Scritto del 2 luglio 2020
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

1. Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes, ossia soluzione della EDS

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0,$$

con μ (rendimento atteso), e $\sigma > 0$ (volatilitá) costanti. Si indichi con $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente.
(i) Determinare il prezzo $v(t, x)$ (al tempo $t \in [0, T]$ se $S_t = x$) del derivato di payoff finale

$$F(S_T) = \frac{S_0}{100} + (S_T)^{\frac{1}{3}}.$$

(ii) Verificare che $v(t, x)$ verifica l'equazione di valutazione di Black & Scholes.
(iii) Un investitore ha venduto 100 derivati determinare la quota in azioni da detenere nel portafoglio di copertura.

2. Siano $\{S^i_t\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, i prezzi di due azioni descritti dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS^1_t = S^1_t(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW^1_t + \sigma_{12} dW^2_t), \quad S^1_0 > 0.$$

$$dS^2_t = S^2_t(\mu_2 dt + \sigma_{21} dW^1_t + \sigma_{22} dW^2_t), \quad S^2_0 > 0.$$

con μ_i, $i = 1, 2$ e $\sigma_{ij} > 0$, $i = 1, 2$ $j = 1, 2$ costanti, $\{W^i_t\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, moti browniani indipendenti. Considerare un mercato finanziario costituito da i due titoli ed il bond con tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.
(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente e di mercato completo;
(ii) Determinare le misure martingala equivalenti. Il mercato é libero da arbitraggi? é completo o incompleto? (giustificare le risposte)
(iii) Sia Q una misura martingala equivalente, scrivere la dinamica di $\{S^i_t\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, rispetto a Q, e calcolare il prezzo v_0, al tempo $t = 0$, del derivato di payoff finale

$$F(S^1_T, S^2_T) = (S^1_T S^2_T)^{\frac{1}{3}}.$$

(**Suggerimento:** scrivere

$$S^1_t = S^1_0 e^{(r - \frac{\sigma^2_{11}}{2} - \frac{\sigma^2_{12}}{2})t + \sigma_{11} W^{1,Q}_t + \sigma_{12} W^{2,Q}_t}, \quad S^2_t = S^2_0 e^{(r - \frac{\sigma^2_{21}}{2} - \frac{\sigma^2_{22}}{2})t + \sigma_{21} W^{1,Q}_t + \sigma_{22} W^{2,Q}_t}).$$

3. Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente.
i) Determinare il prezzo $p_{RT}(0, T)$ al tempo $t = 0$ di un DZCB con recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta$, di valore nominale x e maturitá T.
ii) Sia oggi il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 100 euro, maturitá $T = 3$ anni, pari a $p_0 = 95$ euro e quello di un DZCB, di stesso valore nominale e maturitá, con $\delta = 70\%$ pari a $p_{RT} = 93$ euro. Determinare l'intensitá di default λ dell'istituzione finanziaria.
iii) Calcolare il prezzo al tempo $t = 0$ di un defaultable coupon bond emesso dalla stessa istituzione finanziaria di valore nominale 100 euro, maturitá $T = 2$ anni, che paga cedole annuali pari a 20 euro.

Scritto di Titoli Derivati e Gestione del Rischio II
CLECM - EF
Prof.ssa Claudia Ceci

[redacted]
2 luglio 2020

1) $dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t) \qquad S_0 > 0$

(i) per la valutazione neutrale al rischio

$$v(t,x) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{Q}[\,F(S_T) \mid S_t = x\,] \qquad F(S_T) = \frac{S_0}{100} + (S_T)^{1/3}$$

Q è la misura neutrale di rischio, ossia tale che rispetto a Q, il titolo ha rendimento atteso r

$$dS_t = S_t(r\, dt + \sigma\, dW_t^{Q}) \qquad \{W_t^{Q}\}\ Q\text{- moto browniano}$$

OSS: $dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t) = S_t\Big(r\, dt + \sigma\big(\underbrace{\tfrac{\mu - r}{\sigma}\, dt + dW_t}_{dW_t^{Q}}\big)\Big) = S_t(r\, dt + \sigma\, dW_t^{Q})$

$$W_t^{Q} = \frac{\mu - r}{\sigma}t + W_t$$

la misura Q è unica in quanto è unico il prezzo di mercato del rischio $\frac{\mu - r}{\sigma}$

Rispetto a Q: $\quad S_t = S_0\, e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t^{Q}}$

$$S_T = S_0\, e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T^{Q}}$$

$$\Rightarrow \quad S_T = S_t\, e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T^{Q} - W_t^{Q})}$$

$$v(t,x) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{Q}\Big[\big(S_t\, e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T^{Q} - W_t^{Q})}\big)^{1/3} \,\Big|\, S_t = x\Big] + e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{Q}\Big[\frac{S_0}{100} \,\Big|\, S_t = x\Big]$$

$$= e^{-r(T-t)}\, x^{1/3}\, e^{\frac{1}{3}(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}\, \mathbb{E}^{Q}\big[e^{\frac{1}{3}\sigma(W_T^{Q} - W_t^{Q})}\big] + e^{-r(T-t)}\frac{S_0}{100}$$

Calcoliamo $\quad \mathbb{E}^{Q}\big[e^{\frac{1}{3}\sigma(W_T^{Q} - W_t^{Q})}\big] = \mathbb{E}\big[e^{\frac{1}{3}\sigma\sqrt{T-t}\, N}\big] = e^{(\frac{1}{3}\sigma\sqrt{T-t})^2/2}$

$W_T^{Q} - W_t^{Q} \sim \mathcal{N}(0, T-t) \qquad W_T^{Q} - W_t^{Q} \sim \sqrt{T-t}\; N \quad$ con $\quad N \sim \mathcal{N}(0,1)\quad$ e

sappiamo che $\quad \mathbb{E}[e^{aN}] = e^{a^2/2}$

$$\Rightarrow \quad v(t,x) = \frac{S_0}{100} e^{-r(T-t)} + x^{\frac{1}{3}} \underbrace{e^{-r(T-t)} \, e^{\frac{1}{3}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} \, e^{\frac{1}{18}\sigma^2 (T-t)}}_{e^{\left(-\frac{2}{3}r - \frac{1}{9}\sigma^2\right)(T-t)}}$$

(ii) Equazione di valutazione di Black & Scholes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + r x \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - r v = 0 \\ v(T,x) = F(x) = \dfrac{S_0}{100} + x^{\frac{1}{3}} \qquad \text{verificata} \end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = r \frac{S_0}{100} e^{-r(T-t)} + \left(\frac{2}{3}r + \frac{1}{9}\sigma^2\right) x^{\frac{1}{3}} e^{\left(-\frac{2}{3}r - \frac{1}{9}\sigma^2\right)(T-t)} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} e^{\left(-\frac{2}{3}r - \frac{1}{9}\sigma^2\right)(T-t)}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}-2} e^{\left(-\frac{2}{3}r - \frac{1}{9}\sigma^2\right)(T-t)}$$

andiamo a sostituire nell'equazione

$$r \frac{S_0}{100} \cancel{e^{-r(T-t)}} + \frac{2}{3} r x^{\frac{1}{3}} e^{\left(-\frac{2}{3}r - \frac{1}{9}\sigma^2\right)(T-t)} + \cancel{\frac{1}{9}\sigma^2 x^{\frac{1}{3}} e^{\left(-\frac{2}{3}r - \frac{1}{9}\sigma^2\right)(T-t)}} + r \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} e^{\left(-\frac{2}{3}r - \frac{1}{9}\sigma^2\right)(T-t)} - \cancel{\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{3}} \sigma^2 e^{\left(-\frac{2}{3}r - \frac{1}{9}\sigma^2\right)(T-t)}}$$

$$- r \frac{S_0}{100} \cancel{e^{-r(T-t)}} - r x^{\frac{1}{3}} e^{\left(-\frac{2}{3}r - \frac{1}{9}\sigma^2\right)(T-t)} = 0$$

$$r x^{\frac{1}{3}} e^{\left(-\frac{2}{3}r - \frac{1}{9}\sigma^2\right)(T-t)} - r x^{\frac{1}{3}} e^{\left(-\frac{2}{3}r - \frac{1}{9}\sigma^2\right)(T-t)} = 0 \qquad \text{verificato}$$

~~2)~~

$$\cancel{dS^1_t = S^1_t\left(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW^1_t + \sigma_{12} dW^2_t\right)}$$

$$\cancel{dS^2_t = S^2_t\left(\mu_2 dt + \sigma_{21} dW^1_t + \sigma_{22} dW^2_t\right)}$$

(iii) $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \delta(t,x)$ se detta ~~[illegible]~~ fornisce la quota in azioni del portafoglio di copertura per ogni derivato venduto

$$\delta(t,x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} e^{\left(-\frac{2}{3}r - \frac{1}{9}\sigma^2\right)(T-t)}$$

al tempo t se $S_t = x$ e' investitore deve detenere $100 \cdot \dfrac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} e^{\left(-\frac{2}{3}r - \frac{1}{9}\sigma^2\right)(T-t)}$ azioni per coprirsi dal rischio

2)
$$\begin{cases} dS^1_t = S^1_t(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW^1_t + \sigma_{12} dW^2_t) \\ dS^2_t = S^2_t(\mu_2 dt + \sigma_{21} dW^1_t + \sigma_{22} dW^2_t) \end{cases}$$

(i) $\mathbb{Q}$ è una misura martingala equivalente per il nostro mercato finanziario se

$\mathbb{Q}(A)=0 \iff \mathbb{P}(A)=0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$ ($\mathbb{Q}$ e $\mathbb{P}$ sono misure di probabilità equivalenti)

$\tilde{S}^i_t = S^i_t e^{-rt}$ $\quad i=1,2$ ed è prezzi scontati dei titoli sono martingale, ossia

$\forall\ t>s \qquad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}^i_t \mid \mathcal{F}_s] = \tilde{S}^i_s$

$\iff \forall\ t>s \qquad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S^i_t \mid \mathcal{F}_s] = S^i_s e^{r(t-s)}$ (rispetto a $\mathbb{Q}$, il rendimento atteso dei titoli è pari ad r)

Il mercato si dice completo se ogni derivato può essere replicato da una strategia autofinanziante.

Per il I teorema dell'asset pricing un mercato è libero da arbitraggi $\iff \exists\ \mathbb{Q}$ misura martingala

Per il II " " un mercato libero da arbitraggi è completo $\iff \exists!\ \mathbb{Q}$ " "

(ii) ~~[illegible]~~ Per determinare le misure martingala dobbiamo determinare il vettore prezzi di mercato del rischio $\theta = \begin{pmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{pmatrix}$ soluzione di $\sigma\underline{\theta} = \begin{pmatrix}\mu_1 - r \\ \mu_2 - r\end{pmatrix}$

$\sigma = \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{pmatrix}$ $\qquad \begin{cases}\sigma_{11}\theta_1 + \sigma_{12}\theta_2 = \mu_1 - r \\ \sigma_{21}\theta_1 + \sigma_{22}\theta_2 = \mu_2 - r\end{cases}$ sistema di 2 equazioni in 2 incognite

Se $\operatorname{Det}\sigma = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21} \neq 0$ allora il sistema ammette una sola soluzione

che posso determinare con il teorema di Cramer

$$\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\begin{vmatrix}\mu_1 - r & \sigma_{12} \\ \mu_2 - r & \sigma_{22}\end{vmatrix}}{\operatorname{Det}\sigma} = \dfrac{(\mu_1 - r)\sigma_{22} - (\mu_2 - r)\sigma_{12}}{\operatorname{Det}\sigma} \\ \theta_2 = \dfrac{\begin{vmatrix}\sigma_{11} & \mu_1 - r \\ \sigma_{21} & \mu_2 - r\end{vmatrix}}{\operatorname{Det}\sigma} = \dfrac{(\mu_2 - r)\sigma_{11} - (\mu_1 - r)\sigma_{21}}{\operatorname{Det}\sigma} \end{cases}$$

Se $\operatorname{Det}\sigma = 0$ $\quad rg\,\sigma = 1$

$$\begin{cases} 1)\ rg\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \mu_1 - r \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \mu_2 - r \end{pmatrix} = 2 & \text{il sistema non ammette soluzioni} \\ 2)\ rg\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \mu_1 - r \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \mu_2 - r \end{pmatrix} = 1 & \text{" ammette } \infty^1 \text{- soluzioni} \end{cases}$$

nel caso 2) si elimina una equazione e si risolve $\sigma_{11}\theta_1 + \sigma_{12}\theta_2 = \mu_1 - r$

$$\begin{cases} \theta_2 \in \mathbb{R} \\ \theta_1 = \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} - \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}\theta_2 \end{cases}$$

Per i teoremi fondamentali dell'asset pricing

$$\begin{cases} \operatorname{Det}\sigma \neq 0 & \text{il mercato è libero d'arbitraggi e completo} \\ \operatorname{Det}\sigma = 0 \quad rg(\text{mat. completa}) = 2 & \text{il mercato ammette arbitraggi} \\ \operatorname{Det}\sigma = 0 \quad rg(\text{mat. completa}) = 1 & \text{il mercato è libero d'arbitraggi ma non è completo} \end{cases}$$

(iii)
Rispetto ad una misura martingala Q:

$$\begin{cases} dS^1_t = S^1_t\left(r\,dt + \sigma_{11}\,dW^{1,Q}_t + \sigma_{12}\,dW^{2,Q}_t\right) \\ dS^2_t = S^2_t\left(r\,dt + \sigma_{21}\,dW^{1,Q}_t + \sigma_{22}\,dW^{2,Q}_t\right) \end{cases}$$

$$S^1_t = S^1_0\, e^{(r - \sigma_{11}^2/2 - \sigma_{12}^2/2)t + \sigma_{11}W^{1,Q}_t + \sigma_{12}W^{2,Q}_t}$$

$$S^2_t = S^2_0\, e^{(r - \sigma_{21}^2/2 - \sigma_{22}^2/2)t + \sigma_{21}W^{1,Q}_t + \sigma_{22}W^{2,Q}_t}$$

$$V_0 = e^{-rT}\,\mathbb{E}^Q\left[(S^1_T S^2_T)^{1/3}\right] = e^{-rT}(S^1_0 S^2_0)^{1/3}\, e^{\frac{1}{3}(r - \sigma_{11}^2/2 - \sigma_{12}^2/2)T}\, e^{\frac{1}{3}(r - \sigma_{21}^2/2 - \sigma_{22}^2/2)T}\,.$$

$$\times \underbrace{\mathbb{E}^Q\left[e^{\frac{1}{3}\sigma_{11}W^{1,Q}_T + \frac{1}{3}\sigma_{12}W^{2,Q}_T + \frac{1}{3}\sigma_{21}W^{1,Q}_T + \frac{1}{3}\sigma_{22}W^{2,Q}_T}\right]}$$

$\{W^{1,Q}_t\}$ e $\{W^{2,Q}_t\}$ sono indipendenti

$$\mathbb{E}^Q\left[e^{\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{21})W^{1,Q}_T}\right]\ \mathbb{E}^Q\left[e^{\frac{1}{3}(\sigma_{12}+\sigma_{22})W^{2,Q}_T}\right]$$

$W^{1,Q}_T \sim \sqrt{T}\,N$

$W^{2,Q}_T \sim \sqrt{T}\,N$

$$\| $$

$$\mathbb{E}^Q\left[e^{\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{21})\sqrt{T}N}\right]\ \mathbb{E}^Q\left[e^{\frac{1}{3}(\sigma_{12}+\sigma_{22})\sqrt{T}N}\right]$$

$$e^{\frac{1}{18}(\sigma_{11}+\sigma_{21})^2 T} \quad \| \quad e^{\frac{1}{18}(\sigma_{12}+\sigma_{22})^2 T}$$

$$X_0 = (S_0^1 S_0^2)^{1/3}\, e^{-\frac{1}{3} rT}\, e^{-\frac{1}{9}(\sigma_{11}^2+\sigma_{12}^2+\sigma_{21}^2+\sigma_{22}^2)T}\, e^{\frac{1}{9}(\sigma_{11}\sigma_{21}+\sigma_{12}\sigma_{22})T}$$

$$-\frac{\sigma_{11}^2}{6} - \frac{\sigma_{12}^2}{6} - \frac{\sigma_{21}^2}{6} - \frac{\sigma_{22}^2}{6} + \frac{\sigma_{11}^2+\sigma_{21}^2+2\sigma_{11}\sigma_{21}}{18} + \frac{\sigma_{12}^2+\sigma_{22}^2+2\sigma_{12}\sigma_{22}}{18} = -\frac{1}{9}\left(\sigma_{11}^2+\sigma_{12}^2+\sigma_{21}^2+\sigma_{22}^2-\sigma_{11}\sigma_{21}-\sigma_{12}\sigma_{22}\right)$$

3) $\tau \sim \exp(\lambda)$ $\qquad Q(\tau > t) = e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0$

(i)
$$P_{RT}(0,T) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^Q\left[x\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + x(1-\delta)\, \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}\right] =$$

$$= e^{-rT}\left\{x\, \underbrace{Q(\tau > T)}_{e^{-\lambda T}} + x(1-\delta)\, \underbrace{Q(\tau \leq T)}_{1-e^{-\lambda T}}\right\} = x e^{-rT}\left\{(1-\delta) + \delta e^{-\lambda T}\right\}$$

(ii) $P_0(0,T) = 100\, e^{-rT} = 95\, €$ $\qquad T = 3$ anni

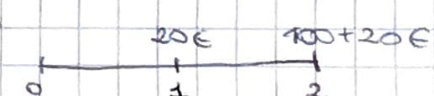
$P_{RT}(0,T) = 100\, e^{-rT}\{0.3 + 0.7\, e^{-\lambda T}\} = 93\, €$ $\qquad P_{RT}(0,T) = P_0(0,T)\{0.3 + 0.7\, e^{-\lambda T}\}$

$$\frac{P_{RT}(0,T)}{P_0(0,T)} = 0.3 + 0.7\, e^{-\lambda T} \qquad e^{-\lambda T} = \frac{1}{0.7}\left\{\frac{P_{RT}(0,T)}{P_0(0,T)} - 0.3\right\}$$

$$-\lambda T = \ln\left(\frac{1}{0.7}\left(\frac{P_{RT}(0,T)}{P_0(0,T)} - 0.3\right)\right) \qquad \lambda = -\frac{1}{3}\ln\Bigg(\underbrace{\frac{1}{0.7}\left(\frac{93}{95} - 0.3\right)}_{0.9699}\Bigg) = 0.010$$

0.03056

(iii)



$$V_1 = e^{-r}\, \mathbb{E}^Q\left[20\, \mathbb{1}_{\{\tau > 1\}}\right] + e^{-2r}\, \mathbb{E}^Q\left[20\, \mathbb{1}_{\{\tau > 2\}}\right]$$

$$+ e^{-2r}\, \mathbb{E}^Q\left[100\, \mathbb{1}_{\{\tau > 2\}}\right] = e^{-r} \cdot 20 \cdot \underbrace{Q(\tau > 1)}_{e^{-\lambda}} + 120\, e^{-2r}\, \underbrace{Q(\tau > 2)}_{e^{-2\lambda}}$$

$$V_1 = 20\, e^{-(r+\lambda)} + 120\, e^{-2(r+\lambda)}$$

Ricaviamo r dalla relazione $100\, e^{-3r} = 95$ $e^{-3r} = \frac{95}{100}$ $-3r = \ln\left(\frac{95}{100}\right)$

$r = -\frac{1}{3} \ln\left(\frac{95}{100}\right) = +0.017$ $r = 1.7\ \%$

$\lambda = 1\ \%$ $\Rightarrow$ $r + \lambda = 2.7\ \%$

$V_1 = 20\, e^{-0.027} + 120\, e^{-2 \cdot 0.027} = 133.16\ €$