Scritto del 23 gennaio 2020
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

1.

Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes, ossia soluzione della EDS

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0,$$

con μ (rendimento atteso), e $\sigma > 0$ (volatilitá) costanti. Si indichi con $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente.

(i) Determinare il prezzo $v(t, x)$ (al tempo $t \in [0, T]$ se $S_t = x$) del derivato di payoff finale $F(S_T) = \frac{S_T^3}{S_0}$.

(iii) Verificare che $v(t, x)$ verifica l'equazione di valutazione di Black & Scholes.

(iii) Applicare la formula di Ito per determinare la dinamica del processo $Y_t = \frac{S_t^3}{S_0}$ rispetto alla misura Q. E' un moto browniano geometrico? Scrivere il suo rendimento atteso.

2.

Siano $\{S_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2, 3$, i prezzi di tre azioni descritti dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1 + \sigma_{12} dW_t^2), \quad S_0^1 > 0.$$

$$dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_{22} dW_t^2 + \sigma_{23} dW_t^3), \quad S_0^2 > 0.$$

$$dS_t^3 = S_t^3(\mu_3 dt + \sigma_{33} dW_t^3) \quad S_0^3 > 0.$$

con μ_i, $i = 1, 2, 3$ e $\sigma_{ij} > 0$, $i = 1, 2, 3$ $j = 1, 2, 3$ costanti, $\{W_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2, 3$, moti browniani indipendenti. Considerare un mercato finanziario costituito da i tre titoli ed il bond con tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.

(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente e di mercato completo;

(ii) Determinare le misure martingala equivalenti. Il mercato é libero da arbitraggi? é completo o incompleto? (giustificare le risposte)

(iii) Calcolare il prezzo, al tempo $t = 0$, del derivato di payoff finale $F(S_T^1, S_T^3) = \frac{(S_T^1)^3}{S_0^1}\frac{(S_T^3)^3}{S_0^3}$. (**Suggerimento:** scrivere $S_t^1 = S_0^1 e^{(r - \frac{\sigma_{11}^2}{2} - \frac{\sigma_{12}^2}{2})t + \sigma_{11} W_t^{1,Q} + \sigma_{12} W_t^{2,Q}}$).

(iv) **Facoltativo**: Scrivere

$$dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + +\sigma_2 d\widetilde{W}_t^2)$$

con $\{\widetilde{W}_t^2\}_{t\geq 0}$ moto browniano e calcolare il coefficiente di correlazione ρ tra $\{\widetilde{W}_t^2\}_{t\geq 0}$ e $\{W_t^3\}_{t\geq 0}$ (**Suggerimento:** $E[\widetilde{W}_t^2 W_t^3] = \rho t$).

3.

Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente.

a) Determinare il prezzo $p_{RT}(0, T)$ di un DZCB con recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta$, di valore nominale x e maturitá T.

b) Sia oggi il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 100 euro, maturitá $T = 2$ anni, pari a $p_0 = 97$ euro e quello di un DZCB, di stesso valore nominale e maturitá, con $\delta = 80\%$ pari a $p_{RT} = 94$ euro. Determinare l'intensitá di default λ dell'istituzione finanziaria.

c) Calcolare il prezzo al tempo $t = 0$ di un defaultable coupon bond emesso dalla stessa istituzione finanziaria di valore nominale 100 euro, maturitá $T = 2$ anni, che paga cedole semestrali pari a 10 euro con tasso di recupero del $1 - \delta = 20\%$ solo sul valore nominale e pagabile alla scadenza.

Titoli Derivati e Gestione del Rischio II — scritto del 23/01/2019

1) $dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t)$ $S_0 > 0$

(i) $F(S_T) = \frac{S_T^3}{S_0}$ per la valutazione neutrale al rischio

$v(t,x) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(S_T) \mid S_t = x]$; $\mathbb{Q}$ è l'unica misura martingala del modello Black & Scholes

t.c. $dS_t = S_t(r\, dt + \sigma\, dW_t^{\mathbb{Q}})$ con $\{W_t^{\mathbb{Q}}\}_{t\ge 0}$ moto browniano rispetto a $\mathbb{Q}$

Rispetto a $\mathbb{Q}$:

$$S_T = S_t\, e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})}$$

$$v(t,x) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_t^3}{S_0}\, e^{3(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + 3\sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})} \mid S_t = x\right] =$$

$$= \frac{x^3}{S_0}\, e^{-rT}\, e^{3(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}\, \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{3\sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})}\right]}_{= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{3\sigma\sqrt{T-t}\,N}] = e^{\frac{9\sigma^2}{2}(T-t)}}$$

$W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}} \sim \mathcal{N}(0, T-t)$
$\sim \sqrt{T-t}\, N$
con $N \sim \mathcal{N}(0,1)$
$\mathbb{E}[e^{aN}] = e^{\frac{a^2}{2}}$

$\frac{9}{2}\sigma^2 - \frac{3}{2}\sigma^2 = 3\sigma^2$

$$\Rightarrow v(t,x) = \frac{x^3}{S_0}\, e^{(2r + 3\sigma^2)(T-t)}$$

(ii) Eq. di valutazione di B&S

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + rx\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rv = 0 \\ v(T,x) = F(x) \end{cases}$$

verificata

$\frac{\partial v}{\partial t} = -(2r + 3\sigma^2)\, v$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 3\frac{x^2}{S_0}\, e^{(2r+3\sigma^2)(T-t)}$

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 6\frac{x}{S_0}\, e^{(2r+3\sigma^2)(T-t)}$

$$-(2r+3\sigma^2)v + 3rv + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot 6v - rv = 0 \quad \text{verificata}$$

$$rx\frac{\partial v}{\partial x} = 3rv \qquad \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 3\sigma^2 v$$

(iii) Formula di Itô: $\quad df(S_t) = f''(S_t)\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\, dt + f'(S_t)\, dS_t$

$$f(x) = \frac{x^3}{S_0} \qquad f'(x) = 3\frac{x^2}{S_0} \qquad f''(x) = 6\frac{x}{S_0} \qquad Y_t = f(S_t)$$

$$dY_t = 6\frac{S_t}{S_0}\cdot\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\, dt + 3\frac{S_t^2}{S_0}(rS_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t^Q)$$

$$dY_t = 3\sigma^2\frac{S_t^3}{S_0}dt + 3\frac{S_t^3}{S_0}r\, dt + 3\sigma\frac{S_t^3}{S_0}dW_t = Y_t\left[(3\sigma^2+3r)\,dt + 3\sigma\, dW_t^Q\right]$$

Il suo rendimento atteso rispetto a Q è $3\sigma^2+3r \Rightarrow \mathbb{E}^Q[Y_T \mid Y_t] = Y_t e^{(3\sigma^2+3r)(T-t)}$

coerente con il risultato trovato al punto (i)

2)
$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1(\mu_1\, dt + \sigma_{11}\, dW_t^1 + \sigma_{12}\, dW_t^2) \\ dS_t^2 = S_t^2(\mu_2\, dt + \sigma_{22}\, dW_t^2 + \sigma_{23}\, dW_t^3) \\ dS_t^3 = S_t^3(\mu_3\, dt + \sigma_{33}\, dW_t^3) \end{cases}$$

Q è una misura mg equivalente se: $\begin{cases} Q(A)=0 \iff P(A)=0 \quad \forall A\in\mathcal{F} \\ \tilde{S}_t^i = e^{-rt}S_t^i \text{ sono } Q\text{-mg} \quad i=1,2,3 \end{cases}$

ossia $\mathbb{E}^Q[\tilde{S}_s^i \mid \mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t^i \quad \forall t>s \quad i=1,2,3$

ossia $\mathbb{E}^Q[S_s^i \mid \mathcal{F}_t] = e^{r(s-t)}S_t^i \quad \forall t>s$

rispetto a Q il rendimento atteso di ogni azione è r

(ii) Per determinare le misure mg equivalenti Q^θ dobbiamo calcolare il vettore dei prezzi di mercato del rischio $\underline{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$ soluzione del sistema lineare

$$\sigma \underline{\theta} = \underline{\mu} - \underline{r} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \qquad \det \sigma = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} \neq 0$$

per il teorema di Cramer il sistema ammette una sola soluzione, dunque esiste una unica misura mg equivalente per il I ed II teorema dell'Asset Pricing il mercato è libero da arbitraggi e completo. Un mercato si dice completo se ogni derivato può essere replicato da una strategia autofinanziante.

$$\begin{cases} \sigma_{11}\theta_1 + \sigma_{12}\theta_2 = \mu_1 - r & \Rightarrow \theta_1 = \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} - \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}\theta_2 \\ \sigma_{2}\theta_2 + \sigma_{23}\theta_3 = \mu_2 - r & \Rightarrow \theta_2 = \dfrac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}} - \dfrac{\sigma_{23}}{\sigma_{22}}\theta_3 \\ \sigma_{33}\theta_3 = \mu_3 - r & \Rightarrow \theta_3 = \dfrac{\mu_3 - r}{\sigma_{33}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_3 = \dfrac{\mu_3 - r}{\sigma_{33}} \\ \theta_2 = \dfrac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}} - \dfrac{\sigma_{23}}{\sigma_{22}} \dfrac{\mu_3 - r}{\sigma_{33}} \\ \theta_1 = \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} - \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}\left[\left(\dfrac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}}\right) - \dfrac{\sigma_{23}}{\sigma_{22}}\left(\dfrac{\mu_3 - r}{\sigma_{33}}\right)\right] \end{cases}$$

$\exists !\, Q$

rispetto a Q

$W_t^{i,Q} = W_t^i + \theta_i t$

$i = 1, 2, 3$

sono moti browniani indipendenti

(iii) rispetto a $\mathbb{Q}$

$$\begin{cases} dS^1_t = S^1_t(r + \sigma_{11}\, dW^{1,\mathbb{Q}}_t + \sigma_{12}\, dW^{2,\mathbb{Q}}_t) \\ dS^3_t = S^3_t(r + \sigma_{33}\, dW^{3,\mathbb{Q}}_t) \end{cases} \qquad S^1_T = S^1_0\, e^{(r - \sigma_{11}^2/2 - \sigma_{12}^2/2)t + \sigma_{11} W^{1,\mathbb{Q}}_t + \sigma_{12} W^{2,\mathbb{Q}}_t}$$

$$V_0 = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{(S^1_T)^3}{S^1_0}\, \frac{(S^3_T)^3}{S^3_0}\right] = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{(S^1_T)^3}{S^1_0}\right] \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{(S^3_T)^3}{S^3_0}\right]$$

$\{S^1_t\}$ e $\{S^3_t\}$ sono indipendenti

per ... es. 1)

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{(S^3_T)^3}{S^3_0}\right] = \frac{(S^3_0)^3}{S^3_0}\, e^{(3r + 3\sigma_{33}^2)T} = (S^3_0)^2\, e^{(3r + 3\sigma_{33}^2)T}$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{(S^1_T)^3}{S^1_0}\right] = (S^1_0)^2\, e^{3(r - \sigma_{11}^2/2 - \sigma_{12}^2/2)T}\, \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{3\sigma_{11}\sqrt{T} N}\right]}_{e^{\frac{9}{2}\sigma_{11}^2 T}}\, \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{3\sigma_{12}\sqrt{T} N}\right]}_{e^{\frac{9}{2}\sigma_{12}^2 T}}$$

abbiamo utilizzato che $\{W^{1,\mathbb{Q}}_t\}$ e $\{W^{2,\mathbb{Q}}_t\}$ sono indipendenti

$$= (S^1_0)^2\, e^{(3r + 3\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{12}^2)T}$$

$$V_0 = e^{-rT} (S^3_0)^2 (S^1_0)^2\, e^{(3r + 3\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{12}^2)T}\, \underbrace{e^{3\sigma_{33}^2 T}}_{e^{3rT}} = (S^3_0\, S^1_0)^2\, e^{(5r + 3\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{12}^2 + 3\sigma_{33}^2)T}$$

(iv)

$$\sigma_2 \tilde{W}^2_t = \sigma_{22} W^2_t + \sigma_{33} W^3_t \qquad \tilde{W}^2_t = \frac{\sigma_{22}}{\sigma_2} W^2_t + \frac{\sigma_{33}}{\sigma_2} W^3_t \sim \mathcal{N}\Big(0,\ \underbrace{\frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_2^2} t + \frac{\sigma_{33}^2}{\sigma_2^2} t}_{\text{varianza di } \tilde{W}^2_t}\Big)$$

$W^2_t, W^3_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ indipendenti

affinché $\{\tilde{W}^2_t\}$ sia un moto browniano: $\dfrac{\sigma_{22}^2 + \sigma_{23}^2}{\sigma_2^2} = 1 \implies \sigma_2 = \sqrt{\sigma_{22}^2 + \sigma_{23}^2}$

$$\tilde{\omega}_t^2 = \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{\sigma_{22}^2+\sigma_{23}^2}}\,\omega_t^2 + \frac{\sigma_{23}}{\sqrt{\sigma_{22}^2+\sigma_{23}^2}}\,\omega_t^3$$

$$\mathbb{E}[\tilde{\omega}_t^2\,\omega_t^3] = \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{\sigma_{22}^2+\sigma_{23}^2}}\,\underbrace{\mathbb{E}[\omega_t^2\,\omega_t^3]}_{\mathbb{E}(\omega_t^2)\mathbb{E}(\omega_t^3) = 0} + \frac{\sigma_{23}}{\sqrt{\sigma_{22}^2+\sigma_{23}^3}}\,\overbrace{\mathbb{E}[(\omega_t^3)^2]}^{t} \Rightarrow \rho = \frac{\sigma_{23}}{\sqrt{\sigma_{22}^2+\sigma_{23}^2}}$$

3)

$$P_{RT}(0,T) = e^{-rT}\,\mathbb{E}^{Q}[x\,\mathbb{1}_{\{\tau>T\}} + x(1-\delta)\,\mathbb{1}_{\{\tau\le T\}}] \qquad Q(\tau>T) = e^{-\lambda T}$$

$$= x\,e^{-rT}\underbrace{Q(\tau>T)}_{e^{-\lambda T}} + x(1-\delta)e^{-rT}\underbrace{Q(\tau\le T)}_{1-e^{-\lambda T}}$$

$$= x\left[e^{-rT}e^{-\lambda T} + (1-\delta)e^{-rT} - (1-\delta)e^{-rT}e^{-\lambda T}\right] = x\,e^{-rT}\left[1-\delta+\delta\,e^{-\lambda T}\right]$$

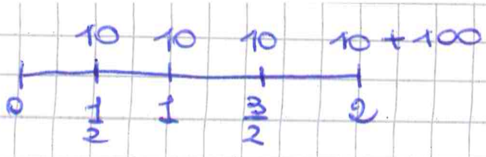
$P_0 = 97€ = 100\,e^{-rT}$ $\qquad P_{RT}(0,T) = 94€$ con $\delta = 80\%$

$$94 = 97(1-\delta+\delta\,e^{-\lambda T}) = 97(0.2+0.8\,e^{-\lambda T})$$

$$\frac{94}{97} = 0.2 + 0.8\,e^{-\lambda T} \qquad e^{-\lambda T} = \frac{1}{0.8}\,\frac{94}{97} - \frac{0.2}{0.8} \qquad \lambda = -\frac{1}{T}\ln\Bigg(\underbrace{\overbrace{\frac{1}{0.8}\,\frac{94}{97}}^{1.2113} - \frac{0.2}{0.8}}_{0.9613}\Bigg)$$

$\lambda = +0.0197$ $\qquad \lambda = 1.97\%$

Cedole:



$$P_{DCB}(0,T) = P_{RT}(0,T) + \mathbb{E}^{Q}\left[\sum_{i=1}^{4} c_i \, e^{-r_i t_i} \, \mathbb{1}_{(\tau > t_i)} \right]$$

le cedole vengono pagate al tempo t_i se non c'è stato il default

$$P_{DCB}(0,T) = P_{RT}(0,T) + 10 \sum_{i=1}^{4} e^{-r t_i} \underbrace{Q(\tau > t_i)}_{e^{-\lambda t_i}}$$

$$P_{DCB}(0,T) = P_{RT}(0,T) + 10\left(e^{-(r+\lambda)\frac{1}{2}} + e^{-(r+\lambda)} + e^{-(r+\lambda)\frac{3}{2}} + e^{-(r+\lambda)2}\right)$$

$P_{RT}(0,T) = 94$ €

Determino r dal valore di $P_0 = 97 = 100\, e^{-2r}$ $\quad T = 2$ anni

$$-2r = \frac{97}{100} \qquad r = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{97}{100}\right) = 0.0152$$

$r = 1.52\%$

$r + \lambda = 1.52\% + 1.97\% = 3.49\%$

$$P_{DCB}(0,T) = 94 + 10\left(e^{-0.0349 \cdot \frac{1}{2}} + e^{-0.0349} + e^{-0.0349 \cdot \frac{3}{2}} + e^{-0.0349 \cdot 2}\right)$$

$$= 94 + 10(0.9827 + 0.9657 + 0.94899 + 0.9326)$$

$= 132.30$ €