Scritto del 24 febbraio 2021
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

1.

Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes, ossia soluzione della EDS

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0,$$

con μ (rendimento atteso), e $\sigma > 0$ (volatilitá) costanti. Si indichi con $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente.

(i) Determinare il prezzo $v_n(t,x)$ (al tempo $t \in [0,T]$ se $S_t = x$) del derivato di payoff finale

$$F(S_T) = (S_T)^{\frac{1}{n}}, \quad n = 1, 2, ..$$

(ii) Applicare la formula di Ito per determinare la dinamica del processo $Y_t = (S_t)^{\frac{1}{n}}$.

É un moto browniano geometrico? In caso affermativo determinare tasso di rendimento atteso e volatilitá.

(iii) [**Facoltativo**] Costruire un portafoglio Γ-neutrale negoziando i derivati di prezzo $v_2(t,x)$ e $v_3(t,x)$.

2.

Siano $\{S_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$ i prezzi di due azioni descritti dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1 + \sigma_{12} dW_t^2), \quad S_0^1 > 0.$$

$$dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_{21} dW_t^1 + \sigma_{22} dW_t^2), \quad S_0^2 > 0.$$

con μ_i, $i = 1, 2$ e $\sigma_{ij} > 0$ costanti, $\{W_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, moti browniani indipendenti. Considerare un mercato finanziario costituito dai 2 titoli ed il bond con tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.

(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente e di mercato completo;

(ii) Determinare le misure martingala equivalenti. Il mercato é libero da arbitraggi? é completo o incompleto? (giustificare le risposte)

(iii) Nel caso in cui il mercato sia libero da arbitraggi e completo, calcolare il prezzo, al tempo $t = 0$, del derivato di payoff finale

$$F(S_T^1, S_T^2) = S_T^1 S_T^2.$$

[**Suggerimento:** scrivere $S_t^i = S_0^i e^{(r - \frac{\sigma_{i1}^2}{2} - \frac{\sigma_{i2}^2}{2})t + \sigma_{i1} W_t^{1,Q} + \sigma_{i2} W_t^{2,Q}}$, $i = 1, 2$].

(iv) In quale circostanza $Y_T = S_T^1 S_T^2$ ha rendimento atteso $2r$?

3.

Sia Q una misura neutrale al rischio e τ_A il tempo di default dell'istituzione finanziaria A. Sia $q_A = Q(\tau_A \leq T) = 0,2$ e $r = 3\%$ il tasso d'interesse composto continuamente.

a) Determinare il prezzo $p_A(0,T)$ di un DZCB con recovery alla scadenza pari al 30% di valore nominale 100 euro e maturitá $T = 1$ anno emesso da A.

b) Il prezzo $p_B(0,T)$ di un analogo DZCB emesso dall'istituzione B é pari a 80 euro. Determinare la la probabilitá di default q_B di B. Quale dei due DZCB é piú rischioso?

Titoli Derivati e Gestione del Rischio II

SCRITTO DEL 24/02/2021 Prof.sse Claudia Ceci

1) $S_t = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t^Q}$

Q = misura martingale equivalente

$\{W_t^Q\}$ Q - moto browniano

$$v_n(t,x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q\left[(S_T)^{1/n} \mid S_t = x \right] = \qquad S_T = S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q)}$$

$$= e^{-r(T-t)} x^{1/n} e^{\frac{1}{n}(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \mathbb{E}^Q\left[e^{\frac{\sigma}{n}(W_T^Q - W_t^Q)} \right]$$

$$\mathbb{E}\left[e^{\frac{\sigma}{n}\sqrt{T-t}\, N} \right] = e^{\frac{\sigma^2}{2n^2}(T-t)}$$

$$\Rightarrow v_n(t,x) = x^{1/n} e^{\left\{ r\left(\frac{1}{n}-1\right) + \left(-\frac{\sigma^2}{2n} + \frac{\sigma^2}{2n^2}\right) \right\}(T-t)} = x^{1/n} e^{\left\{ -\frac{n-1}{n} r - \frac{n-1}{2n^2}\sigma^2 \right\}(T-t)}$$

$$v_n(t,x) = x^{1/n} e^{-\frac{n-1}{n}\left(r + \frac{\sigma^2}{2n}\right)(T-t)}$$

(ii) $Y_t = S_t^{\frac{1}{n}}$ formula di Itô: $df(S_t) = f'(S_t)\,dS_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f''(S_t)\,dt$

$f(x) = x^{1/n}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

$f''(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right) x^{\frac{1}{n}-2}$

$$dY_t = \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right) S_t^{\frac{1}{n}-2}\,dt + \frac{1}{2n} S_t^{\frac{1}{n}-1} S_t(\mu\,dt + \sigma\,dW_t)$$

$$dY_t = Y_t\left\{ \left(\frac{\mu}{n} + \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\sigma^2\right)dt + \frac{\sigma}{2n}\,dW_t \right\}$$

moto browniano geometrico con rendimento atteso $\mu_n = \frac{\mu}{n} + \frac{1}{2n}\left(\frac{1-n}{n}\right)\sigma^2$ e volatilità $\sigma_n = \frac{\sigma}{2n}$

Rispetto a Q il rendimento atteso è $\frac{r}{n} + \frac{1}{2n}\frac{n-1}{n}\sigma^2$

$\Rightarrow \mathbb{E}^Q(Y_T) = e^{\left(\frac{r}{n} - \frac{1}{2n}\frac{n-1}{n}\sigma^2\right)T}$ $\Rightarrow e^{-rT}\mathbb{E}^Q(Y_T) = e^{\left\{\left(\frac{1}{n}-1\right)r - \frac{1}{2n}\frac{n-1}{n}\sigma^2\right\}T}$ e questo valore è coerente con il calcolo sopra ottenuto

(iii) $V(t,x) = \alpha_1 x + \beta_1 v_2(t,x) + \beta_2 v_3(t,x)$

$v_2(t,x) = \sqrt{x}\; e^{-\frac{1}{2}\left(r+\frac{\sigma^2}{4}\right)(T-t)}$ $\qquad v_3(t,x) = x^{\frac{1}{3}}\; e^{-\frac{2}{3}\left(r+\frac{\sigma^2}{6}\right)(T-t)}$

$\Delta_{v_2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(r+\frac{\sigma^2}{4}\right)(T-t)}$ $\qquad \Delta_{v_3}(t,x) = \frac{1}{3}\, x^{\frac{1}{3}-1}\, e^{-\frac{2}{3}\left(r+\frac{\sigma^2}{6}\right)(T-t)}$

$\Gamma_{v_2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(r+\frac{\sigma^2}{4}\right)(T-t)}$ $\qquad \Gamma_{v_3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right) x^{\frac{1}{3}-2}\, e^{-\frac{2}{3}\left(r+\frac{\sigma^2}{6}\right)(T-t)}$

$-\frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \frac{-3+8}{24}$

$\Gamma_V = \beta_1 \Gamma_{v_1} + \beta_2 \Gamma_{v_3} = 0$ $\qquad \beta_2 = -\beta_1 \frac{\Gamma_{v_1}}{\Gamma_{v_3}}$

Scelgo $\beta_1 = 1$ $\Rightarrow \beta_2 = -\frac{-\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(r+\frac{\sigma^2}{4}\right)(T-t)}}{-\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} e^{-\frac{2}{3}\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}} = -\frac{9}{8} x^{\frac{1}{6}}\, e^{\frac{1}{6} r (T-t)}\, e^{\frac{5}{24}\sigma^2(T-t)}$

$\Rightarrow$ ~~Impongo ora che sia Δ-neutrale~~

$\cancel{\Delta_V = \alpha_1 + \Delta_{v_2} + \beta_2 \Delta_{v_3} = 0} \Rightarrow \cancel{\alpha_1 = -\Delta_{v_2} + \beta_2 \Delta_{v_3}}$

$\cancel{\alpha_1 = -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\frac{1}{2}\left(r+\frac{\sigma^2}{4}\right)(T-t)} + \frac{3}{8} x^{-\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{6}} e^{\frac{1}{6} r(T-t)} e^{-\frac{2}{3} r(T-t)} \cdot e^{-\frac{\sigma^2}{9}(T-t)} e^{\frac{5}{24}\sigma^2(T-t)}}$

a) $$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1(\mu_1\,dt + \sigma_{11}\,dW_t^1 + \sigma_{12}\,dW_t^2) \\ dS_t^2 = S_t^2(\mu_2\,dt + \sigma_{21}\,dW_t^1 + \sigma_{22}\,dW_t^2) \end{cases}$$

(i) Vedi compiti precedenti

(ii) ogni misura martingala è individuata dai prezzi di mercato del rischio $\theta = \begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}$

soluzioni del sistema lineare

$$\underline{\sigma}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu_1 - r\\ \mu_2 - r\end{pmatrix} \qquad \underline{\sigma} = \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{pmatrix}$$

1) Se $\det\sigma = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21} \neq 0$ allora per il teorema di Cramer $\exists!$ soluzione

$$\begin{cases} \sigma_{11}\theta_1 + \sigma_{12}\theta_2 = \mu_1 - r \\ \sigma_{21}\theta_1 + \sigma_{22}\theta_2 = \mu_2 - r \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\begin{vmatrix}\mu_1 - r & \sigma_{12}\\ \mu_2 - r & \sigma_{22}\end{vmatrix}}{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21}} = \dfrac{\sigma_{22}(\mu_1 - r) - \sigma_{12}(\mu_2 - r)}{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21}} \\[2ex] \theta_2 = \dfrac{\begin{vmatrix}\sigma_{11} & \mu_1 - r\\ \sigma_{21} & \mu_2 - r\end{vmatrix}}{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21}} = \dfrac{\sigma_{11}(\mu_2 - r) - \sigma_{21}(\mu_1 - r)}{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21}} \end{cases}$$

per il I ed il II teorema fondamentale dell'asset pricing poiché $\exists!\ Q$ il mercato è libero da arbitraggi e completo.

2) Se $\det\sigma = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21} = 0$

$$\sigma_{11}\sigma_{22} = \sigma_{12}\sigma_{21}$$

$$\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{21}} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}$$

$\mathrm{rg}\,\underline{\sigma} = 1$ per Rouché-Capelli affinché il sistema ammetta soluzioni il rango della matrice completa deve essere 1 $\mathrm{rg}\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \mu_1 - r\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \mu_2 - r\end{pmatrix} = 1$

$$\begin{vmatrix}\sigma_{11} & \mu_1 - r\\ \sigma_{21} & \mu_2 - r\end{vmatrix} = 0 \quad e \quad \begin{vmatrix}\sigma_{12} & \mu_1 - r\\ \sigma_{22} & \mu_2 - r\end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma_{11}(\mu_2 - r) - \sigma_{21}(\mu_1 - r) = 0 \quad e \quad \sigma_{12}(\mu_2 - r) - \sigma_{22}(\mu_1 - r) = 0$$

(questa seconda condizione è equivalente alla prima)

Se $\text{Det}\,\sigma = 0$ e $\frac{\mu_2 - r}{\sigma_{21}} = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}}$ il sistema ammette soluzioni : ∞^1 - soluzioni

il mercato non ammette arbitraggi ma è incompleto

Se $\text{Det}\,\sigma = 0$ e $\frac{\mu_2 - r}{\sigma_{21}} \neq \frac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}}$ il sistema non ammette soluzioni:

il mercato ammette arbitraggi

(iv)

$$Y_0 = e^{-rT}\,\mathbb{E}^{Q}[S_T^1 S_T^2] = e^{-rT} S_0^1 S_0^2\, e^{(r - \sigma_{11}^2/2 - \sigma_{12}^2/2)T}\, e^{(r - \sigma_{21}^2/2 - \sigma_{22}^2/2)T}\, \mathbb{E}^{Q}\left[e^{(\sigma_{11}+\sigma_{21})W_T^{1,Q}} \cdot e^{(\sigma_{12}+\sigma_{22})W_T^{2,Q}}\right]$$

$W^{1,Q}$ e $W^{2,Q}$ sono indipendenti $\Longrightarrow$ $\mathbb{E}^{Q}\left[e^{(\sigma_{11}+\sigma_{21})W_T^{1Q}}\right]\mathbb{E}^{Q}\left[e^{(\sigma_{12}+\sigma_{22})W_T^{2Q}}\right]$

$$= \mathbb{E}^{Q}\left[e^{(\sigma_{11}+\sigma_{21})\sqrt{T}N}\right]\mathbb{E}^{Q}\left[e^{(\sigma_{12}+\sigma_{22})\sqrt{T}N}\right]$$

$$W_T^{Q} - W_t^{Q} \sim \sqrt{T-t}\,N$$
$$N \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$= e^{\frac{(\sigma_{11}+\sigma_{21})^2}{2}T}\, e^{\frac{(\sigma_{12}+\sigma_{22})^2}{2}T}$$

$$\Rightarrow Y_0 = S_0^1 S_0^2\, e^{rT}\, e^{(\sigma_{11}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22})T}$$

(v)

In quale circostanza $Y_t = S_t^1 S_t^2$ ha rendimento atteso $2r$?

$$\mathbb{E}^{Q}[S_T^1 S_T^2] = S_0^1 S_0^2\, e^{2rT}\, e^{(\sigma_{11}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22})T}$$

Nel caso in cui $\sigma_{11}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22} = 0$ per esempio se $\sigma_{21} = 0 = \sigma_{12}$ $\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1) \\ dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_{22} dW_t^2) \end{cases}$

oppure se $\sigma_{11} = 0 = \sigma_{22}$ $\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_{12} dW_t^2) \\ dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_{21} dW_t^1) \end{cases}$

ossia nel caso in cui i prezzi dei titoli siano indipendenti

3) $q = \mathbb{Q}(\tau_A \le T) = 0.2 \qquad r = 3\% \qquad 1-\delta = 0.3 \quad \Rightarrow \quad \delta = 0.7$

(a)

$$P_A(0,T) = e^{-rT}\left[100\,\mathbb{1}_{\{\tau_A > T\}} + 30\,\mathbb{1}_{\{\tau_A \le T\}}\right] =$$

$$= e^{-rT}\left\{100\,\underbrace{\mathbb{Q}(\tau_A > T)}_{1-q_A} + 30\,\underbrace{\mathbb{Q}(\tau_A \le T)}_{q_A = 0.2}\right\} = e^{-rT}\left\{100 - 70\,q_A\right\} = 83.46\,€$$

(b)

$P_B(0,T) = 80\,€ < P_A(0,T) \quad \Rightarrow$ il DZCB emesso da B è più rischioso di quello emesso da A, in quanto ha un rendimento maggiore: a parità di rimborso alla scadenza costa di meno

Dalla relazione $\quad P_B(0,T) = x\,e^{-rT}\left\{1 - \delta q_B\right\} \qquad P_0(0,T) = 100\,e^{-0.03} = 97\,€$

free-default ZCB

$$\Rightarrow \quad \frac{P_B(0,T)}{P_0(0,T)} = 1 - \delta q_B \quad \Rightarrow \quad q_B = \frac{1}{\delta}\left(1 - \frac{P_B(0,T)}{P_0(0,T)}\right) = \frac{1}{0.7}\left(1 - \frac{80}{97}\right) = 0.25$$

$$q_B = 0.25 > q_A = 0.20$$

$$\Downarrow$$

il DZCB emesso da B è più rischioso di quello emesso da A