#### Esempi sull’interpretazione economica della dualità

#### 1) *Componendo risorse*

Un’azienda vinicola desidera produrre due tipi di vino: uno da tavola, uno da dessert. Il profitto che l’azienda trae dalla produzione di 1 unità di vino da tavola è 3, mentre dalla produzione di 1 unità di vino da dessert è 7. Tale produzione necessita di una particolare combinazione di due tipi di uva: diciamo di tipo A e di tipo B rispettivamente. Per produrre 1 unità di vino da tavola, si ha bisogno di 3 unità di uva di tipo A e di 2 unità di uva di tipo B. Per produrre 1 unità di vino da dessert, si ha bisogno di 1 unità di uva di tipo A e di 4 unità di uva di tipo B. Infine l’azienda ha a disposizione 1000 unità di uva di tipo A e 400 unità di uva di tipo B. Il problema è determinare le quantità di vino da tavola e da dessert da produrre in modo da massimizzare il profitto totale.

Variabili decisionali: *x*1, *x*2

*x*1 = quantità di vino da tavola prodotta

*x*2 = quantità di vino da dessert prodotta

(1) max 3*x*1 + 7*x*2

3*x*1 + *x*2 < 1000

2*x*1 + 4*x*2 < 400

*x*1, *x*2 > 0

La soluzione ottima è *x\**1 = 0, *x\**2 = 100, con valore 700.

Si consideri di seguito il problema duale del problema (1).

(2) min 1000 *y*1 + 400 *y*2

3*y*1 + 2*y*2 > 3

*y*1 + 4*y*2 > 7

*y*1, *y*2 > 0

La soluzione ottima è *y\**1 = 0, *y\**2 = 7/4, con valore 700.

Sia *yj\** una componente della soluzione ottima del problema duale. Ricordando che a ogni vincolo del problema primale è associato una variabile del problema duale, sia *bj* il termine noto del vincolo del problema primale associato alla variabile *yj*, cioè la disponibilità della risorsa *j*. In particolare *bjyj* è un termine della funzione obiettivo del problema duale: all’ottimo esso vale *bjy\*j*.

Ora si assuma di poter far variare *bj* : sia *bj* + Δ*bj*.

• Se Δ*bj* > 0 (che significa un acquisto della risorsa *j*), allora per il Teorema della Dualità Forte il profitto ottimo varia di *y\*j*Δ*bj* > 0 (nel caso di acquisto gratuito); ma in generale varia di *y\*j*Δ*bj* − *y’j*Δ*bj*, dove *y’j* è il prezzo unitario di acquisto della risorsa *j*; perciò tale acquisto è conveniente solo se *y\*j*Δ*bj* − *y’j*Δ*bj* > 0, cioè solo se *y’j* < *y\*j*.

• Se Δ*bj* < 0 (che significa una vendita della risorsa *j*), allora per il Teorema della Dualità Forte il profitto ottimo varia di *y\*j*Δ*bj* < 0 (nel caso di vendita gratuita); ma in generale varia di *y\*j*Δ*bj* + *y’j|*Δ*bj*| = *y\*j*Δ*bj* − *y’j*Δ*bj*, dove *y’j* è il prezzo unitario di vendita della risorsa *j*; perciò tale vendita è conveniente solo se *y\*j*Δ*bj* − *y’j*Δ*bj* > 0, cioè solo se *y’j* > *y\*j* (essendo Δ*bj* < 0).

Quindi la soluzione ottima del problema duale (*y\**1 , …, *y\*m*) rappresenta il valore intrinseco di ogni risorsa *j*, per *j* = 1, …, *m*. Tale valore è detto anche *prezzo ombra*, nel senso che:

• è conveniente acquistare la risorsa *j* (entro un certo limite di quantità), se la si acquista a un prezzo unitario che è al di sotto del prezzo ombra *yj\*.*

• è conveniente vendere la risorsa *j* (entro un certo limite di quantità), se la si vende a un prezzo unitario che è al di sopra del prezzo ombra *yj\*.*

Osservazione: i limiti di quantità entro i quali conviene acquistare/vendere una risorsa dipendono dal fatto che la soluzione ottima di base può cambiare per variazioni della disponibilità della risorsa, cioè del termine noto corrispondente; tali limiti sono calcolabili mediante semplici operazioni riportate nell’analisi di sensitività (o di post-ottimalità) e comunque sono calcolati dai software che risolvono i problemi di PL.

Tornando al nostro esempio si ha che:

*y\**1 = prezzo ombra dell’uvaA

*y\**2 = prezzo ombra dell’uvaB

Consideriamo ad esempio il prezzo ombra *y\**2 = 7/4 dell’uva di tipo B.

E’ conveniente acquistare tale risorsa (entro un certo limite di quantità) ad un prezzo unitario inferiore a 7/4, dato che ciò garantisce un aumento del profitto totale.

E’ conveniente vendere tale risorsa (entro un certo limite di quantità) ad un prezzo unitario superiore a 7/4, dato che ciò garantisce un aumento del profitto totale.

E’ indifferente acquistare o vendere tale risorsa (entro un certo limite di quantità) ad un prezzo unitario pari a 7/4, dato che ciò non cambia il profitto totale.

2) *Decomponendo risorse*

Una persona vuole fare una dieta. In particolare deve assumere due tipi di sostanze, cioè proteine e vitamine, che può ricavare comprando tre tipi di alimenti, cioè frutta, latte, uova. In dettaglio:

1 unità di frutta contiene: 0 u. di proteine, 7 u. di vitamine;

1 unità di latte contiene: 2 u. di proteine, 3 u. di vitamine;

1 unità di uova contiene: 5 u. di proteine, 1 u. di vitamine.

Il costo unitario della frutta, del latte e delle uova è rispettivamente di 10, 20, 10.

La dieta richiede di assumere almeno 15 unità di proteine e 25 unità di vitamine.

Il problema è determinare le quantità di frutta, latte, uova da acquistare in modo da minimizzare il costo totale.

Variabili decisionali: *x*F, *x*L, *x*U

*x*F = quantità di frutta da acquistare

*x*L = quantità di latte da acquistare

*x*U = quantità di uova da acquistare

(1) min 10*x*F + 20*x*L + 10*x*U

0*x*F + 2*x*L + 5*x*U > 15

7*x*F + 3*x*L + 1*x*U > 25

*x*F, *x*L, *x*U > 0

La soluzione ottima è *x\**F = 3,14, *x\**L = 0, *x\**U = 3, con valore 61,42.

Si consideri di seguito il problema duale del problema (1).

(2) max 15 *y*1 + 25 *y*2

0*y*1 + 7*y*2 < 10

2*y*1 + 3*y*2 < 20

5*y*1 + 1*y*2 < 10

*y*1, *y*2 > 0

La soluzione ottima è *y\**1 = 1,71 e *y\**2 = 1,42, con valore 61,42.

Con un argomentazione simile a quella dell’Esempio 1, si può verificare che la soluzione ottima del problema duale (*y\**1 , …, *y\*m*) rappresenta il valore intrinseco *yj\** di ogni produzione *j*, per *j* = 1, …, *m* (proteine, vitamine). Tale valore è detto anche *prezzo ombra*, nel senso che:

• è conveniente acquistare la produzione *j* (entro un certo limite di quantità), se la si acquista a un prezzo unitario che è al di sotto del prezzo ombra *yj\**.

Osservazione: i limiti di quantità entro i quali conviene acquistare una produzione dipendono dal fatto che la soluzione ottima di base può cambiare per variazioni della richiesta della produzione, cioè del termine noto corrispondente; tali limiti sono calcolabili mediante semplici operazioni riportate nell’analisi di sensitività (o di post-ottimalità) e comunque sono calcolati dai software che risolvono i problemi di PL.

Tornando al nostro esempio si ha che:

*y\**1 = prezzo ombra delle proteine

*y\**2 = prezzo ombra delle vitamine

Consideriamo ad esempio il prezzo ombra *y\**2 = 1,42 delle vitamine.

E’ conveniente acquistare tale produzione – cioè vitamine, ad esempio sotto forma di integratore alimentare – (entro certi limiti di quantità) ad un prezzo unitario inferiore a 1,42, dato che ciò garantisce una diminuzione della spesa totale.

E’ indifferente acquistare tale produzione (entro un certo limite di quantità) ad un prezzo unitario pari a 1,42, dato che ciò non cambia la spesa totale.