Scritto del 2 luglio 2021
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II
Prof.ssa Claudia Ceci

1.

Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes, ossia soluzione della EDS

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0,$$

con μ (rendimento atteso), e $\sigma > 0$ (volatilitá) costanti. Si indichi con $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente.

(i) Applicare la formula di Ito per determinare la dinamica del processo $Y_t = log(S_t)$ e ricavare l'espressione esplicita di S_t.

(ii) Determinare il prezzo $v_1(t, x)$ (al tempo $t \in [0, T]$ se $S_t = x$) del derivato di payoff finale $F_1(S_T) = (S_T)^2$ ed il prezzo $v_2(t, x)$ (al tempo $t \in [0, T]$ se $S_t = x$) del derivato di payoff finale $F_2(S_T) = (S_T)^4$.

(iii) **[Facoltativo]** Determinare α e β affinché il portafoglio $V(t, x) = v_1(t, x) + \beta v_2(t, x) + \alpha x$ sia Δ e Γ-neutrale.

2.

Siano $\{S_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$ i prezzi di due azioni descritti dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1 + \sigma_{12} dW_t^2 + \sigma_{13} dW_t^3), \quad S_0^1 > 0.$$

$$dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_{21} dW_t^1 + \sigma_{22} dW_t^2), \quad S_0^2 > 0.$$

con μ_i, $i = 1, 2$ e $\sigma_{ij} > 0$ costanti, $\{W_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, moti browniani indipendenti. Considerare un mercato finanziario costituito dai 2 titoli ed il bond con tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.

(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente e di mercato completo;

(ii) Il mercato é libero da arbitraggi e completo? Se il mercato é incompleto é possibile completarlo? (Spiegarne il significato)

(iii) Calcolare il prezzo, al tempo $t = 0$, del derivato di payoff finale $F(S_T^1, S_T^2) = S_T^1(S_T^2 - K)$, con $K > 0$.

[Suggerimento: scrivere

$$S_t^1 = S_0^1 e^{(r - \frac{\sigma_{11}^2}{2} - \frac{\sigma_{12}^2}{2} - \frac{\sigma_{13}^2}{2})t + \sigma_{11} W_t^{1,Q} + \sigma_{12} W_t^{2,Q} + \sigma_{13} W_t^{3,Q}}$$

$$S_t^2 = S_0^2 e^{(r - \frac{\sigma_{21}^2}{2} - \frac{\sigma_{22}^2}{2})t + \sigma_{21} W_t^{1,Q} + \sigma_{22} W_t^{2,Q}}].$$

3.

Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda^Q > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente. Il valore di mercato al $t = 0$ mesi di un free-defaultable ZCB di maturitá $T = 12$ mesi e valore nominale 100 euro é pari a 97 euro.

(i) Sia $p_{RT}(0, T)$ il prezzo al tempo $t = 0$ di un DZCB di maturitá $T = 12$ mesi e di valore nominale 100 euro e recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta = 0,60$ é pari a 90 euro. Determinare l'intensitá di default λ^Q dell'istituzione finanziaria.

(ii) Sia $\bar{p}_{RT}(0, T)$ il prezzo al tempo $t = 0$ di un DZCB analogo al punto (i) (stesso valore nominale, recovery e maturitá) emesso da un'altra istituzione finanziaria pari a 87 euro. Quale delle due istituzioni ha un rischio di default maggiore? Determinare il loro spread creditizio.

Scritto Titoli 2, Prof.ssa C. Ceci 02/07/2021

1)

$dS_t = S_t (\mu \, dt + \sigma \, dW_t)$

(i)

$Y_t = \log(S_t)$ $\quad f(x) = \log(x)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

Formula di Itô: $\quad df(S_t) = \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f''(S_t)\, dt + f'(S_t)\, dS_t$

$$dY_t = -\frac{1}{\cancel{S_t^2}} \frac{1}{2}\sigma^2 \cancel{S_t^2}\, dt + \frac{1}{\cancel{S_t}} \cancel{S_t} (\mu \, dt + \sigma \, dW_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma \, dW_t$$

Integrando tra 0 e t si ottiene che:

$$Y_t - Y_0 = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t \quad \Rightarrow \quad \frac{S_t}{S_0} = e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

$$\log(S_t) - \log(S_0) = \log\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$$

$$S_t = S_0 \, e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

(ii)

$$V_1(t,x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{Q}\left[\left(S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} e^{\sigma(W_T^Q - W_t^Q)}\right)^2 \Big| S_t = x\right]$$

rispetto a Q abbiamo che $\quad S_T = S_t \, e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} e^{\sigma(W_T^Q - W_t^Q)}$

$$V_1(t,x) = e^{-r(T-t)} x^2 \, e^{2\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} \underbrace{\mathbb{E}^{Q}\left[e^{2\sigma(W_T^Q - W_t^Q)}\right]}$$

$W_T^Q - W_t^Q \sim \mathcal{N}(0, T-t) \sim \sqrt{T-t}\, N$

$$= \mathbb{E}^{Q}\left[e^{2\sigma\sqrt{T-t}\, N}\right] = e^{\frac{4\sigma^2}{2}(T-t)} = e^{2\sigma^2(T-t)}$$

$$\Rightarrow V_1(t,x) = x^2 e^{r(T-t)} e^{\sigma^2(T-t)}$$

$$v_2(t,x) = e^{-r(T-t)}\, E^{Q}\left[\left(S_t\, e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}\, e^{\sigma(W_T^Q - W_t^Q)}\right)^4 \,\Big|\, S_t = x \right]$$

$$= e^{-r(T-t)}\, x^4\, e^{4\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}\, e^{\frac{16}{2}\sigma^2(T-t)} = x^4\, e^{3r(T-t)}\, e^{6\sigma^2(T-t)}$$

Portafoglio Δ-neutrale se $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$

(i) Portafoglio Γ-neutrale se $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$

$$V(t,x) = v_1(t,x) + \alpha x + \beta\, v_2(t,x)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = 2x\, e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$$

$$\Gamma_{v_1} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = 2\, e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = 4x^3\, e^{(3r+6\sigma^2)(T-t)}$$

$$\Gamma_{v_2} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = 12x^2\, e^{(3r+6\sigma^2)(T-t)}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \alpha + \beta \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \underbrace{\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}}_{\Gamma_{v_1}} + \beta \underbrace{\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}}_{\Gamma_{v_2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = -\frac{\Gamma_{v_1}}{\Gamma_{v_2}}$$

$$\Rightarrow \beta = -\frac{2\, e^{(r+\sigma^2)(T-t)}}{12x^2\, e^{(3r+6\sigma^2)(T-t)}} = -\frac{1}{6}\frac{1}{x^2}\, e^{-(2r+5\sigma^2)(T-t)}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\beta\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{1}{\cancel{6}_{3}}\frac{1}{\cancel{x^2}}\, e^{-(2r+5\sigma^2)(T-t)} \cdot \cancel{4}^{2}\cancel{x^3}\, e^{(3r+6\sigma^2)(T-t)} - 2x\, e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$$

$$\alpha = \frac{2}{3}x\, e^{(r+\sigma^2)(T-t)} - 2x\, e^{(r+\sigma^2)(T-t)} = -\frac{4}{3}x\, e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$$

2) $\begin{cases} dS^1_t = S^1_t(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW^1_t + \sigma_{12} dW^2_t + \sigma_{13} dW^3_t) \\ dS^2_t = S^2_t(\mu_2 dt + \sigma_{21} dW^1_t + \sigma_{22} dW^2_t) \end{cases}$

(i) $\mathbb{Q}$ è una misura martingala per il mercato finanziario se: $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ equivalente a $\mathbb{P}$

$\mathbb{Q}(A) = 0 \iff \mathbb{P}(A) = 0 \quad \forall$ evento A

e $S^i_t e^{-rt}$ $i = 1,2$ sono martingale: $\forall s > t$ $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S^i_s e^{-rs} | \mathcal{F}_t] = S^i_t e^{-rt}$

(ossia il rendimento atteso del titolo è pari ad r: $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S^i_s | \mathcal{F}_t] = S^i_t e^{r(s-t)} \quad \forall s > t$)

Un mercato è completo se ogni derivato scritto su S^1 e S^2 può essere replicato da una strategia autofinanziante negoziando con le azioni S^1 e S^2.

(ii) Le misure mg si trovano determinando le soluzioni $\underline{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$ del sistema lineare

$$\underline{\sigma} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{pmatrix} \qquad \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \end{pmatrix}$$

2 equazioni in 3 incognite

$rg\, \underline{\sigma} = 2 = rg\left(\underline{\sigma}, \begin{matrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{matrix}\right)$ per il teorema di Rouché-Capelli il sistema

ammette ∞^1 soluzioni $\Rightarrow \infty$ misure mg $\mathbb{Q}^{\theta}$ (ogni misura mg è associata ad ogni valore prezzo di mercato del rischio $\underline{\theta}$)

In base al I Teorema fondamentale il mercato non ammette opportunità di arbitraggio $\iff$

$\exists$ una misura martingala e per il II Teorema fondamentale è anche completo $\iff$ la misura mg è unica

Di conseguenza il nostro mercato risulta libero da arbitraggi ma incompleto.

(iii) è possibile completarlo aggiungendo un terzo titolo

$$dS^3_t = S^3_t(\mu_3\,dt + \sigma_{31}\,dW^1_t)$$

la nuova matrice volatilità è
$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\sigma = \sigma_{31}\begin{vmatrix} \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{22} & 0 \end{vmatrix} = -\sigma_{31}\sigma_{13}\sigma_{22} \neq 0$$

significato: Ogni derivato scritto sui 2 titoli (e anche sui 3 titoli) è replicabile con una strategia autofinanziante negoziando sui 3 titoli

per il teorema di Cramer (sistema di 3 eq. in 3 incognite) il sistema $\underline{\sigma}\,\underline{\Theta} = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \\ \mu_3 - r \end{pmatrix}$ ammette un'unica soluzione $\Rightarrow \exists!\ Q$ misura martingala

(iv)
$$S^1_t = S^1_0 e^{(r - \sigma^2_{11}/2 - \sigma^2_{12}/2 - \sigma^2_{13}/2)t}\, e^{\sigma_{11}W^{Q,1}_t + \sigma_{12}W^{Q,2}_t + \sigma_{13}W^{Q,3}_t}$$

$$S^2_t = S^2_0 e^{(r - \sigma^2_{21}/2 - \sigma^2_{22}/2)t}\, e^{\sigma_{21}W^{Q,1}_t}\, e^{\sigma_{22}W^{Q,2}_t}$$

$$V_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^Q[S^1_T(S^2_T - K)] = e^{-rT}\{\mathbb{E}^Q[S^1_T S^2_T] - K\,\underbrace{\mathbb{E}^Q[S^1_T]}_{S^1_0 e^{rT}}\}$$

in quanto Q è una misura martingala

Calcoliamo

$$\mathbb{E}^Q[S^1_T S^2_T] = S^1_0 S^2_0 e^{(2r - \sigma^2_{11}/2 - \sigma^2_{12}/2 - \sigma^2_{13}/2 - \sigma^2_{21}/2 - \sigma^2_{22}/2)T}\,\mathbb{E}^Q\left[e^{(\sigma_{11}+\sigma_{21})W^{1,Q}_T} e^{(\sigma_{12}+\sigma_{22})W^{2,Q}_T} e^{\sigma_{13}W^{3,Q}_T}\right]$$

essendo i moti browniani indipendenti

$$= \quad '' \quad '' \quad '' \quad \underbrace{\mathbb{E}^Q\left[e^{(\sigma_{11}+\sigma_{21})W^{1,Q}_T}\right]}\,\underbrace{\mathbb{E}^Q\left[e^{(\sigma_{12}+\sigma_{22})W^{2,Q}_T}\right]}\,\underbrace{\mathbb{E}^Q\left[e^{\sigma_{13}W^{3,Q}_T}\right]}$$

ora utilizzando che $W^{1,Q}_T \sim W^{2,Q}_T \sim W^{3,Q}_T \sim \sqrt{T}N \Rightarrow e^{\frac{(\sigma_{11}+\sigma_{21})^2}{2}T}\quad e^{\frac{(\sigma_{12}+\sigma_{22})^2}{2}T}\quad e^{\frac{\sigma^2_{13}}{2}T}$

Svolgendo i quadrati e semplificando si ottiene che:

$$\mathbb{E}^Q[S^1_T S^2_T] = S^1_0 S^2_0 e^{2rT} e^{\sigma_{11}\sigma_{21}T} e^{\sigma_{12}\sigma_{22}T}$$

$$\Rightarrow \quad V_0 = S^1_0 S^2_0 e^{(r + \sigma_{11}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22})T} - K S^1_0$$

3) $P_0(0,T) = 100\, e^{-rT} = 97\,€$ prezzo ZCB free-defaultable

(i) $\tau \sim \exp(\lambda^{Q})$

$P_{RT}(0,T) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}\left[100\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + \underbrace{100(1-\delta)}_{60}\, \mathbb{1}_{\{\tau \le T\}}\right] =$

$Q(\tau \le T) = 1 - e^{-\lambda^{Q} T}$

$Q(\tau > T) = e^{-\lambda^{Q} T}$

$= e^{-rT}\left\{100\, \underbrace{Q(\tau > T)}_{e^{-\lambda^{Q}T}} + 60\, \underbrace{Q(\tau \le T)}_{1-e^{-\lambda^{Q}T}}\right\} = e^{-rT}\left\{40\, e^{-\lambda^{Q}T} + 60\right\} = 90$

$P_{RT}(0,T) = \underbrace{100\, e^{-rT}}_{97}\left\{0.4\, e^{-\lambda^{Q}T} + 0.6\right\} = 90$ $\qquad 0.4\, e^{-\lambda^{Q}T} + 0.6 = \frac{90}{97}$

$e^{-\lambda^{Q}T} = \frac{1}{0.4}\frac{90}{97} - \frac{0.6}{0.4}$ $\qquad \lambda^{Q} = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{1}{0.4}\frac{90}{97} - \frac{0.6}{0.4}\right) = 0.1989$

0.819587€

2.319587

$T = 1$ anno

(ii) $P_{RT}(0,T) = 90\,€$ $\quad \overline{P_{RT}}(0,T) = 87\,€$ La seconda istituzione ha un'intensità di default maggiore in quanto il prezzo del DZCB è minore

Il rendimento di A: $P_{RT}(0,T) = 90 = 100\, e^{-R_A T}$ $\qquad \overline{P_{RT}}(0,T) = 87 = 100\, e^{-R_B T}$

$\frac{\overline{P_{RT}}(0,T)}{P_{RT}(0,T)} = \frac{87}{90} = e^{-(R_B - R_A)T}$ Il credit spread tra B ed A è dato da $R_B - R_A = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{87}{90}\right) = 0.034$

Differenza di rendimento è pari al 3.4%. (3.4 punti base)

$\lambda^{Q} = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{1}{0.4}\frac{87}{97} - \frac{0.6}{0.4}\right) = 0.2980 > 0.1989$