Sia dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

1. Si consideri un mercato finanziario con tre titoli rischiosi i cui prezzi $\{S_t^1\}_{t \geq 0}$, $\{S_t^2\}_{t \geq 0}$ e $\{S_t^3\}_{t \geq 0}$ sono soluzioni delle equazioni differenziali stocastiche:

$$\begin{aligned} dS_t^1 &= S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1) \quad S_0^1 > 0 \\ dS_t^2 &= S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_{22} dW_t^2), \quad S_0^2 > 0 \\ dS_t^3 &= S_t^3(\mu_3 dt + \sigma_{31} dW_t^1 + \sigma_{32} dW_t^2), \quad S_0^3 > 0 \end{aligned}$$

con $\sigma_{ij} > 0$, $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2$, $\{W_t^i\}_{t \geq 0}$, $i = 1, 2$, moti browniani indipendenti. Sia $r > 0$ tasso d'interesse istantaneo privo di rischio.

- (i) Dare la definizione di misura martingala equivalente Q .
- (ii) Dare la definizione di mercato libero da arbitraggi e completo.
- (ii) Determinare le condizioni sui parametri μ_i e σ_{ij} affinché il mercato finanziario sia libero da arbitraggi e completo.
- (iii) Nella circostanza del punto ii), scrivere la dinamica dei prezzi S^1, S^2, S^3 rispetto alla misura Q .

2.

Considerate le azioni di prezzo $\{S_t^1\}_{t \geq 0}$ e $\{S_t^3\}_{t \geq 0}$ dell'esercizio precedente.

- (i) Calcolare il prezzo, al tempo $t = 0$, del derivato di payoff finale

$$F(S_T^1, S_T^3) = (S_T^1)^2 S_T^3.$$

Suggerimento: utilizzare la seguente espressione per il prezzo del terzo titolo rispetto alla misura martingala

$$S_t^3 = S_0^3 e^{(r - \frac{\sigma_{31}^2}{2} - \frac{\sigma_{32}^2}{2})t + \sigma_{31} W_t^{1,Q} + \sigma_{32} W_t^{2,Q}}$$

- (ii) Un investitore ha venduto 10 derivati di payoff $F(S_T^1, S_T^3)$ quante azioni di ciascun tipo deve avere nel portafoglio di copertura?

3.

Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria (A) di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente annuo.

- (i) Determinare la formula del prezzo al tempo $t = 0$ di un DZCB con recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta$, di valore nominale x e maturità T , $p_{RT}(0, T)$. Qual'è il valore nel caso in cui sia $x = 100$ euro, $\lambda = 3\%$, $r = 2\%$, $\delta = 30\%$ e $T = 1$ anno?
- (ii) Determinare la formula del prezzo $p_{FV}(0, T)$ di un DZCB con recovery face value (pagato nell'istante di default). Qual'è il valore nel caso in cui sia $x = 100$ euro, $\lambda = 3\%$, $r = 2\%$, $\delta = 30\%$ e $T = 1$ anno?
- (iii) Confrontare i valori $p_{RT}(0, T)$ e $p_{FV}(0, T)$.
- (iv) Un'altra istituzione finanziaria (B) ha emesso un DZCB con zero recovery, valore nominale 100 e maturità $T = 1$ anno. Lo spread (calcolato rispetto ai DZCB senza recovery) tra l'istituzione B e la A è pari al 1,5%, determinare l'intensità di default dell'istituzione B. Motivare la risposta.

Risorse Claudia Ceci

$$dS_t^1 = S_t^1 (\mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^1)$$

$$dS_t^2 = S_t^2 (\mu_2 dt + \sigma_{21} dW_t^1 + \sigma_{22} dW_t^2)$$

$$dS_t^3 = S_t^3 (\mu_3 dt + \sigma_{31} dW_t^1 + \sigma_{32} dW_t^2)$$

(i) Q è una misura martingale equivalente se:

- $Q \uparrow$ ossia $V_A \in \mathcal{F}$ $Q(A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$
- $\{S_t^i e^{-rt}\}_{t \geq 0} \quad i=1,2,3$ sono Q -martingole:

$$V_{S^1} \mathbb{E}^Q [S_t^1 e^{-rt}] = S_0^1 \Rightarrow \mathbb{E}^Q [S_t^1] = S_0^1 e^{rt}$$

ie rendimento atteso di ogni titolo è pari ad r rispetto a Q

(ii) Un mercato finanziario si dice completo se ogni derivato può essere replicato da una strategia autofinanziante. Un mercato si dice libero da arbitraggi se non esistono opportunità di guadagni certi liberi di rischio. Più precisamente se non esistono arbitraggi.

Un arbitraggio è una strategia autofinanziante $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$ $\alpha_i =$ quote nei titoli i

$$V_0 = 0 \quad e \quad V_T = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(t) S_t^i + \beta(t) B_T \geq 0$$

$\beta =$ "mel. titolo"
 "prima di rischio"

con probabilità 1 ~~esclusivamente~~ $P(V_T > 0) > 0$

C'è sempre uno scenario in cui si ha un valore del portafoglio strettamente positivo)

(iii) Per se primo teorema fondamentale della Asset Pricing un mercato è libero da arbitraggi e esiste una misura martingale Q .

Per se secondo teorema fondamentale della Asset Pricing un mercato libero da arbitraggi è completo se $\exists!$ Q (Q è unica)

Le misure martingale sono associate ad ogni misura $Q = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$ soluzione del

il sistema lineare
$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} \end{pmatrix} \mu - r = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \\ \mu_3 - r \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} \theta_1 = \mu_1 - r \\ \sigma_{22} \theta_2 = \mu_2 - r \\ \sigma_{31} \theta_1 + \sigma_{32} \theta_2 = \mu_3 - r \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_1 = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} \\ \theta_2 = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}} \end{cases}$$

Se $\sigma_{31} \frac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} + \sigma_{32} \frac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}} = \mu_3 - r$ allora il sistema ammette un'unica soluzione: $\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$

Q è la misura t.c.
$$\begin{cases} dW_t^Q = W_t^1 + \theta_1 t \\ dW_t^2 = W_t^2 + \theta_2 t \end{cases}$$

Se il mercato è libero da arbitraggi e completo $\Rightarrow \exists!$ Q

Se $\sigma_{31} \frac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} + \sigma_{32} \frac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}} \neq \mu_3 - r$ il sistema non ammette soluzione $\Rightarrow \nexists Q$

non si mercazi ammette arbitraggi.

nel primo caso $\exists!$ Q e
$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1 (r dt + \sigma_{11} dW_t^1) \\ dS_t^2 = S_t^2 (r dt + \sigma_{22} dW_t^2) \\ dS_t^3 = S_t^3 (r dt + \sigma_{31} dW_t^1 + \sigma_{32} dW_t^2) \end{cases}$$

Secondo teorema di Bouleau-Castelli: il sistema non ammette soluzione se $\text{rg} \sigma = 2 \neq \text{rg}(\text{mat. completa}) = 3$ nel caso (iii). Se invece $\text{rg} \sigma = 2 = \text{rg}(\text{mat. complet.})$ il sistema ammette una sola soluzione.

Secondo da valutazione neutrale al rischio:

$$V_0 = e^{-rT} E^Q [(S_T^1)^2 S_T^3]$$

$$S_T^1 = S_0^1 e^{(r - \frac{\sigma_1^2}{2})T} \omega_{T1}^{\sigma_1} \omega_{T1}^{\sigma_1}$$

$$S_T^3 = S_0^3 e^{(r - \frac{\sigma_3^2}{2})T} \omega_{T3}^{\sigma_3} \omega_{T3}^{\sigma_3}$$

$$V_0 = e^{-rT} (S_0^1)^2 e^{2(r - \frac{\sigma_1^2}{2})T} E^Q [e^{2\sigma_1 \omega_{T1}^{\sigma_1}} e^{\sigma_3 \omega_{T3}^{\sigma_3}} e^{\sigma_3 \omega_{T3}^{\sigma_3}}] \cdot S_0^3 e^{(r - \frac{\sigma_3^2}{2})T}$$

$$E^Q [e^{(2\sigma_1 \omega_{T1}^{\sigma_1} + \sigma_3 \omega_{T3}^{\sigma_3}) \omega_{T1}^{\sigma_1}}] E^Q [e^{\sigma_3 \omega_{T3}^{\sigma_3}}] \leftarrow \omega_{T1}^{\sigma_1} \text{ e } \omega_{T3}^{\sigma_3} \text{ sono mut. indipendenti}$$

$$E^Q [e^{(2\sigma_1 \omega_{T1}^{\sigma_1} + \sigma_3 \omega_{T3}^{\sigma_3}) \omega_{T1}^{\sigma_1}}] = E^Q [e^{2\sigma_1 \omega_{T1}^{\sigma_1} + \sigma_3 \omega_{T3}^{\sigma_3}}] = e^{2\sigma_1^2 T + \sigma_3^2 T}$$

$$V_0 = (S_0^1)^2 S_0^3 e^{2rT} \left[\frac{2\sigma_1^2 \sigma_3 T}{\sigma_1^2 T} \right]$$

alcediamo in modo analogo:

$$V(t, x_1, x_3) = e^{-r(T-t)} E^Q [(S_T^1)^2 S_T^3 \mid S_t^1 = x_1, S_t^3 = x_3]$$

$$V(t, x_1, x_3) = x_1^2 \cdot x_3 e^{2r(T-t)} \frac{2\sigma_1^2 \sigma_3 (T-t)}{\sigma_1^2 (T-t)} e^{\sigma_3^2 (T-t)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 2x_1 x_3 e^{2r(T-t)} \frac{2\sigma_1^2 \sigma_3 (T-t)}{\sigma_1^2 (T-t)} e^{\sigma_3^2 (T-t)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3} = x_1^2 e^{2r(T-t)} \frac{2\sigma_1^2 \sigma_3 (T-t)}{\sigma_1^2 (T-t)} e^{\sigma_3^2 (T-t)}$$

tempo t se $S_t^1 = x_1$ e $S_t^3 = x_3$ e' investire dare dotazione 100 $\frac{\partial V}{\partial x_1}$ azioni di titolo 1

100 $\frac{\partial V}{\partial x_3}$ azioni di titolo 3.

3) $\tau \sim \exp(\lambda)$ $Q(\tau > t) = e^{-\lambda t}$ $Q(\tau \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $t > 0$

$P_{RT}(0, T) = e^{-rT} E^Q [x \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + x(1-\delta) \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}] =$

$= e^{-rT} x [Q(\tau > T) + (1-\delta) Q(\tau \leq T)] =$
 $= e^{-rT} x [1 - Q(\tau > T)] =$

$= e^{-rT} x [e^{-\lambda T} + (1-\delta)(1 - e^{-\lambda T})] =$
 $x e^{-rT} [1 - \delta + \delta e^{-\lambda T}]$

$\lambda = 3\%$ $r = 2\%$ $\delta = 30\%$ $x = 100$ $T = 1$ anno $P_{RT}(0, 1) = 100 e^{-0.02} [0.7 + 0.3 e^{-0.03}] = 97.15$

(ii) $P_{RV}(0, T) = E^Q [x \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} e^{-rT} + (1-\delta)x e^{-rT} \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}] = x e^{-rT} e^{-\lambda T} + (1-\delta)x E^Q [e^{-rT} \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}]$

calcolo $E^Q [e^{-rT} \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}] = \int_0^T e^{-ru} \lambda e^{-\lambda u} du = \int_0^T \lambda e^{-(r+\lambda)u} du = \left. -\frac{\lambda}{r+\lambda} e^{-(r+\lambda)u} \right|_0^T =$

Bo usalo da densità esponenziale
 $f(u) = \lambda e^{-\lambda u}$ $u \geq 0$

$= -\frac{\lambda}{r+\lambda} [e^{-(r+\lambda)T} - 1]$

$P_{RV}(0, T) = x e^{-(r+\lambda)T} + x(1-\delta) \frac{\lambda}{r+\lambda} (1 - e^{-(r+\lambda)T})$ (iii) $P_{RV}(0, T) > P_{RT}(0, T)$ in quanto è

più conveniente per chi detiene le DZCB ricevere le recovery al tempo di default (risparmio di alla scadenza, $P_{RV}(0, T) = 100 [e^{-0.05} + 0.7 \frac{0.03}{0.05} (1 - e^{-0.05})] = 97.14 \in$ (se si vuol far prima scadenza)

(iv) lo spread è pari alle differenza dei loro rendimenti nominali.

DZCB sulla recovery $P^A(0, T) = x e^{-(r+\lambda_A)T}$ $P^B(0, T) = x e^{-(r+\lambda_B)T}$ $0.015 = \theta_g \left(\frac{P^B(0, T)}{P^A(0, T)} \right)$

$\frac{P^B(0, T)}{P^A(0, T)} = e^{-(\lambda_A - \lambda_B)T}$ $\Rightarrow \theta_g \frac{P^B(0, T)}{P^A(0, T)} = \lambda_B - \lambda_A = 0.015 \Rightarrow \lambda_B = \lambda_A + 0.015 = 0.045$