiamo che:

$$\sum_{t=1}^{T} x_t = \sum_{t=1}^{T} d_t$$

e quindi che ogni variabile x_i è superiormente limitata dalla quantità $\sum_{t=1}^{T} d_t$. Inoltre, ogni variabile s_i ha la forma:

$$s_i = \sum_{t=1}^{i-1} x_t - \sum_{t=1}^{i-1} d_t$$

ed è quindi anch'essa superiormente limitata. Ora, poiché P è un politopo possiamo facilmente dimostrare il seguente importante teorema.

TEOREMA 7.4.1 *Se il problema (7.6) ammette una soluzione ottima allora esiste una soluzione ottima che è anche un vertice del poliedro P.*

Dimostrazione: Sia $Ext(P) = \{v^1, \ldots, v^q\}$ l'insieme dei vertici del politopo P. Poiché P è un politopo abbiamo che $P = conv(Ext(P))$. Ora, se il problema (7.6) ammette una soluzione ottima y^* allora, poiché $y^* \in P$ abbiamo che y^* può essere espresso come combinazione convessa dei vettori di $Ext(P)$, ovvero:

$$y^* = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i v^i; \quad \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1; \quad \lambda_i \geq 0, \quad i \in \{1, \ldots, q\}.$$

Di conseguenza, abbiamo che $f(y^*) = f(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i v^i)$ e, per definizione di funzione concava, abbiamo:

$$f(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i v^i) \geq \sum_{i=1}^{q} \lambda_i f(v^i)$$

Se poniamo

$$v^* = arg \min_{v \in Ext(P)} \{f(v)\}$$

possiamo scrivere:

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i f(v^i) \geq f(v^*) \cdot \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = f(v^*).$$

Di conseguenza abbiamo che $f(y^*) \geq f(v^*)$ e, quindi, che il vertice v^* è anch'esso ottimo per il problema (7.6). □

Il precedente teorema ci consente di restringere la nostra ricerca di una soluzione ottima per il problema (7.6) ai soli vertici del politopo P. Inoltre, poiché il sistema di disequazioni che definisce P è in *forma standard*, abbiamo che un vettore y è un vertice per P *se e solo se* la matrice A può essere posta nella forma $A = (B, N)$ (con B matrice $(T \times T)$ non singolare) ed y ha la forma $y = (y_B, y_N)$ con $y_B = B^{-1}d$ ed $y_N = 0_{T-1}$ (soluzione ammissibile di base).
Pertanto, possiamo restringere la nostra ricerca alle soluzioni ammissibili di base e, quindi, alle soluzioni ammissibili con $T-1$ componenti a zero ed *al più* T componenti non nulle.
Ora, poiché la giacenza iniziale è nulla, abbiamo che $x_1 \geq d_1 > 0$. Inoltre, poiché $s_{t-1} + x_t \geq d_t > 0$, abbiamo che, per ogni $t \in \{2, \ldots, T\}$, almeno una delle variabili $\{s_{t-1}, x_t\}$ deve essere diversa da zero. Questo significa che *almeno* T componenti di ogni soluzione ammissibile sono non nulle e, quindi, che ogni soluzione ammissibile di base ha la seguente:

Proprietà (*): esattamente una delle variabili $\{s_{t-1}, x_t\}$ è diversa da zero per ogni $t \in \{2, \ldots, T\}$ ($x_t s_{t-1} = 0$).

In altre parole, abbiamo che la ricerca della soluzione ottima del problema (7.6) può essere ristretta ai soli vettori (x, s) con $x_1 > 0$ e con la proprietà che in ogni periodo $t \in \{2, \ldots, T\}$ il livello di produzione x_t o la giacenza di magazzino s_{t-1} sono nulli.

Con riferimento ad una specifica soluzione di base $(\bar{x}, \bar{s})$, la Proprietà (*) ci consente di distinguere i periodi di controllo in *periodi*

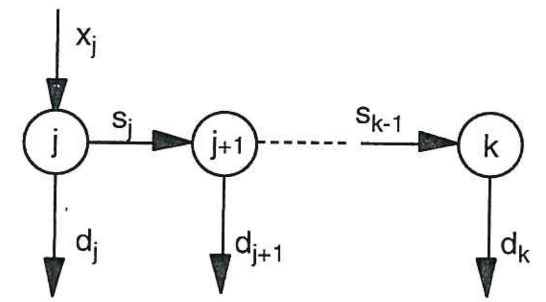

Figura 7.4:

produttivi, ovvero periodi t con $\bar{x}_t > 0$ ($\bar{s}_{t-1} = 0$) e *periodi non produttivi*, ovvero periodi t con $\bar{s}_{t-1} > 0$ ($\bar{x}_t = 0$). La domanda d_t di ciascun periodo produttivo è soddisfatta dalla produzione $\bar{x}_t$ mentre la domanda in ciascun periodo non produttivo è soddisfatta dalla giacenza $\bar{s}_{t-1}$. È immediato verificare che due periodi produttivi sono sempre separati da una fase in cui la giacenza è nulla e quindi possiamo concludere che i periodi non produttivi sono alimentati dalla produzione di *uno specifico periodo produttivo*.

Quest'ultima osservazione ci consente di decomporre, con riferimento alla soluzione di base $(\bar{x}, \bar{s})$, l'orizzonte temporale $\{1, \ldots, T\}$ in *intervalli di produzione*. Ciascun intervallo di produzione è associato ad uno specifico periodo produttivo j e comprende tutti i periodi non produttivi $\{j+1, \ldots, k\}$ (consecutivi) alimentati dalla produzione in j (figura (7.4)). Tale intervallo ha, quindi, le seguenti caratteristiche:

(i) $\bar{x}_j = \sum_{l=j}^{k} d_l > 0$ ed $\bar{x}_t = 0$ per $t \in \{j+1, \ldots, k\}$.

(ii) $\bar{s}_t = \sum_{l=t+1}^{k} d_l > 0$ per $t \in \{j, \ldots, k-1\}$.

(iii) $\bar{s}_{j-1} = \bar{s}_k = 0$.

Per quanto detto, una soluzione di base $(\bar{x}, \bar{s})$ è completamente caratterizzata dall'insieme $\bar{J} = \{j_1, \ldots, j_q\}$ dei periodi produttivi. Infatti, dato l'insieme $\bar{J}$, è possibile calcolare, utilizzando le espressioni (i),(ii) ed (iii), i valori delle componenti di $\bar{x}$ e di $\bar{s}$ relative ciascun intervallo di produzione $\{j_l, \ldots, j_{l+1} - 1\}$ per $l = 1, \ldots, q-1$ ed all'intervallo $\{j_q, \ldots, T\}$.

Di conseguenza, il problema (7.6) si riduce ad individuare l'insieme di periodi produttivi J^* che corrisponde alla soluzione (di base) ottima (x^*, s^*). A questo scopo definiamo il costo totale (produzione più stoccaggio) che deve essere sostenuto per soddisfare la domanda di un intervallo produttivo $\{j, \ldots, k\}$; ovvero il costo totale $M(j,k)$ che deve essere sostenuto per produrre nel periodo j allo scopo di soddisfare la domanda dal periodo j al periodo k (estremi inclusi).

La struttura delle soluzioni di base (figura (7.4)) ci permette di esprimere il costo $M(j,k)$ come somma del costo di produzione in j più la somma dei costi di stoccaggio nei periodi da j a $k-1$, ovvero:

$$\begin{aligned} M(j,k) &= C_j(x_j) + \sum_{t=j}^{k-1} H_t(s_t) = \\ &= C_j\Big(\sum_{r=j}^{k} d_r\Big) + \sum_{t=j}^{k-1} H_t\Big(\sum_{r=t+1}^{k} d_r\Big) \end{aligned} \tag{7.7}$$

Evidentemente, se una soluzione è caratterizzata dall'insieme di periodi produttivi $J = \{j_1, \ldots, j_q\}$ allora il costo totale della soluzione è dato dall'espressione:

$$Z(J) = \sum_{l=1}^{q-1} M(j_l, j_{l+1} - 1) + M(j_q, T)$$

Il nostro problema è quindi un problema di Ottimizzazione Combinatoria ovvero: *individuare il sottoinsieme J^* dell'insieme base $\{1, \ldots, T\}$ che minimizza la funzione obiettivo $Z(J)$.*

Allo scopo di definire un efficiente algoritmo per risolvere questo problema denotiamo con F_k, $k \in \{1, \ldots T\}$, il valore della soluzione ottima relativa all'orizzonte temporale $\{1, \ldots, k\}$ ovvero il *minimo costo totale che bisogna sostenere per soddisfare la domanda da* 1 *a* k. Evidentemente, F_T è il valore della soluzione ottima del problema (7.6), ovvero $F_T = Z(J^*)$.

Immaginiamo ora di conoscere la soluzione ottima $J_k = \{j_1, \ldots, j_q\}$ relativa all'orizzonte temporale $\{1, \ldots, k\}$. Per la precedente definizione abbiamo che:

$$F_k = M(j_1, j_2 - 1) + \ldots + M(j_{q-1}, j_q - 1) + M(j_q, k) \tag{7.8}$$

Inoltre, è facile dimostrare che la soluzione $J_k - \{j_q\}$ è ottima se si restringe l'attenzione all'orizzonte temporale $\{1, \ldots, j_q - 1\}$, ovvero:

$$F_{j_q-1} = M(j_1, j_2 - 1) + \ldots + M(j_{q-1}, j_q - 1). \tag{7.9}$$

Infatti, se $J_k - \{j_q\}$ non fosse la soluzione ottima, avremmo che $F_{j_q-1} < M(j_1, j_2 - 1) + \ldots + M(j_{q-1}, j_q - 1)$. Ma allora esisterebbe una scelta di periodi produttivi $\hat{J}$ sull'orizzonte temporale $\{1, \ldots, j_q - 1\}$ con la proprietà che $Z(\hat{J}) = F_{j_q-1} < Z(J_k - \{j_q\})$. Come conseguenza, la soluzione $\hat{J} \cup \{j_q\}$, relativa all'orizzonte temporale $\{1, \ldots, k\}$, avrebbe un valore $Z(\hat{J}) + M(j_q, k) < Z(J_k - \{j_q\}) + M(j_q, k) = F_k$, contraddicendo la definizione di F_k.

Pertanto, grazie alle relazioni (7.8) e (7.9) possiamo scrivere:

$$F_k = F_{j_q-1} + M(j_q, k) \tag{7.10}$$

Evidentemente, il periodo j_q nell'espressione precedente rappresenta l'ultimo periodo produttivo della soluzione ottima relativa all'orizzonte temporale $\{1, \ldots, k\}$. In generale, l'espressione $F_j + M(j, k)$ indica il costo minimo di produzione e stoccaggio nel caso in cui $j \in \{1, \ldots, k\}$ sia l'ultimo periodo produttivo.

Di conseguenza, $F_k \leq F_{j-1} + M(j, k)$ per ogni $j \in \{1, \ldots, k\}$ e, grazie alla (7.10), possiamo concludere che almeno una delle precedenti disequazioni è soddisfatta all'uguaglianza e quindi che:

$$F_k = \min_{1 \leq j \leq k} \{F_{j-1} + M(j, k)\}. \tag{7.11}$$

La precedente è una *espressione ricorsiva* del valore F_k in funzione dei valori F_j con $1 \leq j \leq k - 1$. Grazie a tale espressione e ponendo $F_0 = 0$ è possibile calcolare successivamente i valori $F_1, F_2, \ldots, F_T$ e quindi risolvere il problema (7.6).

Un generico algoritmo basato sull'espressione ricorsiva dei valore della soluzione ottima viene detto algoritmo di *Programmazione Dinamica*. In particolare, l'algoritmo proposto da Wagner e Whitin (1958) [17] ha la seguente struttura:

Algoritmo di Wagner-Whitin

Fase I

$F_0 := 0;$

for $1 \leq j < k \leq T$

  $M(j, k) := C_j(\sum_{r=j}^{k} d_r) + \sum_{t=j}^{k-1} H_t(\sum_{r=t+1}^{k} d_r);$

for $k = 1, \ldots, T$

  $F_k := \min_{1 \leq j \leq k}\{F_{j-1} + M(j, k)\}$

  $L_k := arg\min_{1 \leq j \leq k}\{F_{j-1} + M(j, k)\}$

endfor

Fase II

$J^* := \{L_T\};$

$LAST := L_T;$

while $LAST \neq 1$ **do**

  $LAST := L_{LAST-1}$

  $J^* := J^* \cup \{LAST\}$

endwhile

Si osservi che al termine della Fase I viene calcolato il valore F_T della soluzione ottima e, per ogni $k \in \{1, \ldots, T\}$, viene definito l'ultimo periodo produttivo L_k della soluzione ottima relativa all'orizzonte temporale $\{1, \ldots, k\}$. Questo significa che L_T è l'ultimo periodo produttivo della soluzione ottima J^* del problema (7.6) e giustifica l'aver posto L_T in J^* all'inizio della Fase II ($J^* := \{L_T\}$).

Per quanto riguarda la struttura della Fase II dell'algoritmo, si osservi che se $LAST$ è l'ultimo periodo produttivo inserito nell'insieme J^* (ed è diverso da 1) allora, nella soluzione ottima J^*, la domanda del periodo $LAST - 1$ è soddisfatta dall'ultimo periodo produttivo della soluzione ottima relativa all'orizzonte temporale $\{1, \ldots, LAST - 1\}$ ovvero, per definizione, da L_{LAST-1}. Di conseguenza, il periodo L_{LAST-1} appartiene a J^*.

Un'ultima osservazione relativa all'algoritmo di Wagner-Whitin riguarda l'orizzonte temporale. Evidentemente, la scelta di limitare l'orizzonte ad un insieme di T periodi può portarci ad ignorare informazioni sulla domanda nei periodi successivi all'ultimo, informazioni che potrebbero essere decisive anche per determinare il livello di produzione nel primo periodo. Per ovviare a questi inconvenienti, l'algoritmo di Wagner-Whitin deve sempre essere utilizzato su un orizzonte sufficientemente esteso in modo tale da poter considerare ininfluenti le informazione relative ai periodi successivi al T-esimo.

Esempio: Consideriamo il seguente problema di Programmazione della Produzione. Un bene deve essere prodotto su un orizzonte temporale composto di quattro periodi. La funzione costo di produzione ha la seguente struttura (lineare):

$$C_t(x_t) = A_t\eta(x_t) + c_t x_t \qquad t \in \{1, \ldots, T\}$$

Dove A_t è il costo fisso e c_t è il costo unitario di produzione. Il costo di stoccaggio ha invece un andamento lineare $H_t(s_t) = h_t s_t$. I parametri caratteristici relativi ai quattro periodi sono:

Periodo	Domanda	A	c	h
1	20	30	3	2
2	30	40	3	2
3	40	30	4	1
4	30	50	4	1

La matrice M ha la seguente struttura:

1	2	3	4
90	240	520	760
-	130	330	510
-	-	190	340
-	-	-	170

Ponendo $F_0 = 0$ possiamo calcolare F_1:

$$F_1 = \min_{1 \le j \le 1} \{F_{j-1} + M(j,1)\} = F_0 + M(1,1) = 90$$

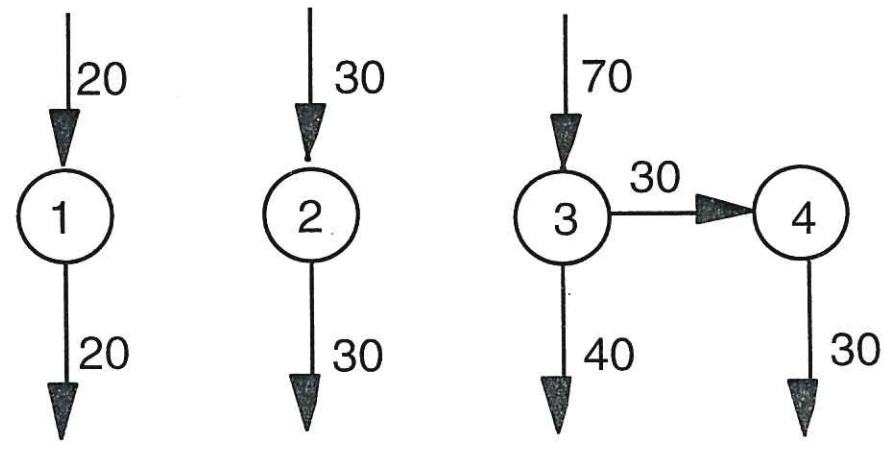

Figura 7.5:

e porre $L_1 = 1$. Possiamo poi calcolare, in sequenza, i valori F_k e L_k ($k \in \{2, \ldots, 4\}$). Avremo quindi:

$$F_2 = \min_{1 \le j \le 2} \{F_{j-1} + M(j,2)\} = \{F_1 + M(2,2)\} = 220 \; (L_2 = 2)$$

$$F_3 = \min_{1 \le j \le 3} \{F_{j-1} + M(j,3)\} = \{F_2 + M(3,3)\} = 410 \; (L_3 = 3)$$

$$F_4 = \min_{1 \le j \le 4} \{F_{j-1} + M(j,4)\} = \{F_2 + M(3,4)\} = 560 \; (L_4 = 3)$$

Quindi, $F_4 = 560$ è il valore della soluzione ottima. Per calcolare l'insieme ottimo dei periodi produttivi poniamo $J^* = \{L_4\} = \{3\}$ e $LAST = 3$. Di conseguenza, abbiamo che $LAST - 1 = 2$ e $L_{LAST-1} = L_2 = 2$ e, quindi, poniamo $J^* = J^* \cup \{L_2\} = \{2, 3\}$ e $LAST = 2$. Ora, $LAST - 1 = 1$ e $L_1 = 1$ e, quindi, poniamo $J^* = J^* \cup \{L_1\} = \{1, 2, 3\}$ e $LAST = 1$. Poiché $LAST = 1$ l'algoritmo termina e l'insieme ottimo dei periodi produttivi è dato da $J^* = \{1, 2, 3\}$ (vedi figura (7.5)). □

Esempio: La società EAGLE usa la seguente semplice regola per decidere le quantità da produrre di un determinato bene in ogni periodo produttivo: *in ogni periodo produttivo deve essere prodotta una* *quantità sufficiente a soddisfare la domanda dei tre mesi successivi.* Il bene in questione è prodotto in scatole contenenti ciascuna 50 pezzi.

Siamo in Dicembre e la giacenza del bene in magazzino è nulla. L'informazione disponibile riguardante la domanda mensile per i 12 mesi dell'anno è riportata nella seguente tabella:

Mese	Domanda (scatole)
Gennaio	10
Febbraio	62
Marzo	12
Aprile	130
Maggio	154
Giugno	129
Luglio	88
Agosto	52
Settembre	124
Ottobre	160
Novembre	238
Dicembre	41
	1200

Si può facilmente verificare che la domanda ha due picchi stagionali, uno nella tarda primavera e l'altro nella stagione autunnale.

Il costo fisso di produzione è costante per tutto l'anno ed è pari a 54 dollari. La parte variabile del costo di produzione è una funzione lineare della quantità prodotta ed il costo unitario di produzione è pari a 20 dollari a scatola. Il costo fisso di stoccaggio è zero mentre il costo di stoccaggio ha, anch'esso, un andamento lineare caratterizzato da un costo di 0.02 dollari per ogni dollaro immobilizzato in magazzino.

L'ufficio di Pianificazione della Produzione della EAGLE vorrebbe stabilire il livello di produzione per il mese di Gennaio ed anche stimare i livelli dei periodi produttivi successivi. Usiamo la parola "stimare" poiché la società potrebbe, in presenza di ulteriori informazioni che dovessero arrivare nel mese di Gennaio, aggiornare le sue decisioni.

L'uso della semplice *regola dei tre mesi* porta alla seguente soluzione (rappresentata mediante la quantità prodotta ed il magazzino finale di ciascun mese):

Mese	Domanda	x_t	s_t
Gennaio	10	84	74
Febbraio	62	0	12
Marzo	12	0	0
Aprile	130	413	283
Maggio	154	0	129
Giugno	129	0	0
Luglio	88	264	176
Agosto	52	0	124
Settembre	124	0	0
Ottobre	160	439	279
Novembre	238	0	41
Dicembre	41	0	0
	1200	1200	1118

Il costo totale può essere calcolato molto facilmente in quanto tutti i parametri di costo non variano al variare del periodo. Innanzitutto, la parte variabile del costo di produzione è costante ed è quindi irrilevante per valutare l'efficacia della soluzione.

I costi rilevanti sono, invece, i costi fissi di produzione pari a $4 \times 54 = 216$ dollari (abbiamo infatti 4 periodi produttivi) e dal costo di stoccaggio, dato dal prodotto della giacenza complessiva per il costo unitario di giacenza che è pari a 0.02 dollari per ogni dollaro immobilizzato (e quindi pari a $0.02 \times 20 = 0.4$ per ogni scatola giacente). Poiché la giacenza complessiva è data dalla somma delle giacenze finali ed è pari a 1118, il costo di stoccaggio è pari a $0.4 \times 1118 = 447.2$. Quindi il costo (rilevante) complessivo è pari a $216 + 447.2 = 663.2$.

L'ufficio di Pianificazione della Produzione decide di utilizzare il metodo di Wagner-Whitin per individuare la soluzione ottima del problema. La soluzione ottima prodotta dall'algoritmo è la seguente:

Mese	Domanda	x_t	s_t
Gennaio	10	84	74
Febbraio	62	0	12
Marzo	12	0	0
Aprile	130	130	0
Maggio	154	283	129
Giugno	129	0	0
Luglio	88	140	52
Agosto	52	0	0
Settembre	124	124	0
Ottobre	160	160	0
Novembre	238	279	41
Dicembre	41	41	0
	1200	1200	308

I costi rilevanti sono, come nel caso precedente, dati dal costo fisso di produzione pari a $7 \times 54 = 378$ dollari (abbiamo infatti 7 periodi produttivi) e dal costo di stoccaggio, dato dal prodotto della giacenza complessiva per il costo unitario di giacenza che è pari a $0.02 \times 20 = 0.4$ per scatola. Poiché la giacenza complessiva è pari a 308, il costo di stoccaggio è pari a $0.4 \times 308 = 123.2$. Quindi il costo (rilevante) complessivo è pari a $378 + 123.2 = 501.2$.
Rispetto alla semplice "regola dei tre mesi" l'algoritmo di Wagner-Whitin ha consentito un risparmio del 24.4% sui costi rilevanti. Verificare, utilizzando l'algoritmo di Wagner-Whitin, che la soluzione precedente è corretta. □

7.4.2 Modello con "backlogging" (Zangwill)

In questo paragrafo generalizzeremo il modello di Wagner e Whitin per tener conto della possibilità di soddisfare la domanda nel periodo $t \in \{1, \ldots, T\}$ utilizzando la produzione relativa al periodo $q > t$ (situazione di "backlogging"). Abbiamo già osservato come tale eventualità possa essere rappresentata da una scorta di magazzino di valore *negativo*. Pertanto, la caratteristica saliente che distingue il modello che ammette situazioni di "backlogging" dal modello di Wagner-Whitin è che le variabili $\{s_t : t \in \{1, \ldots, T\}\}$, che rappresentano la giacenza di magazzino alla fine del periodo t, *non sono ristrette in segno*.

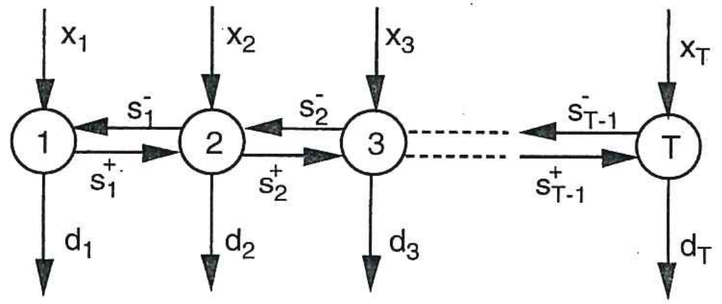

Figura 7.6:

È noto, dalla teoria della Programmazione Lineare, che una variabile non ristretta in segno può essere rappresentata come differenza di due variabili non negative, in particolare avremo:

$$s_t = s_t^+ - s_t^-, \quad s_t^+, s_t^- \geq 0, \quad t \in \{1, \ldots, T\} \tag{7.12}$$

Sostituendo l'espressione (7.12) a ciascuna variabile s_t nel sistema (7.5) otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - s_1^+ + s_1^- = d_1 \\ x_t + s_{t-1}^+ - s_{t-1}^- - s_t^+ + s_t^- = d_t \quad t = 2, \ldots, T-1 \\ x_T + s_{T-1}^+ - s_{T-1}^- = d_T \\ s_t^+, s_t^- \geq 0 \quad x_t \geq 0, \quad t = 1, \ldots, T. \end{cases} \tag{7.13}$$

Le variabili s_t^+ ed s_t^- hanno un preciso significato. La variabile s_t^- rappresenta la quantità prodotta in periodi successivi a t per soddisfare la domanda in t. La variabile s_t^+ rappresenta, invece, il valore della giacenza di magazzino che si sarebbe avuta se la quantità s_t^- fosse stata prodotta nel periodo t. È quindi evidente che la quantità $s_t = s_t^+ - s_t^-$ indica il valore della *effettiva* giacenza di magazzino alla fine del periodo t.

La rappresentazione grafica del sistema 7.13 è riportata in figura 7.6. Si osservi che, nel caso di presenza di "backlogging", la domanda in ciascun periodo $t \in \{1, \ldots, T\}$ può essere soddisfatta dalla *produzione*