Scritto del 4 febbraio 2021
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

1.
Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes, ossia soluzione della EDS

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0,$$

con μ (rendimento atteso), e $\sigma > 0$ (volatilitá) costanti. Si indichi con $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente.
(i) Determinare il prezzo $v(t,x)$ (al tempo $t \in [0,T]$ se $S_t = x$) del derivato di payoff finale $F(S_T) = 10I_{\{S_T > S_0\}}$.
(ii) Calcolare il Delta del portafoglio di copertura.
(iii) [**Facoltativo**: Se il prezzo dell'azione cresce, la quota in azioni del portafoglio di copertura, cresce o decresce?]

2.
Siano $\{S_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1,2$, i prezzi di due azioni descritti dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1 + \sigma_{12} dW_t^2), \quad S_0^1 > 0.$$

$$dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_{22} dW_t^2 + \sigma_{23} dW_t^3), \quad S_0^2 > 0.$$

con μ_i, $i = 1,2$ e $\sigma_{ij} > 0$ costanti, $\{W_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1,2,3$, moti browniani indipendenti. Considerare un mercato finanziario costituito dai 2 titoli ed il bond con tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.
(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente e di mercato completo;
(ii) Determinare le misure martingala equivalenti. Il mercato é libero da arbitraggi? é completo o incompleto? (giustificare le risposte)
(iii) É possibile aggiungere un terzo titolo affinché il mercato risulti completo?
(iv) Calcolare il prezzo, al tempo $t = 0$, del derivato di payoff finale

$$F(S_T^1, S_T^2) = \frac{S_T^1}{S_T^2}.$$

[**Suggerimento:** scrivere $S_t^1 = S_0^1 e^{(r - \frac{\sigma_{11}^2}{2} - \frac{\sigma_{12}^2}{2})t + \sigma_{11} W_t^{1,Q} + \sigma_{12} W_t^{2,Q}}$ e $S_t^2 = S_0^2 e^{(r - \frac{\sigma_{22}^2}{2} - \frac{\sigma_{23}^2}{2})t + \sigma_{22} W_t^{2,Q} + \sigma_{23} W_t^{3,Q}}$].

3.
Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente.
(i) Determinare il prezzo $p_{RT}(0,T)$ di un DZCB con recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta$, di valore nominale x e maturitá T.
(ii) Sia oggi il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 100 euro, maturitá $T = 2$ anni, pari a $p_0 = 98$ euro e quello di un DZCB, di stesso valore nominale e maturitá, con $\delta = 50\%$ pari a $p_{RT} = 90$ euro. Determinare l'intensitá di default λ dell'istituzione finanziaria.
(iii) Determinare il prezzo $p_{FV}(0,T)$ di un DZCB con recovery face value (pagato al default) pari a $1 - \delta$, di valore nominale x e maturitá T.
(iii) Calcolare $p_{FV}(0,T)$ di valore nominale 100 euro, maturitá $T = 2$ anni e $\delta = 50\%$. Questo valore é coerente con quello del p_{RT} del punto precedente?

Titoli Derivati e Gestione del Rischio II 04/02/2021

1) $F(S_T) = 10\, \mathbb{1}_{\{S_T > S_0\}}$

(i)

$$v(t,x) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[10\, \mathbb{1}_{\{S_T > S_0\}} \mid S_t = x \right] =$$

$$= 10\, e^{-r(T-t)}\, \mathbb{Q}\left(S_T > S_0 \mid S_t = x \right)$$

$$= 10\, e^{-r(T-t)}\, \mathbb{Q}\left(x\, e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})} > S_0 \right)$$

$$= 10\, e^{-r(T-t)}\, \mathbb{Q}\left((r-\tfrac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}}) > \ln \frac{S_0}{x} \right)$$

$$= 10\, e^{-r(T-t)}\, \mathbb{Q}\left(\sigma\sqrt{T-t}\, N > \ln\left(\frac{S_0}{x}\right) - (r-\tfrac{\sigma^2}{2})(T-t) \right)$$

$$= 10\, e^{-r(T-t)}\, \mathbb{Q}\left(N > \frac{\ln(S_0/x) - (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)$$

$$v(t,x) = 10\, e^{-r(T-t)}\, \Phi\left(\frac{\ln(\frac{x}{S_0}) + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)$$

$\mathbb{Q}$ misura-mg equivalente

$S_t = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t}\, e^{\sigma(W_t^{\mathbb{Q}}}$

$\{W_t^{\mathbb{Q}}\}$ $\mathbb{Q}$-moto browniano

$\Downarrow$

$S_T = S_t\, e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})}$

$W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}} \sim \mathcal{N}(0, T-t)$

$W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}} \sim \sqrt{T-t}\, N$

$\mathbb{Q}(N > x) = \mathbb{Q}(N < -x) = \Phi(-x$

e tenendo conto che

$-\ln\left(\frac{S_0}{x}\right) = \ln\left(\frac{x}{S_0}\right)$

(ii) Il delta del portafoglio di copertura $\Delta(t,x) = \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\Delta(t,x) = 10\, e^{-r(T-t)}\, \Phi'\left(\frac{\ln(x/S_0) + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\ln(x/S_0) + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)}_{\frac{1}{x\sigma\sqrt{T-t}}}$$

osserviamo che

$\ln(x/S_0) = \ln x - \ln S_0$

Sia $d_2(t,x) = \dfrac{\ln\left(\frac{x}{S_0}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

$$\Delta(t,x) = \frac{10\, e^{-r(T-t)}}{x\,\sigma\sqrt{T-t}}\, \Phi'(d_2(t,x)) \qquad \text{ove} \qquad \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$ è la densità delle gaussiane

(iii) Se il prezzo dell'azione sale la quota in azioni nel portafoglio di copertura aumenta o diminuisce?

Si tratta di capire se $\Delta(t,x)$ è una funzione crescente o decrescente di x per $x>0$.

Per $x>0$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ decresce in x, $\quad d_2(t,x)$ cresce in x $\Rightarrow$ $\Phi'(d_2(t,x))$ decresce in x

$\frac{1}{x}$ decresce in x

$\Rightarrow$ $\Delta(t,x)$ funzione decrescente di x $\Rightarrow$ se il prezzo sale la quota in azioni diminuisce

2)
$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1\left(\mu_1\, dt + \sigma_{11}\, dW_t^1 + \sigma_{12}\, dW_t^2\right) \\ dS_t^2 = S_t^2\left(\mu_2\, dt + \sigma_{22}\, dW_t^2 + \sigma_{23}\, dW_t^3\right) \end{cases}$$

Q è una misura mg equivalente per il mercato finanziario se

$Q \sim P$ ossia $Q(A)=0 \Leftrightarrow P(A)=0$

e $S_t^1 e^{-rt}$ e $S_t^2 e^{-rt}$ sono Q-mg

$$E^Q\left[S_t^i e^{-rt} \mid \mathcal{F}_s\right] = S_s^i e^{-rs}$$
$$\forall t > s$$

Determiniamo le misure martingale equivalenti:

ogni misura Q^θ è individuata dai prezzi di mercato del rischio $\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix}$

soluzioni del sistema lineare

$$\underline{\sigma}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu_1 - r\\ \mu_2 - r\end{pmatrix} \qquad \underline{\sigma} = \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & 0\\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23}\end{pmatrix}$$

$rg(\underline{\sigma}) = rg(\underline{\sigma}, \underline{\mu} - \underline{r}) = 2$

per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ammette ∞-soluzioni

$$\begin{cases}\sigma_{11}\theta_1 + \sigma_{12}\theta_2 = \mu_1 - r\\ \sigma_{22}\theta_2 + \sigma_{23}\theta_3 = \mu_2 - r\end{cases} \qquad \begin{cases}\theta_2 \in \mathbb{R}\\ \theta_1 = \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} - \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}\theta_2\\ \theta_3 = \dfrac{\mu_2 - r}{\sigma_{23}} - \dfrac{\sigma_{22}}{\sigma_{23}}\theta_2\end{cases}$$

Per il I teorema fondamentale dell'Asset Pricing il mercato non ammette opportunità di arbitraggi (in quanto esiste almeno una misura mg)

Invece per il II teorema fondamentale dell'Asset Pricing il mercato è incompleto in quanto la misura mg non è unica.

Definizione di mercato completo: è un mercato in cui ogni derivato può essere replicato da una strategia autofinanziante

(iii) Aggiungendo $dS_t^3 = S_t^3(\mu_3\,dt + \sigma_{33}\,dW_t^3)$

$$\Rightarrow \quad \underline{\sigma} = \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & 0\\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ 0 & 0 & \sigma_{33}\end{pmatrix}$$

$\det \underline{\sigma} = \sigma_{11}\cdot\sigma_{22}\cdot\sigma_{33} \neq 0$ per il teorema di Cramer $\exists!\ \underline{\theta} = \begin{pmatrix}\theta^1\\ \theta^2\\ \theta_3\end{pmatrix} \Rightarrow \exists!\ Q$ e dunque il mercato è

3

(iv)

$$v(t,x_1,x_2) = \mathbb{E}^{Q}\left[S_T^1 \cdot (S_T^2)^{-1} \;\middle|\; S_t^1 = x_1,\ S_t^2 = x_2 \right] e^{-r(T-t)}$$

$$S_T^1 = S_t^1\, e^{\left(r - \sigma_{11}^2/2 - \sigma_{12}^2/2\right)(T-t) + \sigma_{11}(W_T^{1Q} - W_t^{1Q}) + \sigma_{12}(W_T^{2Q} - W_t^{2Q})}$$

$$S_T^2 = S_t^2\, e^{\left(r - \sigma_{22}^2/2 - \sigma_{23}^2/2\right)(T-t) + \sigma_{22}(W_T^{2Q} - W_t^{2Q}) + \sigma_{23}(W_T^{3Q} - W_t^{3Q})}$$

$$v(t,x_1,x_2) = e^{-r(T-t)}\,\frac{x_1}{x_2}\, e^{\left(r - \sigma_{11}^2/2 - \sigma_{12}^2/2\right)(T-t)}\, e^{-\left(r - \sigma_{22}^2/2 - \sigma_{23}^2/2\right)(T-t)} \cdot$$

$$\mathbb{E}^{Q}\left[e^{\sigma_{11}(W_T^{1Q} - W_t^{1Q})} \right] \mathbb{E}^{Q}\left[e^{(\sigma_{12}-\sigma_{22})(W_T^{2Q} - W_t^{2Q})} \right] \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-\sigma_{23}(W_T^{3Q} - W_t^{3Q})} \right]$$

[qui abbiamo utilizzato l'indipendenza dei tre moti browniani]

$$W_T^Q - W_t^Q \sim \mathcal{N}(0, T-t) \qquad \mathbb{E}^Q\left[e^{a(W_T^Q - W_t^Q)}\right] = \mathbb{E}^Q\left[e^{a\sqrt{T-t}\,N}\right] = e^{\frac{a^2}{2}(T-t)}$$

$$\sim \sqrt{T-t}\; N \qquad N \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$v(t,x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_2}\, e^{-r(T-t)}\, e^{\left(\sigma_{22}^2/2 + \sigma_{23}^2/2 - \cancel{\sigma_{11}^2/2} - \sigma_{12}^2/2\right)(T-t)}\, e^{\cancel{\sigma_{11}^2/2}(T-t)} \cdot e^{\overset{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - 2\sigma_{12}\sigma_{22}}{(\sigma_{12}-\sigma_{22})^2}/2\,(T-t)}\, e^{\sigma_{23}^2/2\,(T-t)}$$

$$v(t,x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_2}\, e^{-r(T-t)}\, e^{\left(\sigma_{11}^2/2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{23}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}\right)(T-t)}$$

$$v_0 = \frac{S_0^1}{S_0^2}\, e^{-rT}\, e^{\left(\frac{1}{2}\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{23}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}\right)T}$$

3) $\tau \sim \exp(\lambda)$ $\quad \mathbb{Q}(\tau > t) = e^{-\lambda t} \quad t \geq 0$

(i) $P_{RT}(0,T) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[x\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + x(1-\delta)\, \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} \right] =$

recovery è pagato alla scadenza

$= e^{-rT} x \left(\mathbb{Q}(\tau > T) + (1-\delta) \underbrace{\mathbb{Q}(\tau \leq T)}_{1-\mathbb{Q}(\tau > T)} \right)$

$= e^{-rT} x \left(1-\delta + \delta\, \mathbb{Q}(\tau > T) \right)$

$= e^{-rT} x \left(1-\delta + \delta\, e^{-\lambda T} \right)$

(ii) $T = 2$ anni $\quad P_0 = 98 € = 100\, e^{-2r} \quad \delta = 50\% \quad P_{RT} = 90 €$

$90 = 98\,(0.5 + 0.5\, e^{-\lambda T})$ $\qquad \frac{90}{98} = 0.5 + 0.5\, e^{-\lambda T}$

$e^{-\lambda T} = \frac{1}{0.5}\left(\frac{90}{98} - 0.5 \right) = 0.8367$ $\qquad -\lambda T = \ln(0.8367) = -0.178$

$\lambda = -\frac{1}{2}(-0.178) = 0.0891$

(iii) $P_{FV}(0,T) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[x\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} \right] + (1-\delta) x\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\tau}\, \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} \right]$

il recovery è pagato al tempo di default

$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\tau}\, \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} \right] = \int_0^T e^{-rt} \underbrace{\lambda e^{-\lambda t}}_{\text{densità esponenziale}} dt = \int_0^T \lambda\, e^{-(r+\lambda)t}\, dt =$

$= -\frac{\lambda}{r+\lambda} e^{-(r+\lambda)t} \Big|_0^T = -\frac{\lambda}{r+\lambda}\left(e^{-(r+\lambda)T} - 1 \right)$

$\Rightarrow \quad P_{FV}(0,T) = x\, e^{-(r+\lambda)T} + x(1-\delta) \frac{\lambda}{r+\lambda}\left(1 - e^{-(r+\lambda)T} \right)$

(iv) Il P_{FV} vale di più del P_{RT} perché in caso di default permette di recuperare prima della scadenza.

5

Determiniamo r : $98 = 100\, e^{-2r}$ $\qquad e^{-2r} = \frac{98}{100}$ $\qquad -2r = \ln\left(\frac{98}{100}\right)$

$$r = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{98}{100}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{100}{98}\right) = 0.0101$$

$$\Rightarrow P_{FV} = 100\, e^{-(0.0101+0.0891)\cdot 2} + 100\,\frac{1}{2}\,\frac{0.0891}{0.0101+0.0891}\left(1 - e^{-(0.0101+0.0891)\cdot 2}\right)$$

oppure si può calcolare così più facilmente

$$P_{FV} = \underbrace{98}_{P_0} \cdot \underbrace{0.8367}_{e^{-\lambda T}} + 50\,\frac{0.0891}{0.0992}\left(1 - \underbrace{0.98}_{e^{-rT}} \cdot \underbrace{0.8367}_{e^{-\lambda T}}\right)$$

$$P_{FV} = 81.9966 + 8.0852 = 90.082\ € > P_{RT} = 90\ €$$