Scritto del 25 settembre 2020
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

1. Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes, ossia soluzione della equazioni differenziali stocastica (EDS)

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0,$$

con μ (rendimento atteso), e $\sigma > 0$ (volatilitá) costanti. Si indichi con $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente.
(i) Mostrare che la soluzione dell'equazione é data dal processo stocastico

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}.$$

(**Suggerimento:** : applicare la formula di Ito per determinare l'EDS che segue il processo $Y_t = \log(S_t)$).
(ii) Determinare il prezzo $v(t,x)$ (al tempo $t \in [0,T]$ se $S_t = x$) del derivato di payoff finale

$$F(S_T) = (S_T)^{\frac{1}{4}}.$$

(iii) Verificare che $v(t,x)$ verifica l'equazione di valutazione di Black & Scholes.
(iv) Un investitore ha venduto 100 derivati determinare la quota in azioni da detenere nel portafoglio di copertura.

2. Siano $\{S^i_t\}_{t\geq 0}$, $i = 1,2$, i prezzi di due azioni descritti dalle seguenti EDS:

$$dS^1_t = S^1_t(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW^1_t + \sigma_{13} dW^3_t), \quad S^1_0 > 0.$$

$$dS^2_t = S^2_t(\mu_2 dt + \sigma_{21} dW^1_t + \sigma_{22} dW^2_t), \quad S^2_0 > 0.$$

con μ_i, $i = 1,2$ e $sigma_{11} > 0$, $\sigma_{13} > 0$, $\sigma_{21} > 0$, $\sigma_{22} > 0$ costanti, $\{W^i_t\}_{t\geq 0}$, $i = 1,2,3$, moti browniani indipendenti. Considerare un mercato finanziario costituito da i due titoli ed il bond con tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.
(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente e di mercato completo;
(ii) Determinare le misure martingala equivalenti. Il mercato é libero da arbitraggi? é completo o incompleto? (giustificare le risposte)
(iii) Sia Q una misura martingala equivalente, scrivere la dinamica di $\{S^i_t\}_{t\geq 0}$, $i = 1,2$, rispetto a Q, e calcolare il prezzo v_0, al tempo $t = 0$, del derivato di payoff finale

$$F(S^1_T, S^2_T) = S^1_T S^2_T + 10.$$

(**Suggerimento:** scrivere

$$S^1_t = S^1_0 e^{(r - \frac{\sigma^2_{11}}{2} - \frac{\sigma^2_{12}}{2})t + \sigma_{11} W^{1,Q}_t + \sigma_{13} W^{3,Q}_t}, \quad S^2_t = S^2_0 e^{(r - \frac{\sigma^2_{21}}{2} - \frac{\sigma^2_{22}}{2})t + \sigma_{21} W^{1,Q}_t + \sigma_{22} W^{2,Q}_t}).$$

3. Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Sia la probabilitá di default $q = Q(\tau \leq T) = 0,15$ con $T = 1$ anno e il prezzo oggi di uno ZCB privo di rischio di maturitá $T = 1$ e valore nominale 100 euro anno pari a 95 euro.
(i) Calcolare il prezzo oggi di DZCB con recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta = 30\%$, di valore nominale 100 euro e maturitá T.
(ii) Calcolare il prezzo oggi di un DZCB con recovery nullo e valore nominale 100$ e maturitá $T = 2$ anni.
(iii) Calcolare il prezzo al tempo $t = 0$ di un defaultable coupon bond (senza recovery) emesso dalla stessa istituzione finanziaria di valore nominale 100 euro, maturitá $T = 2$ anni, che paga cedole annuali pari a 10 euro.

Titoli derivati e gestione del rischio 2 prof.sse Claudia Ceci

Scritto del 25/09/2020

i) $dS_t = S_t(\mu\,dt + \sigma\,dW_t)$

formula di Itô $\quad df(S_t) = f''(S_t)\,\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\,dt + f'(S_t)\,dS_t$

$Y_t = \ln S_t \qquad f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$dY_t = -\frac{1}{\cancel{S_t^2}}\,\frac{1}{2}\sigma^2 \cancel{S_t^2}\,dt + \frac{1}{S_t} S_t(\mu\,dt + \sigma\,dW_t) = (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\,dt + \sigma\,dW_t$$

$$\Rightarrow \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\,ds + \int_0^t \sigma\,dW_s = Y_0 + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t$$

$$\ln S_t - \ln S_0 = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t \quad \Rightarrow \quad S_t = S_0\, e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

ii) Per la valutazione neutrale al rischio:

$$v(t,x) = e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^{Q}\left[(S_T)^{1/4} \mid S_t = x\right]$$

ove Q è la misura martingala (o neutrale al rischio) e rispetto a Q

$$S_T = S_t\, e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q)} \quad \Leftarrow \quad S_t = S_0\, e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t^Q} \qquad t \in [0,T]$$

ove r è il tasso d'interesse privo di rischio e $\{W_t^Q\}_{t \geq 0}$ moto browniano rispetto a Q

$$v(t,x) = e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^{Q}\left[\left(S_t\, e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q)}\right)^{1/4} \mid S_t = x\right] =$$

$$= e^{-r(T-t)}\, x^{1/4}\, e^{\frac{1}{4}(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}\;\mathbb{E}^{Q}\left[e^{\frac{1}{4}\sigma\sqrt{T-t}\,N}\right]$$

abbiamo utilizzato che

$W_T^Q - W_t^Q \sim \mathcal{N}(0, T-t)$

$W_T^Q - W_t^Q \sim \sqrt{T-t}\,N \qquad N \sim \mathcal{N}(0,1)$

(iii) Rispetto ad una misura martingala $\mathbb{Q}$ si ha che

$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1 \left(r\, dt + \sigma_{11}\, dW_t^{1,\mathbb{Q}} + \sigma_{13}\, dW_t^{3,\mathbb{Q}} \right) \\ dS_t^2 = S_t^2 \left(r\, dt + \sigma_{21}\, dW_t^{1,\mathbb{Q}} + \sigma_{22}\, dW_t^{2,\mathbb{Q}} \right) \end{cases}$$

$$v_0 = e^{-r \cdot T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_T^1 S_T^2 + 10 \right] = e^{-r \cdot T} \left\{ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_0^1 S_0^2 e^{\left(r - \frac{\sigma_{11}^2}{2} - \frac{\sigma_{13}^2}{2}\right)T} e^{\left(r - \frac{\sigma_{21}^2}{2} - \frac{\sigma_{22}^2}{2}\right)T} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\, e^{\sigma_{11} W_T^{1,\mathbb{Q}}} e^{\sigma_{13} W_T^{3,\mathbb{Q}}} e^{\sigma_{21} W_T^{1,\mathbb{Q}}} e^{\sigma_{22} W_T^{2,\mathbb{Q}}} \right] \right\} + 10\, e^{-r \cdot T}$$

$$= e^{-r(T)} \left\{ 10 + S_0^1 S_0^2 e^{\left(2r - \frac{\sigma_{11}^2}{2} - \frac{\sigma_{13}^2}{2} - \frac{\sigma_{21}^2}{2} - \frac{\sigma_{22}^2}{2}\right)T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{(\sigma_{11} + \sigma_{21}) W_T^{1,\mathbb{Q}}} e^{\sigma_{22} W_T^{2,\mathbb{Q}}} e^{\sigma_{13} W_T^{3,\mathbb{Q}}} \right] \right\}$$

Calcoliamo il valore atteso, poiché $W_T^{1,\mathbb{Q}}$, $W_T^{2,\mathbb{Q}}$ e $W_T^{3,\mathbb{Q}}$ sono indipendenti

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{(\sigma_{11}+\sigma_{21}) W_T^{1,\mathbb{Q}}} e^{\sigma_{22} W_T^{2,\mathbb{Q}}} e^{\sigma_{13} W_T^{3,\mathbb{Q}}} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{(\sigma_{11}+\sigma_{21}) W_T^{1,\mathbb{Q}}} \right] \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma_{22} W_T^{2,\mathbb{Q}}} \right] \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma_{13} W_T^{3,\mathbb{Q}}} \right]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{(\sigma_{11}+\sigma_{21})\sqrt{T} N} \right] \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma_{22}\sqrt{T} N} \right] \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma_{13}\sqrt{T} N} \right]$$

$$= e^{\frac{(\sigma_{11}+\sigma_{21})^2}{2} T} e^{\sigma_{22}^2/2\, T} e^{\sigma_{13}^2/2\, T}$$ andiamo ora a sostituire sopra

$$\Rightarrow v_0 = 10\, e^{-r \cdot T} + S_0^1 S_0^2 e^{r \cdot T} e^{\sigma_{11} \cdot \sigma_{21} \cdot T}$$

Tenendo conto che $\mathbb{E}[e^{aN}] = e^{a^2/2}$

$$v(t,x) = x^{1/4}\, e^{-\frac{3}{4}r(T-t)}\, e^{-\frac{\sigma^2}{8}(T-t)}\, e^{\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{16}(T-t)} = x^{1/4}\, e^{-\left(\frac{3}{4}r + \frac{3}{32}\sigma^2\right)(T-t)}$$

(iii) Eq. di valutazione di Black & Scholes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + r x \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - r v = 0 \\ v(T,x) = x^{1/4} \quad \text{verificata} \end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left(\frac{3}{4}r + \frac{3}{32}\sigma^2\right) v \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{4}\, x^{\frac{1}{4}-1}\, e^{-\left(\frac{3}{4}r + \frac{3}{32}\sigma^2\right)(T-t)} \Rightarrow r x \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{4} r v$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right) x^{\frac{1}{4}-2}\, e^{-\left(\frac{3}{4}r + \frac{3}{32}\sigma^2\right)(T-t)} \Rightarrow \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{3}{32}\sigma^2 v$$

$$\left(\frac{3}{4}r + \frac{3}{32}\sigma^2\right) v + \frac{1}{4} r v - \frac{3}{32}\sigma^2 v - r v = 0 \qquad \text{verificata}$$

(iv) Delta del portafoglio di copertura:

$$\delta(t,x) = \frac{\partial v}{\partial x}(t,x) = \frac{1}{4}\, x^{-3/4}\, e^{-\left(\frac{3}{4}r + \frac{3}{32}\sigma^2\right)(T-t)}$$

è la quota di azioni nel portafoglio di copertura al tempo t se $S_t = x$ per 1 singolo derivato

$\Rightarrow$ quota per 100 derivati è

$$25\, x^{-3/4}\, e^{-\left(\frac{3}{4}r + \frac{3}{32}\sigma^2\right)(T-t)} \quad \text{ove} \quad S_t = x$$

2) $\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1 (\mu_1 \, dt + \sigma_{11} \, dW_t^1 + \sigma_{13} \, dW_t^3) & S_0^1 > 0 \\ dS_t^2 = S_t^2 (\mu_2 \, dt + \sigma_{21} \, dW_t^1 + \sigma_{22} \, dW_t^2) & S_0^2 > 0 \end{cases}$

i) Q è una misura martingala equivalente per il mercato finanziario se

- $Q(A) = 0 \iff P(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$
- $\tilde{S}_t^i = e^{-rt} S_t^i \quad i = 1,2$ i prezzi scontati dei titoli sono martingale come

$$\mathbb{E}^Q [\tilde{S}_t^i \mid \mathcal{F}_s] = \tilde{S}_s^i \quad \forall t \geq s \iff \mathbb{E}^Q [S_t^i \mid \mathcal{F}_s] = S_s^i e^{r(t-s)}$$

rispetto a Q il rendimento dei titoli è r.

Il mercato è completo se ogni derivato può essere replicato da una strategia autofinanziante.

Per il I Teorema fondamentale dell'Asset Pricing un mercato è libero d'arbitraggi $\iff \exists \, Q$ misura martingala

Per il II " " " " libero d'arbitraggi è completo

$\Updownarrow$

$\exists! \, Q$ misura martingala

ii) Per determinare le misure martingala dobbiamo calcolare il vettore prezzi di mercato del rischio $\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$ che è soluzione di

$$\sigma \underline{\theta} = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \sigma_{11} \theta_1 + \sigma_{13} \theta_3 = \mu_1 - r \\ \sigma_{21} \theta_1 + \sigma_{22} \theta_2 = \mu_2 - r \end{cases} \qquad \text{2 eq. in 3 incognite}$$

$\operatorname{rg} \sigma = 2$ essendo $\begin{vmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} = \sigma_{11} \cdot \sigma_{22} \neq 0$ per il teorema di Rouché-Capelli esistono $\infty^{3-2} = \infty^1$ - soluzioni

$$\begin{cases} \theta_1 \in \mathbb{R} \\ \theta_2 = \dfrac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}} - \dfrac{\sigma_{21}}{\sigma_{22}} \theta_1 \\ \theta_3 = \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{13}} - \dfrac{\sigma_{11}}{\sigma_{13}} \theta_1 \end{cases}$$

Ne consegue che il mercato è libero da arbitraggi ma è incompleto perché esistono ∞ misure martingala

3) $Q(\tau > t) = e^{-\lambda t}$ $\quad Q(\tau \le t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad t \ge 0$

$q = Q(\tau \le T) = 0.15 \qquad T = 1$ anno

$P_0 = 100\, e^{-rT} = 95\,€$

i) $P_{RT}(0,T) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^Q\left[100\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + 100(1-\delta)\, \mathbb{1}_{\{\tau \le T\}} \right]$

$$= 100\, e^{-rT} \{ \underbrace{Q(\tau > T)}_{1-q} + \underbrace{(1-\delta)}_{0.30} \underbrace{Q(\tau \le T)}_{q} \} = 100\, e^{-rT} \{ 1 - 0.70\, q \}$$

$$= 95 \{ 1 - 0.70 \cdot 0.15 \} = 85.025\,€$$

ii) $P_1(0,2) = e^{-2r}\, \mathbb{E}^Q\left[100\, \mathbb{1}_{\{\tau > 2\}} \right] = 100\, e^{-2r}\, Q(\tau > 2) = 100\, e^{-2r}\, e^{-2\lambda} = 100\, e^{-2(r+\lambda)}$

Determiniamo r : $100\, e^{-rT} = 95 \qquad T = 1$ anno $\qquad e^{-r} = \frac{95}{100} \qquad r = -\ln\left(\frac{95}{100}\right) = 5.1\,\%$

Determiniamo λ : $\quad Q(\tau \le 1) = 0.15 = 1 - e^{-\lambda}$

$$e^{-\lambda} = 0.85 \qquad \lambda = -\ln(0.85) = 16.3\,\%$$

$P_1(0,2) = 100\, e^{-2(r+\lambda)} = 65.18\,€$

iii) D: CB (senza recovery) $\quad c = 10\,€$ annuali

$T = 2$ anni

oppure

$P_2(0,2) = \underbrace{P_1(0,2)}_{\text{valore del nominale } 65.18} + 10\underbrace{\left[e^{-2\lambda} + e^{-\lambda} \right]}_{\text{valore cedole}}$

$P_2(0,2) = e^{-2r}\, \mathbb{E}^Q\left[110\, \mathbb{1}_{\{\tau > 2\}} + 10\, \mathbb{1}_{\{\tau > 1\}} \right] =$

$$= e^{-2r} \{ 110\, \underbrace{Q(\tau > 2)}_{e^{-2\lambda}} + 10\, \underbrace{Q(\tau > 1)}_{1-q = 0.85} \} = 110\, e^{-2(r+\lambda)} + 10\, e^{-2r} \cdot 0.85$$

$$= 71.699 + 9.033 = 80.73\,€$$