Scritto del 10 gennaio 2019
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

1. Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes.

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0,$$

con μ, e $\sigma > 0$ costanti e $\{W_t\}_{t\geq 0}$ moto browniano. Si indichi con $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente.
(i) Tramite la formula di Ito determinare l'espressione esplicita di S_t .
(Suggerimento: applicare Ito per determinare la dinamica di $log(S_t)$)
(ii) Individuare l'unica misura martingala Q e scrivere la dinamica di S_t rispetto a Q.
(iii) Determinare il prezzo di un derivato $v(t, x)$ (al tempo t se $S_t = x$) di payoff finale $F(S_T) = S_0 I_{\{S_T > S_0\}}$.
(iv) Calcolare il delta del portafoglio di copertura, $\delta(t, x)$, al tempo t se $S_t = x$. In particolare al tempo $t = 0$, prevede l'acquisto di azioni o la vendita allo scoperto?

2. Siano $\{S_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2, 3$, i prezzi di tre azioni descritti dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^1) \quad S_0^1 > 0.$$

$$dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_2 dW_t^2), \quad S_0^2 > 0.$$

$$dS_t^3 = S_t^3(\mu_3 dt + \sigma_3 dW_t^1) \quad S_0^3 > 0.$$

con μ_i, $\sigma_i > 0$,$i = 1, 2, 3$, costanti, $\{W_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2, \cancel{3, 4,}$ moti browniani indipendenti. Considerare un mercato finanziario costituito dai tre titoli ed il bond con tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.
(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente;
(ii) In quale circostanza il mercato é libero da arbitraggi? In quale circostanza il mercato é libero da arbitraggi e completo?
(iii) Nella circostanza in cui il mercato é libero da arbitraggi e completo, determinare tramite la valutazione neutrale al rischio, il prezzo di un derivato $v(t, x_1, x_2, x_3)$ (al tempo t se se $S_t^i = x_i$, $i = 1, 2, 3$) di payoff finale $F(S_T^1, S_T^2, S_T^3) = S_T^1 S_T^2 S_T^3$.
(Suggerimento: utilizzare l'indipendenza di $\{W_t^{1,Q}\}_{t\geq 0}$ e $\{W_t^{2,Q}\}_{t\geq 0}$ rispetto alla misura Q).

3.
Sia Q una misura neutrale al rischio. Sia τ il tempo di default di una determinata istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$ (hazard rate costante $\gamma^Q(t) = \lambda$). Si assuma tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.
a) Determinare il prezzo $p_1(0, T)$ (al tempo $t = 0$), di un DZCB emesso dall'istituzione finanziaria con recovery of treasury (pagato alla scadenza T) pari al $1 - \delta$, di valore nominale x euro e maturitá T.
b) Sia oggi il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 35 euro, maturitá $T = 2$ anni, pari a $p_0 = 30$ euro e quello di un DZCB con recovery of treasury pari al 60% di stesso valore nominale e maturitá, pari a $p_1 = 28$ euro. Determinare l'intensitá di default λ dell'istituzione finanziaria.
c) Determinare il prezzo oggi di un DZCB emesso dall'istituzione finanziaria con recovery pari al 50%, valore nominale 50 euro e maturitá 6 mesi.

Titoli Derivati e Gestione del Rischio II

Scritto del 10/01/19 Prof.ssa C. Ceci

1) $dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t)$ $S_0 > 0$

formula di Itô

$df(S_t) = \frac{1}{2} f''(S_t) S_t^2 \sigma^2\, dt + f'(S_t)\, dS_t$

$f(x) = \log x$ $f'(x) = \frac{1}{x}$ $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

Posto $Y_t = \log S_t$ si ha che: $dY_t = -\frac{1}{2} \cancel{S_t^2} \sigma^2 \frac{1}{\cancel{S_t^2}} dt + \frac{1}{\cancel{S_t}} \cancel{S_t} (\mu\, dt + \sigma\, dW_t)$

$dY_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 dt + \mu\, dt + \sigma\, dW_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma\, dW_t$

Integrando tra 0 e t: $\log S_t - \log S_0 = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) t + \sigma W_t$ $\log \frac{S_t}{S_0} = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t$

$\Rightarrow \quad S_t = S_0\, e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$

(ii) Q è una misura martingala equivalente se $\forall A \in \mathcal{F}$ $Q(A) = 0 \iff P(A) = 0$

e $\{S_t e^{-rt}\}_{t \geq 0}$ è una Q-mg, ossia $\forall s > t$ $\mathbb{E}^Q[S_s e^{-rs} \mid \mathcal{F}_t] = S_t e^{-rt}$

ossia $\mathbb{E}^Q[S_s \mid \mathcal{F}_t] = S_t e^{+r(s-t)}$ $\forall s > t$

Determinare Q equivale a scrivere la dinamica di S_t nel seguente modo

$dS_t = S_t(r\, dt + \sigma\, dW_t^Q) = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t)$

$$\Rightarrow \quad dS_t = S_t\left\{ r\,dt + \sigma\left[dW_t + \frac{\mu-r}{\sigma}\,dt \right]\right\} \quad \Rightarrow \quad W_t^{Q} = W_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t$$

ed il teorema di Girsanov ci assicura che esiste una sola misura Q, equivalente a P, tale che $W_t^{Q} = W_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t$ sia un Q-moto browniano

$\frac{\mu-r}{\sigma}$ = prezzo di mercato del rischio

Rispetto a Q: $\quad dS_t = S_t\left(r\,dt + \sigma\,dW_t^{Q}\right)$

(iii) Per la valutazione neutrale al rischio:

$$v(t,x) = e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^{Q}\left[F(S_T)\mid S_t = x\right] = e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^{Q}\left[S_0\,\mathbb{1}_{\{S_T > S_0\}} \mid S_t = x\right]$$

$$= e^{-r(T-t)}\,S_0\,Q\left(S_T > S_0 \mid S_t = x\right)$$

Essendo $\quad S_T = S_t\,e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T^{Q} - W_t^{Q})}$ $\quad W_T^{Q} - W_t^{Q} \sim \mathcal{N}(0, T-t)$ $\quad W_T^{Q} - W_t^{Q} \sim \sqrt{T-t}\,N$, $N \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$Q(S_T > S_0 \mid S_t = x) = Q\left(x\,e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^{Q} - W_t^{Q})} > S_0\right) = Q\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W_T^{Q} - W_t^{Q}) > \log\left(\frac{S_0}{x}\right)\right)$$

$$= Q\left(\sigma\sqrt{T-t}\,N > \log\left(\frac{S_0}{x}\right) - \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right) = Q\left(N > \frac{\log\left(\frac{S_0}{x}\right) - \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(R(t,x))$$ ove $\Phi(x) = P(N \le x)$ f. di dist. di $N \sim \mathcal{N}(0,1)$

ove $\quad R(t,x) = \dfrac{\log\left(\frac{S_0}{x}\right) - \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ $\qquad R(t,x) = -\dfrac{\log\left(\frac{x}{S_0}\right) + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

$$\Rightarrow \quad v(t,x) = S_0\,e^{-r(T-t)}\overbrace{\left(1 - \Phi(R(t,x))\right)}^{\Phi(d_2(t,x))}$$

oppure $\quad 1 - \Phi(R(t,x)) = \Phi(d_2(t,x))$

$d_2(t,x) = \left[\log\left(\frac{x}{S_0}\right) + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right] / \sigma\sqrt{T-t}$

(iv) Il delta del portafoglio di copertura è $\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -S_0 e^{-r(T-t)} \Phi'(R(t,x)) \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \frac{1}{\frac{x}{\cancel{S_0}}} \cdot \frac{1}{\cancel{S_0}} = -\frac{1}{x\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(t,x) = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{S_0}{x\sigma\sqrt{T-t}} e^{-r(T-t)} \Phi'(R(t,x)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{R^2(t,x)}{2}} \frac{S_0}{x\sigma\sqrt{T-t}} e^{-r(T-t)}}$$

Per $t=0$ $\qquad \delta_0 = \frac{S_0 \Phi'(R_0) e^{-rT}}{S_0 \sigma\sqrt{T}} = \frac{\Phi'(R_0) e^{-rT}}{\sigma\sqrt{T}} > 0$ prevede l'acquisto di azioni, per ogni derivato venduto dobbiamo acquistare

$$\boxed{R_0 = R(0,S_0) = -\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = -\left(\frac{r-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)\sqrt{T} = \left(\frac{1}{2}\sigma - \frac{r}{\sigma}\right)\sqrt{T}}$$

$\frac{\Phi'(R_0) e^{-rT}}{\sigma\sqrt{T}}$ azioni.

2)

$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^1) \\ dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_2 dW_t^2) \\ dS_t^3 = S_t^3(\mu_3 dt + \sigma_3 dW_t^1) \end{cases}$$

(i) Q è una misura martingala equivalente a P se $\forall A \in \mathcal{F}$ $\quad Q(A) = 0 \iff P(A) = 0$

e $\{S_t^i e^{-rt}\}_{t\geq 0}$ $\quad i = 1,2,3$ sono Q-martingale

$$\mathbb{E}^Q[S_s^i e^{-rs} \mid \mathcal{F}_t] = S_t^i e^{-rt} \qquad \forall t > s$$

(ii) Secondo il primo teorema dell'Asset Pricing il mercato è libero da arbitraggi se esiste almeno una misura martingala. Le misure mg si trovano determinando le soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \\ \mu_3 - r \end{pmatrix}$$

Questo sistema non ammette soluzioni nel caso in cui

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & \mu_1 - r \\ 0 & \sigma_2 & \mu_2 - r \\ \sigma_3 & 0 & \mu_3 - r \end{vmatrix} \neq 0$$

infatti per il teorema di Rouché-Capelli avremmo

$$\underbrace{rg\, A}_{\text{matrice dei coeff.}} = 2 \neq \underbrace{rg\, C}_{\text{matrice completa}} = 3$$

Ossia $\sigma_1 \begin{vmatrix} \sigma_2 & \mu_2 - r \\ 0 & \mu_3 - r \end{vmatrix} + (\mu_1 - r) \begin{vmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & 0 \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 (\mu_3 - r) - \sigma_2 \sigma_3 (\mu_1 - r) \neq 0$

$\iff \sigma_1 \cancel{\sigma_2} (\mu_3 - r) \neq \cancel{\sigma_2} \sigma_3 (\mu_1 - r)$ $\qquad \dfrac{\mu_3 - r}{\sigma_3} \neq \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_1}$ se il prezzo di mercato del rischio del terzo titolo $\neq$ dal prezzo di mercato del rischio del primo titolo

Infatti

$$\begin{cases} \sigma_1 \theta_1 = \mu_1 - r \\ \sigma_2 \theta_2 = \mu_2 - r \\ \sigma_3 \theta_1 = \mu_3 - r \end{cases} \qquad \theta_1 = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \qquad \theta_2 = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2}$$

il sistema è compatibile ed ammette una sola soluzione nel caso in cui $\dfrac{\mu_3 - r}{\sigma_3} = \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_1}$

(ii) Il mercato è libero da arbitraggi se $\dfrac{\mu_3 - r}{\sigma_3} = \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_1}$ ed in tal caso è anche completo e l'unica misura Q è tale che

$$W_t^{Q,1} = W_t^1 + \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} t \quad \text{e} \quad W_t^{Q,2} = W_t^2 + \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} t$$

(iii) Se $\dfrac{\mu_3 - r}{\sigma_3} = \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_1}$ la dinamica di S^1, S^2 e S^3 rispetto a Q è la seguente

$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1 (r + \sigma_1\, dW_t^{Q,1}) \\ dS_t^2 = S_t^2 (r + \sigma_2\, dW_t^{Q,2}) \\ dS_t^3 = S_t^3 (r + \sigma_3\, dW_t^{Q,1}) \end{cases}$$

Per la valutazione neutrale al rischio:

$$v(t,x_1,x_2,x_3) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S^1_T \cdot S^2_T \cdot S^3_T \mid S^1_t = x_1,\ S^2_t = x_2,\ S^3_t = x_3 \right]$$

$$S^1_T = S^1_t\, e^{(r - \sigma_1^2/2)(T-t) + \sigma_1 (W^{1\mathbb{Q}}_T - W^{1\mathbb{Q}}_t)}$$

$$S^2_T = S^2_t\, e^{(r - \sigma_2^2/2)(T-t) + \sigma_2 (W^{2\mathbb{Q}}_T - W^{2\mathbb{Q}}_t)}$$

$$S^3_t = S^3_t\, e^{(r - \sigma_3^2/2)(T-t) + \sigma_3 (W^{1\mathbb{Q}}_T - W^{1\mathbb{Q}}_t)}$$

$$v(t,x_1,x_2,x_3) = e^{-r(T-t)}\, x_1 \cdot x_2 \cdot x_3\, e^{(3r - \sigma_1^2/2 - \sigma_2^2/2 - \sigma_3^2/2)(T-t)}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{(\sigma_1+\sigma_3)(W^{1\mathbb{Q}}_T - W^{1\mathbb{Q}}_t)} \cdot e^{\sigma_2 (W^{2\mathbb{Q}}_T - W^{2\mathbb{Q}}_t)} \right]$$

essendo $\{W^{1\mathbb{Q}}_t\} \perp \{W^{2\mathbb{Q}}_t\}$

il valore atteso si fattorizza:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{(\sigma_1+\sigma_3)(W^{1\mathbb{Q}}_T - W^{1\mathbb{Q}}_t)} \right] \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma_2 (W^{2\mathbb{Q}}_T - W^{2\mathbb{Q}}_t)} \right] =$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{(\sigma_1+\sigma_3)\sqrt{T-t}\, N} \right] \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma_2 \sqrt{T-t}\, N} \right]$$

$\mathbb{E}[e^{aN}] = e^{a^2/2}$

$$= e^{\frac{(\sigma_1+\sigma_3)^2}{2}(T-t)}\; e^{\frac{\sigma_2^2}{2}(T-t)}$$

$$\Rightarrow v(t,x_1,x_2,x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3\, e^{2r(T-t)}\; e^{\left(\cancel{-\frac{\sigma_1^2}{2}} \cancel{-\frac{\sigma_2^2}{2}} \cancel{-\frac{\sigma_3^2}{2}} + \cancel{\frac{\sigma_1^2}{2}} + \cancel{\frac{\sigma_3^2}{2}} + \cancel{\frac{\sigma_2^2}{2}} + \sigma_1\sigma_3\right)(T-t)}$$

$$v(t,x_1,x_2,x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3\, e^{2r(T-t)}\; e^{\sigma_1\sigma_3 (T-t)}$$

3) $\tau \sim \exp(\lambda)$ $\qquad Q(\tau \le t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad t > 0$

$Q(\tau > t) = e^{-\lambda t}$

Prezzo DZCB con recovery of treasury (pagato al tempo T) pari a $1-\delta$

$$P_1(0,T) = e^{-rT}\,\mathbb{E}^{Q}\left(x\,\mathbb{1}_{(\tau>T)} + x(1-\delta)\,\mathbb{1}_{(\tau\le T)}\right)$$

$$= e^{-rT} x \{ Q(\tau>T) + (1-\delta)\,Q(\tau\le T)\} = e^{-rT} x \{ e^{-\lambda T} + (1-\delta)(1-e^{-\lambda T})\}$$

$$= x\,e^{-rT}\left(1-\delta+\delta e^{-\lambda T}\right)$$

b) $P_0 = 30€ \quad P_1 = P_{RT}(0,T) = 28€ \qquad T = 2$ anni $\qquad x = 35€ \qquad 1-\delta = 60\%$

$P_1 = P_0\left(1-\delta+\delta e^{-\lambda T}\right)$ $\qquad$ essendo $P_0 = x\,e^{-rT}$

$\dfrac{P_1}{P_0} = 1-\delta+\delta e^{-\lambda T}$ $\qquad e^{-\lambda T} = \dfrac{1}{\delta}\left(\dfrac{P_1}{P_0} - (1-\delta)\right)$

$$\lambda = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{P_1}{\delta P_0} - \frac{1-\delta}{\delta}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{28}{0.4\cdot 30} - \frac{0.6}{0.4}\right) = 0.09116$$

c) $\bar{T} = 6$ mesi $\qquad 1-\delta = 50\% \qquad x = 50€$

Determiniamo r dalla relazione $\quad 30 = 35\,e^{-2r} \qquad r = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{30}{35}\right) = 0.077 \qquad 7.7\%$ annuo

$$P_1(0,\bar{T}) = 50\,e^{-r\cdot\frac{1}{2}}\left(0.5 + 0.5\,e^{-0.09116\cdot\frac{1}{2}}\right) = 47€$$

Scritto del 31 gennaio 2019
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

1. Sia $\{W_t\}_{t\geq 0}$ moto browniano.
(i) Dimostrare che $M_t := e^{-1/2c^2t+cW_t}$, con c costante, é una martingala.
(ii) Applicare la formula di Ito per determinare l'EDS di cui M_t é soluzione.

Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes, soluzione della EDS

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0,$$

con μ, e $\sigma > 0$ costanti. Si indichi con $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente.
(iii) Determinare la dinamica del prezzo scontato $\tilde{S}_t = S_t e^{-rt}$.
(iv) Individuare l'unica misura martingala Q, scrivere la dinamica di $\tilde{S}_t$ e di S_t rispetto a Q e dedurre dal punto (ii) l'espressione esplicita di $\tilde{S}_t$ e di S_t rispetto alla misura Q.
(v) Determinare il prezzo di un derivato $v(t,x)$ (al tempo t se $S_t = x$) di payoff finale $F(S_T) = (\frac{S_T}{S_0})^3$.
(vi) Applicare la formula di Ito per determinare la dinamica del processo $Y_t = (\frac{S_t}{S_0})^3$ rispetto alla misura Q.

2. Siano $\{S_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1,2,3$, i prezzi di tre azioni descritti dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1 + \sigma_{12} dW_t^2) \quad S_0^1 > 0.$$

$$dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_{22} dW_t^2 + \sigma_{23} dW_t^3), \quad S_0^2 > 0.$$

$$dS_t^3 = S_t^3(\mu_3 dt + \sigma_{31} dW_t^1 + \sigma_{34} dW_t^4) \quad S_0^3 > 0.$$

con μ_i, $\sigma_{ij} > 0, i, j = 1,2,3,4$, costanti, $\{W_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1,2,3,4$, moti browniani indipendenti. Considerare un mercato finanziario costituito dai tre titoli ed il bond con tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.
(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente;
(ii) Determinare le misure martingale equivalenti. Il mercato é libero da arbitraggi? É completo o incompleto?
(iii) E' possibile aggiungere un quarto titolo da rendere completo il mercato?
(iv) Applicare la formula di Ito (multidimensionale) per mostrare che il processo

$$S_t^1 = S_0^1 e^{(\mu_1 - \frac{\sigma_{11}^2}{2} - \frac{\sigma_{12}^2}{2})t + \sigma_{11} W_t^1 + \sigma_{12} W_t^2}$$

No

risolve la prima equazione del sistema.

3. Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente.
a) Determinare il prezzo $p(0,T)$ di un DZCB (senza recovery) di valore nominale x e maturitá T.
b) Calcolare $Q(\tau < T | \tau > t)$ con $t \in (0,T)$.
c) Determinare il prezzo $p(t,T)$ al tempo $t \in [0,T]$.
d) Sia $T = 2$ anni, $x = 100$ e $r = 2\%$. Se il prezzo al tempo $t = 6$ mesi é $p(t,T) = 95\$$, determinare l'intensitá di default $\lambda > 0$ dell'istituto finanziario.

Scritto del 31/01/2019 Titoli Derivati e Gestione del Rischio II

1) W_t moto browniano $\qquad M_t = e^{-\frac{1}{2}c^2 t + cW_t} \qquad c \in \mathbb{R}$

$\forall t > s$

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$$

$$\mathbb{E}\left[e^{-\frac{1}{2}c^2 t + cW_t} \mid \mathcal{F}_s\right] = e^{-\frac{1}{2}c^2 s + cW_s}$$ è equivalente a mostrare che

$$\mathbb{E}\left[e^{c(W_t - W_s)} \mid \mathcal{F}_s\right] = e^{\frac{1}{2}c^2(t-s)}$$ in quanto W_s è $\mathcal{F}_s$-misurabile.

Poiché $W_t - W_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$ e $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

$$\mathbb{E}\left[e^{c(W_t - W_s)} \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[e^{c(W_t - W_s)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{c\sqrt{t-s}\,N}\right] = e^{c^2(t-s)/2}$$ che era quello che volevamo dimostrare

(ii) $\mathbb{Q}$ è una misura mg per S se $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ (ossia $\mathbb{Q}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$)

ed $\{e^{-rt} S_t\}$ è una $\mathbb{Q}$-mg

Dinamica di $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t \qquad d\tilde{S}_t = -r e^{-rt} S_t \, dt + e^{-rt} \overbrace{dS_t}^{S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t)}$

$$\Rightarrow d\tilde{S}_t = S_t e^{-rt} \{(\mu - r)\, dt + \sigma\, dW_t\} \qquad d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \{(\mu - r)\, dt + \sigma\, dW_t\}$$

(iii) L'unica misura mg è individuata dal teorema di Girsanov in modo tale

che $\quad W_t^{\mathbb{Q}} = \frac{\mu - r}{\sigma} t + W_t$

Rispetto a $\mathbb{Q}$: $\quad d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma\, dW_t^{\mathbb{Q}} \quad$ e $\quad dS_t = S_t(r\, dt + \sigma W_t^{\mathbb{Q}})$

(ii) Itô : $df(t,W_t) = \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,W_t) + \frac{\partial f}{\partial t}(t,W_t) \right\} dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,W_t)\, dW_t$

$f(t,x) = e^{-\frac{1}{2}c^2 t + cx}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2} c^2 \cdot f \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = c f \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c \frac{\partial f}{\partial x} = c^2 f$

$\Rightarrow dM_t = \left\{ \frac{1}{2} c^2 M_t - \frac{1}{2} c^2 M_t \right\} dt + c M_t \, dW_t$

$\Rightarrow \quad dM_t = c M_t \, dW_t$

(iv) continuazione : $d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma \, dW_t^{\mathbb{Q}} \qquad \tilde{S}_t = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t^{\mathbb{Q}}}$

$S_t = e^{rt} \tilde{S}_t = e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t^{\mathbb{Q}}}$

(v) $v(t,x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_T^3}{S_0^3} \,\middle|\, S_t = x \right] \qquad S_T = S_t \, e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})}$

$= \frac{1}{S_0^3} e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_t^3 \, e^{3(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + 3\sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})} \,\middle|\, S_t = x \right]$

$= \left(\frac{x}{S_0}\right)^3 e^{-r(T-t)} e^{3(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{3\sigma\sqrt{T-t}\, N} \right]}_{= e^{\frac{9\sigma^2(T-t)}{2}}}$

$$\boxed{v(t,x) = \left(\frac{x}{S_0}\right)^3 e^{2r(T-t)} e^{+3\sigma^2(T-t)}}$$

$f(t,x) = (x/S_0)^3 e^{-rt}$

(vi) $Y_t = \left(\frac{S_t}{S_0}\right)^3 e^{-rt} \qquad \cancel{\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \left(\frac{x}{S_0}\right)^3 e^{-rt}} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = 3 \frac{x^2}{S_0^3} e^{-rt} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = 6 \frac{x}{S_0^3} e^{-rt} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -r f$

$df(t,S_t) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,S_t) \right\} dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)\, dS_t$

(vi) $\quad Y_t = \left(\frac{S_t}{S_0}\right)^3 = f(S_t) \quad$ ove $\quad f(x) = \frac{x^3}{S_0^3}$

$$f'(x) = \frac{3}{S_0^3} x^2 \qquad f''(x) = \frac{6x}{S_0^3}$$

rispetto alla misura $\mathbb{Q}$
$dS_t = S_t(r\,dt + \sigma\, dW_t^{\mathbb{Q}})$

$$df(S_t) = \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f''(S_t)\,dt + f'(S_t)\,dS_t$$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \cdot 6\frac{S_t}{S_0^3}\,dt + \frac{3}{S_0^3} S_t^2\, S_t(r\,dt + \sigma\, dW_t^{\mathbb{Q}})$$

$$= 3\sigma^2 \left(\frac{S_t}{S_0}\right)^3 dt + 3r\left(\frac{S_t}{S_0}\right)^3 dt + 3\sigma\left(\frac{S_t}{S_0}\right)^3 dW_t$$

$$\Rightarrow \quad dY_t = Y_t\{(3r + 3\sigma^2)\,dt + 3\sigma\, dW_t^{\mathbb{Q}}\}$$

Questo risultato è coerente con il punto (v), infatti essendo Y_t un moto browniano geometrico con rendimento atteso $\bar{\mu} = 3r + 3\sigma^2$ rispetto alla misura $\mathbb{Q}$ segue che

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y_T \mid \mathcal{F}_t] = Y_t\, e^{(3r+3\sigma^2)(T-t)}.$$

i)

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 & \sigma_{34} \end{pmatrix}$$

Le misure martingale si trovano determinando le soluzioni del sistema $\underline{\sigma} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \\ \mu_3 - r \end{pmatrix}$

$N = 3$ titoli rischiosi
$d = 4$ moti browniani

Osserviamo che $\operatorname{rg} \underline{\sigma} = 3$ in quanto $\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \sigma_{31} \cdot \sigma_{12} \cdot \sigma_{23} \neq 0$

$\Rightarrow$ per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ammette $\infty^{4-3} = \infty^1$ - soluzioni

$\forall$ soluzione $\underline{\theta}$ vettore dei prezzi di mercato del rischio corrisponde una misura mg $\mathbb{Q}^{\theta}$:

$W_t^{1\mathbb{Q}} = W_t^1 + \theta_1 t \qquad W_t^{2\mathbb{Q}} = W_t^2 + \theta_2 t \qquad W_t^{3\mathbb{Q}} = W_t^3 + \theta_3 t \qquad W_t^{4\mathbb{Q}} = W_t^4 + \theta_4 t$

sono moti browniani

(ii) È possibile completare il mercato aggiungendo un quarto titolo:

$$dS_t^4 = S_t^4 \left(\mu_4 \, dt + \sigma_{41} \, dW_t^1 \right)$$

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sviluppo rispetto alla quarta riga

$\operatorname{Det} \underline{\sigma} = - \sigma_{41} \begin{vmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{22} & \sigma_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{34} \end{vmatrix} = - \sigma_{41} \cdot \sigma_{34} \cdot \sigma_{11} \cdot \sigma_{23} \neq 0$

Per il teorema di Cramer esiste una unica misura mg $\mathbb{Q}$ t.c.

$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1 \left(r + \sigma_{11} \, dW_t^{1\mathbb{Q}} + \sigma_{12} \, dW_t^{2\mathbb{Q}} \right) \\ dS_t^2 = S_t^2 \left(r + \sigma_{22} \, dW_t^{2\mathbb{Q}} + \sigma_{23} \, dW_t^{3\mathbb{Q}} \right) \\ dS_t^3 = S_t^3 \left(r + \sigma_{31} \, dW_t^{1\mathbb{Q}} + \sigma_{34} \, dW_t^{4\mathbb{Q}} \right) \\ dS_t^4 = S_t^4 \left(r + \sigma_{41} \, dW_t^{4\mathbb{Q}} \right) \end{cases}$$

OSS:

(i) $\begin{cases} \sigma_{11}\theta_1 + \sigma_{12}\theta_2 = \mu_1 - r \\ \sigma_{22}\theta_2 + \sigma_{23}\theta_3 = \mu_2 - r \\ \sigma_{31}\theta_1 + \sigma_{34}\theta_4 = \mu_3 - r \end{cases}$ Le infinite soluzioni sono $\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} - \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}\theta_2 \\ \theta_3 = \dfrac{\mu_2 - r}{\sigma_{23}} - \dfrac{\sigma_{22}}{\sigma_{23}}\theta_2 \\ \theta_4 = \dfrac{\mu_3 - r}{\sigma_{34}} - \dfrac{\sigma_{31}}{\sigma_{34}}\left(\dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} - \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}\theta_2\right) \end{cases}$ $\theta_2 \in \mathbb{R}$

(ii) $\begin{cases} \sigma_{11}\theta_1 + \sigma_{12}\theta_2 = \mu_1 - r \\ \sigma_{22}\theta_2 + \sigma_{23}\theta_3 = \mu_2 - r \\ \sigma_{31}\theta_1 + \sigma_{34}\theta_4 = \mu_3 - r \\ \sigma_{41}\theta_1 = \mu_1 - r \end{cases}$ L'unica soluzione è $\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{41}} \\ \theta_2 = \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{12}} - \dfrac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}\dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{41}} \\ \theta_3 = \dfrac{\mu_2 - r}{\sigma_{23}} - \dfrac{\sigma_{22}}{\sigma_{23}}\left(\dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{12}} - \dfrac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}\dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{41}}\right) \\ \theta_4 = \dfrac{\mu_3 - r}{\sigma_{34}} - \dfrac{\sigma_{31}}{\sigma_{34}}\dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{41}} \end{cases}$

(iv) $S_t^1 = S_0^1 e^{\left(\mu_1 - \frac{\sigma_{11}^2}{2} - \frac{\sigma_{12}^2}{2}\right)t + \sigma_{11}W_t^1 + \sigma_{12}W_t^2}$

$S_t^1 = f(t, W_t^1, W_t^2)$ ove $f(t, x_1, x_2) = S_0^1 e^{\left(\mu_1 - \frac{\sigma_{11}^2}{2} - \frac{\sigma_{12}^2}{2}\right)t + \sigma_{11}x_1 + \sigma_{12}x_2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial t} = \left(\mu_1 - \frac{\sigma_{11}^2}{2} - \frac{\sigma_{12}^2}{2}\right) f \qquad \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \sigma_{11} f \qquad \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = \sigma_{12} f \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \sigma_{11}^2 f \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \sigma_{12}^2 f$

$df = \left\{\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right\} dt + \dfrac{\partial f}{\partial x_1} dW_t^1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2} dW_t^2$ (essendo $S_t^1 = f(t, W_t^1, W_t^2)$)

$dS_t^1 = \left\{\left(\mu_1 - \frac{\sigma_{11}^2}{2} - \frac{\sigma_{12}^2}{2}\right) S_t^1 + \frac{1}{2}\sigma_{11}^2 S_t^1 + \frac{1}{2}\sigma_{12}^2 S_t^1\right\} dt + \sigma_{11} S_t^1 dW_t^1 + \sigma_{12} S_t^1 dW_t^2$

$\Rightarrow dS_t^1 = S_t^1\{\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1 + \sigma_{12} dW_t^2\}$

3) $P(\tau > t) = e^{\cdots}$ $\quad \forall\, t > 0$

a) secondo la valutazione neutrale al rischio

$$p(0,T) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}\left[x\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} \right] = e^{-rT}\, x\, Q(\tau > T) = e^{-rT}\, x\, e^{-\lambda T} = x\, e^{-(\lambda + r)T}$$

b) $$Q(\tau < T \mid \tau > t) = \frac{Q\left((\tau < T) \cap (\tau > t) \right)}{Q(\tau > t)} = \frac{Q(t < \tau < T)}{Q(\tau > t)}$$

$\tau \sim \exp(\lambda)$ $\qquad F(t) = Q(\tau \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$

e $\quad Q(t < \tau < T) = F(T) - F(t) = (1 - e^{-\lambda T}) - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t} - e^{-\lambda T}$

$$\Rightarrow Q(\tau < T \mid \tau > t) = \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda T}}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda (T - t)}$$

c) se $\tau > t$ (ossia non c'è stato il default in $(0,t]$) $\qquad$ se $\tau \le t$ $\quad p(t,T) = 0$

~~p(t,T) =~~

$$p(t,T) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{Q}\left[x\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} \mid \tau > t \right] =$$

$$= x\, e^{-r(T-t)}\, Q(\tau > T \mid \tau > t)$$

Dal punto b) ricaviamo che: $\quad Q(\tau > T \mid \tau > t) = 1 - Q(\tau < T \mid \tau > t) = e^{-\lambda (T-t)}$

$$\Rightarrow p(t,T) = x\, e^{-(r+\lambda)(T-t)}\, \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}$$

d) $\quad 95 = x\, e^{-(r+\lambda)(T-t)}$ $\qquad \frac{95}{x} = e^{-(r+\lambda)(T-t)}$ $\qquad (r+\lambda) = -\frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{95}{100}\right)$

$T - t = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\qquad \lambda = -\frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{95}{100}\right) - r = \frac{2}{3} \ln\left(\frac{100}{95}\right) - 0.02 = 0.0$

$= 0.014$

6

Scritto del 14 febbraio 2019
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

1.
Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes, ossia soluzione della EDS

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0,$$

con μ, e $\sigma > 0$ costanti. Si indichi con $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente.
(i) Individuare l'unica misura martingala Q e scrivere la dinamica di S_t rispetto a Q.
(ii) Determinare il prezzo $v(t, x)$ (al tempo $t \in [0, T]$ se $S_t = x$) del derivato di payoff finale $F(S_T) = (S_T - S_0)^2$.
(iii) Verificare che $v(t, x)$ verifica l'equazione di valutazione di Black & Scholes.
(iii) Applicare la formula di Ito per determinare la dinamica del processo $Y_t = (S_t - S_0)^2$ rispetto alla misura Q.

2. Siano $\{S_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, i prezzi di due azioni descritti rispetto ad una misura martingala Q dalle seguenti EDS:

$$dS_t^1 = S_t^1(rdt + \sigma_{11}dW_t^1 + \sigma_{12}dW_t^2) \quad S_0^1 > 0.$$

$$dS_t^2 = S_t^2(rdt + \sigma_2 dW_t^2), \quad S_0^2 > 0.$$

con $\sigma_{11} > 0$, $\sigma_{12} > 0$ e $\sigma_2 > 0$ costanti e $\{W_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, moti browniani indipendenti.
(i) Determinare $\sigma_1 > 0$ e $\{B_t\}_{t\geq 0}$ moto browniano tali che $dS_t^1 = S_t^1(rdt + \sigma_1 dB_t)$.
(ii) I moti browniani $\{B_t\}_{t\geq 0}$ e $\{W_t^2\}_{t\geq 0}$ sono correlati? Calcolare il loro coefficiente di correlazione ρ.
(iii) Utilizzando il punto (i) scrivere esplicitamente S_t^1, $t \in [0, T]$.
(iv) Calcolare

$$v(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)}E^Q[S_T^1 S_T^2 | S_t^1 = x_1, S_t^2 = x_2].$$

3.
Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente.
a) Determinare il prezzo $p_{RT}(0, T)$ di un DZCB con recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta$ di valore nominale x e maturitá T.
b) Sia oggi il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 100 euro, maturitá $T = 1$ anno, pari a $p_0 = 98$ euro e quello di un DZCB, di stesso valore nominale e maturitá, con recovery of treasury del 70% pari a $p_{RT} = 95$ euro. Determinare l'intensitá di default λ dell'istituzione finanziaria.
c) Determinare il prezzo $p_{FV}(0, T)$ di un DZCB con recovery face value (pagato nell'istante di default) pari al 70%, valore nominale 100 euro e maturitá $T = 1$ anno.

Titoli Derivati e Gestione del Rischio II

Scritto del 14/2/19

1) $dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t)$, $S_0 > 0$

$\mathbb{Q}$ è l'unica misura di probabilità equivalente a $\mathbb{P}$ tale che $S_t e^{-rt}$ è una $\mathbb{Q}$-mg

ossia $\forall s > t$ $\quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_s e^{-rs} \mid \mathcal{F}_t] = S_t e^{-rt}$

ossia tale che $\quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_s \mid \mathcal{F}_t] = S_t e^{-(t-s)r}$

il tasso di rendimento atteso rispetto a $\mathbb{Q}$ è pari ad r.

$\Rightarrow dS_t = S_t(r\, dt + \sigma\, dW_t^{\mathbb{Q}})$ dove $W_t^{\mathbb{Q}} = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$

per il Teorema di Girsanov la misura $\mathbb{Q}$ esiste ed è unica ed è associata al prezzo di mercato del rischio $\frac{\mu - r}{\sigma}$

(ii)

$$v(t,x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - S_0)^2 \mid S_t = x] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T^2 - 2S_0 S_T + S_0^2 \mid S_t = x]$$

$$= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T^2 \mid S_t = x] - 2S_0 e^{-r(T-t)} \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T \mid S_t = x]}_{= x e^{r(T-t)}} + e^{-r(T-t)} S_0^2$$

perché $\mathbb{Q}$ è la misura martingala

$$S_T = S_t e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})}$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T^2 \mid S_t = x] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[x^2 e^{2(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} e^{2\sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})}\right] = x^2 e^{2(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{2\sigma\sqrt{T-t}\, N}\right]}_{= e^{\frac{4\sigma^2(T-t)}{2}}}$$

$W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}} \sim \mathcal{N}(0, T-t)$ $\qquad W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}} \sim \sqrt{T-t}\, N$

$N \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\Rightarrow v(t,x) = x^2 e^{-r(T-t)} e^{2r(T-t)} e^{-\sigma^2(T-t)} e^{2\sigma^2(T-t)} - 2S_0 x + e^{-r(T-t)} S_0^2$$

$$v(t,x) = x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} - 2S_0 x + e^{-r(T-t)} S_0^2$$

(iii) Eq. di valutazione di B&S

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + rx\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rv = 0 \\ v(T,x) = (x-S_0)^2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -(r+\sigma^2) x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} + r S_0 e^{-r(T-t)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x\, e^{(r+\sigma^2)(T-t)} - 2S_0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$$

$v(T,x) = x^2 - 2S_0 x + S_0^2 = (x-S_0)^2$
la condizione finale è verificata

$$-(r+\sigma^2) x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} + \cancel{r S_0 e^{r(T-t)}} + 2r x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} - \cancel{2S_0 rx} + \sigma^2 x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} - r x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} + \cancel{2S_0 rx} - \cancel{r e^{-r(T-t)} S_0^2} \overset{?}{=} 0$$

(iv) $Y_t = (S_t - S_0)^2 = f(t,x)$

$f(t,x) = (x-S_0)^2 \qquad f'(x) = 2(x-S_0) \qquad f''(x) = 2$

$$df(S_t) = \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f''(S_t)\,dt + f'(S_t)\,dS_t$$

$$dY_t = \frac{1}{\cancel{2}}\sigma^2 S_t^2 \cdot \cancel{2} \cdot dt + 2(S_t - S_0)\{S_t r\, dt + S_t \sigma\, dW_t^Q\}$$

$$dY_t = \sigma^2 S_t^2\, dt + 2S_t(S_t-S_0) r\, dt + 2S_t(S_t-S_0)\sigma\, dW_t^Q$$

$$dY_t = [\sigma^2 S_t^2 + 2S_t(S_t-S_0) r]\,dt + 2S_t(S_t-S_0)\sigma\, dW_t^Q$$

non è un moto browniano geometrico

2)
$$dS^1_t = S^1_t (r\,dt + \sigma_{11}\, dW^1_t + \sigma_{12}\, dW^2_t) \qquad S^1_0 > 0$$
$$dS^2_t = S^2_t (r\,dt + \sigma_2\, dW^2_t), \qquad S^2_0 > 0$$

(i) $\sigma_1 B_t = \sigma_{11} W^1_t + \sigma_{12} W^2_t$ $\qquad \sigma_1$ deve essere tale che $\mathbb{E}[B_t^2] = t$

$$B_t = \frac{\sigma_{11}}{\sigma_1} W^1_t + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} W^2_t \qquad W^1_t \sim \mathcal{N}(0,t) \qquad W^2_t \sim \mathcal{N}(0,t)$$

$$\Rightarrow \quad B_t \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_1^2} t + \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} t\right) = \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} t\right) = \mathcal{N}(0,t)$$

se $\sigma_1^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2$

(ii) I moti browniani $\{B_t\}$ e $\{W^2_t\}$ sono correlati in quanto

$$Cov(B_t, W^2_t) = \mathbb{E}(B_t W^2_t) = \mathbb{E}\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_1} W^1_t W^2_t + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} (W^2_t)^2\right) =$$

$$= \frac{\sigma_{11}}{\sigma_1} \underbrace{\mathbb{E}(W^1_t)}_{=0} \underbrace{\mathbb{E}(W^2_t)}_{=0} + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} \mathbb{E}((W^2_t)^2) = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} t$$

$$\rho = \frac{Cov(B_t, W^2_t)}{\sqrt{Var(B_t)}\sqrt{Var(W^2_t)}} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} \frac{t}{\sqrt{t}\sqrt{t}} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2}}$$

(iii) $dS^1_t = S^1_t (r\,dt + \sigma_1\, dB_t)$

$$S^1_t = S^1_0 e^{(r - \sigma_1^2/2)t + \sigma_1 B_t}$$

(iv)
$$v(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[S^1_T \, S^2_T \mid S^1_t = x_1, S^2_t = x_2]$$

$$S^1_T = S^1_t\, e^{(r-\sigma_1^2/2)(T-t) + \sigma_1 (B_T - B_t)} = S^1_t\, e^{\left(r - \frac{(\sigma_{11}^2+\sigma_{12}^2)}{2}\right)(T-t) + \sigma_{11}(W^1_T - W^1_t) + \sigma_{12}(W^2_T - W^2_t)}$$

$$S^2_T = S^2_t\, e^{(r-\sigma_2^2/2)(T-t) + \sigma_2 (W^2_T - W^2_t)}$$

$$\mathbb{E}^Q\left[S^1_T S^2_T \mid S^1_t = x_1, S^2_t = x_2 \right] = x_1 e^{(r-\sigma_1^2/2)(T-t)}\, x_2 e^{(r-\sigma_2^2/2)(T-t)}\, \mathbb{E}^Q\left[e^{\sigma_1\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_1} W^1_T + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} W^2_T - \frac{\sigma_{11}}{\sigma_1} W^1_t - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2} W^2_t\right)}\, e^{\sigma_2 (W^2_T - W^2_t)} \right]$$

poiché $\{W^1_t\} \perp \{W^2_t\}$

$$= x_1 \cdot x_2\, e^{(2r - \sigma_1^2/2 - \sigma_2^2/2)(T-t)}\, \mathbb{E}^Q\left[e^{\sigma_{11}(W^1_T - W^1_t)} \right] \mathbb{E}^Q\left[e^{(\sigma_{12}+\sigma_2)(W^2_T - W^2_t)} \right]$$

$$\mathbb{E}^Q\left[e^{\sigma_{11}\sqrt{T-t}\, N} \right] = e^{\sigma_{11}^2 \frac{(T-t)}{2}}, \qquad \mathbb{E}^Q\left[e^{(\sigma_{12}+\sigma_2)\sqrt{T-t}\, N} \right] = e^{(\sigma_{12}+\sigma_2)^2 \frac{T-t}{2}}$$

$$= e^{(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{12}\sigma_2)\frac{(T-t)}{2}}$$

*

$$= x_1 x_2\, e^{\left(2r - \cancel{\frac{\sigma_{11}^2}{2}} - \cancel{\frac{\sigma_{12}^2}{2}} - \cancel{\frac{\sigma_2^2}{2}} + \cancel{\frac{\sigma_{11}^2}{2}} + \cancel{\frac{\sigma_{12}^2}{2}} + \cancel{\frac{\sigma_2^2}{2}} + \sigma_{12}\sigma_2\right)(T-t)}$$

$$= x_1 x_2\, e^{(2r + \sigma_{12}\sigma_2)(T-t)} \qquad \sigma_{12} = \rho\sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2}$$

$$v(t, x_1, x_2) = x_1 x_2\, e^{(r + \sigma_{12}\sigma_2)(T-t)}$$

3) $Q(\tau > t) = e^{-\lambda t} \quad \forall t > 0 \qquad Q(\tau \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$

a)
$$P_{RT}(0,T) = e^{-rT} \mathbb{E}^Q\left[x \mathbb{1}_{(\tau > T)} + x(1-\delta)\mathbb{1}_{(\tau \le T)}\right]$$
$$= x e^{-rT} \{ Q(\tau > T) + Q(\tau \le T)(1-\delta) \} = x e^{-rT} \{ e^{-\lambda T} + (1-\delta)(1-e^{-\lambda T}) \}$$
$$= x e^{-rT} \{ 1-\delta + \delta e^{-\lambda T} \}$$

b) $x = 100 \quad T = 1$ anno $\quad p_0 = 98€ = 100 e^{-rT} \qquad 1-\delta = 0.7$

$$P_{RT} = p_0 \{ 0.7 + 0.3 e^{-\lambda} \} \qquad \frac{P_{RT}}{p_0} = 0.7 + 0.3 e^{-\lambda} \qquad e^{-\lambda} = \frac{1}{0.3}\left\{ \frac{P_{RT}}{p_0} - 0.7 \right\}$$

$$\lambda = -\ln\left\{ \frac{P_{RT}}{0.3 p_0} - \frac{0.7}{0.3} \right\} = -\ln\left\{ \frac{95}{0.3 \cdot 98} - \frac{0.7}{0.3} \right\} = 0.1076$$

c) Se la recovery è pagato al tempo τ

$$P_{FV}(0,T) = e^{-rT} x \, \mathbb{E}^Q[\mathbb{1}_{(\tau > T)}] + x(1-\delta)\, \mathbb{E}^Q[e^{-r\tau} \mathbb{1}_{(\tau \le T)}]$$

calcoliamo $\mathbb{E}^Q[e^{-r\tau}\mathbb{1}_{(\tau \le T)}] = \int_0^T e^{-ru} \lambda e^{-\lambda u} \, du = \lambda \int_0^T e^{-(r+\lambda)u} \, du = \frac{-\lambda}{r+\lambda} e^{-(r+\lambda)u} \Big|_0^T$

$\tau \sim \exp(\lambda)$ ha densità $f_\tau(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{(t>0)}$ $\qquad = \frac{-\lambda}{r+\lambda}\{ e^{-(r+\lambda)T} - 1 \}$

$$P_{FV}(0,T) = x e^{-(r+\lambda)T} + x(1-\delta)\frac{\lambda}{r+\lambda}\left(1 - e^{-(r+\lambda)T}\right)$$

Scritto del 13 giugno 2019
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

1. Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes, ossia soluzione della EDS

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0,$$

con μ, e $\sigma > 0$ costanti. Si indichi con $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente.

(i) Individuare l'unica misura martingala Q e scrivere la dinamica di S_t rispetto a Q.
(ii) Determinare il prezzo $v(t,x)$ (al tempo $t \in [0,T]$ se $S_t = x$) del derivato di payoff finale $F(S_T) = S_T^2 - log(S_T)$.
(iii) Calcolare il delta del portafoglio di coperture al tempo t se $S_t = x$, la strategia di copertura prevede vendite allo scoperto? Calcolare per quali valori di S_0, al tempo $t = 0$, il delta é negativo.
(iv)Verificare che $v(t,x)$ risolve l'equazione di valutazione di Black & Scholes.
(v) **Facoltativo:** Applicare la formula di Ito per determinare la dinamica del processo $Y_t = S_t^2 - log(S_t)$ rispetto alla misura Q.

2. Si consideri un mercato finanziario con due titoli rischiosi i cui prezzi $\{S_t^1\}_{t\geq 0}$ e $\{S_t^2\}_{t\geq 0}$ sono soluzioni delle equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^1) \quad S_0^1 > 0$$
$$dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_2 dW_t^2), \quad S_0^2 > 0.$$

con $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ e $\{W_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, moti browniani correlati $E[W_t^1 W_t^2] = \rho t$, $\rho \in [0, 1)$. Sia $r > 0$ tasso d'interesse istantaneo privo di rischio.
(i) Mostrare che il mercato finanziario é completo. Per $\rho = 1$ il mercato rimane completo?
Suggerimento: scrivere $W_t^2 = \rho W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} B_t$, con B_t moto browniano indipendente da W_t^1.
(ii) Mostrare che esiste ed é unica la misura martingala Q tale che

$$dS_t^1 = S_t^1(rdt + \sigma_1 dW_t^{1,Q}) \quad S_0^1 > 0$$
$$dS_t^2 = S_t^2(rdt + \sigma_2 dW_t^{2,Q}), \quad S_0^2 > 0$$

con $W_t^{1,Q}$ e $W_t^{2,Q}$ moti browniani correlati rispetto a Q, $E[W_t^{1,Q} W_t^{2,Q}] = \rho t$.
(iii) Calcolare il prezzo $v(t, x_1, x_2)$ di un derivato al tempo t se $S_t^1 = x_1$ e $S_t^2 = x_2$ di payoff finale $log(S_T^1) log(S_T^2)$:

$$v(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)} E^Q[log(S_T^1) log(S_T^2) | S_t^1 = x_1, S_t^2 = x_2].$$

Suggerimento: Assumere $E^Q[(W_T^{1,Q} - W_t^{1,Q})(W_T^{2,Q} - W_t^{2,Q})] = \rho(T-t)$
(iv) **Facoltativo:** Dimostrare se due moti browniani sono tali che $E[W_t^1 W_t^2] = \rho t$ $\forall t$, allora $E[(W_T^1 - W_t^1)(W_T^2 - W_t^2)] = \rho(T-t)$ $\forall t < T$.

3. Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente. Il valore di mercato al $t = 6$ mesi di un free-defaultable ZCB di maturitá $T = 12$ mesi e valore nominale 100 euro é pari a 98 euro.
i) Sia il prezzo $p(t,T)$ al $t = 6$ mesi di un DZCB di maturitá $T = 12$ mesi e di valore nominale 100 euro é pari a 88 euro. Determinare l'intensitá di default λ dell'istituzione finanziaria.
ii) Determinare il prezzo $p_{RT}(t,T)$ con $t = 6$ mesi e $T = 12$ mesi di un DZCB di valore nominale 100 euro e recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta = 0,75$.
iii) Sia il prezzo al $t = 6$ mesi di un DZCB (senza recovery) emesso da un'altra istituzione finanziaria di maturitá $T = 12$ mesi e di valore nominale 100 euro pari a 80 euro. Determinare lo spread tra le due istituzioni.

Scritto di Titoli Derivati e Gestione del Rischio II   AA 2018-19

Prof. Claudia Ceci

(1) $dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t) \qquad S_0 > 0$

Q è una misura martingala se $S_t e^{-rt}$ è una Q-mg, ossia

$\forall\, s<t \qquad \mathbb{E}^Q(S_t e^{-rt} \mid \mathcal{F}_s) = S_s e^{-rs}$

Rispetto alla misura Q la dinamica di S_t: $\boxed{dS_t = S_t(r\, dt + \sigma\, dW_t^Q)}$

da qui segue che $S_t(r\, dt + \sigma\, dW_t^Q) = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t) \Rightarrow dW_t^Q = \frac{\mu-r}{\sigma} dt + dW_t$

Per il teorema di Girsanov esiste una sola misura equivalente Q: $\boxed{dW_t^Q = \frac{\mu-r}{\sigma} dt + dW_t}$

$\frac{\mu-r}{\sigma}$ è il unico prezzo di mercato del rischio del titolo

(ii) Per la valutazione neutrale al rischio

$$v(t,x) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^Q[\, S_T^2 - \lg(S_T) \mid S_t = x\,]$$

L'equazione $dS_t = S_t(r\, dt + \sigma\, dW_t^Q)$ ha come unica soluzione $S_t = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t^Q}$

$$\Rightarrow \quad S_T = S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q)}$$

$$S_T^2 = S_t^2 e^{2(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + 2\sigma(W_T^Q - W_t^Q)} \qquad \lg(S_T) = (r-\tfrac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q) + \lg S_t$$

$$v(t,x) = e^{-r(T-t)} \{ x^2 e^{2(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}\, \mathbb{E}^Q[e^{2\sigma(W_T^Q - W_t^Q)}] - (r-\tfrac{\sigma^2}{2})(T-t) - \lg x$$

$$- \sigma\, \mathbb{E}^Q[W_T^Q - W_t^Q] \}$$

Essendo $W_t^{Q} \sim N(0,t) \Rightarrow E^{Q}(W_T^{Q} - W_t^{Q}) = 0$

e $E[e^{2\sigma(W_T^{Q} - W_t^{Q})}] = E[e^{2\sigma\sqrt{T-t}\,N}] = e^{\frac{4\sigma^2(T-t)}{2}} = e^{2\sigma^2(T-t)}$

$W_T^{Q} - W_t^{Q} \sim \sqrt{T-t}\,N$ con $N \sim N(0,1)$

$$\Rightarrow v(t,x) = x^2 e^{r(T-t)} e^{-\sigma^2(T-t)} e^{2\sigma^2(T-t)} - e^{-r(T-t)}\left\{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \lg x\right\}$$

$$\boxed{v(t,x) = x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} - e^{-r(T-t)}\left\{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \lg x\right\}}$$

(iii) $\boxed{\delta(t,x) = \frac{\partial v}{\partial x} = 2x e^{(r+\sigma^2)(T-t)} - \frac{e^{-r(T-t)}}{x}}$

poichè $\delta(t,x)$ può assumere anche valori negativi, il portafoglio di copertura prevede anche posizioni allo scoperto:

$$2x e^{(r+\sigma^2)(T-t)} - \frac{e^{-r(T-t)}}{x} < 0 \qquad 2x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} < e^{-r(T-t)}$$

$$x^2 < \frac{1}{2} e^{-(2r+\sigma^2)(T-t)}$$

al tempo $t=0$ si ha una posizione allo scoperto se $\boxed{S_0 < \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-(r+\frac{\sigma^2}{2})T}}$ e $\delta(0,S_0) = 2S_0 e^{(r+\sigma^2)T} - \frac{1}{S_0} e^{-rT} < 0$

$$0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}$$

(iv) $\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + rx\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rv = 0 \\ v(T,x) = x^2 - \lg x \end{cases}$ verificato

$v_2 = e^{-r(T-t)}\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \lg x\right]$

$v_1 = x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -(r+\sigma^2)v_1 - \left[r e^{-r(T-t)}\left\{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \lg x\right\} + e^{-r(T-t)}\left(-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)\right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x e^{(r+\sigma^2)(T-t)} - \frac{e^{-r(T-t)}}{x} \Rightarrow rx\frac{\partial v}{\partial x} = 2r v_1 - r e^{-r(T-t)}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} + \frac{e^{-r(T-t)}}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \sigma^2 v_1 + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{-r(T-t)}$$

$$-(r+\sigma^2)V_1 - r\, V_2 + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)e^{-r(T-t)} + \sigma^2 V_1 + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{-r(T-t)} - r(V_1 - V_2) =$$

$$2rV_1 - re^{-r(T-t)}$$

$$-(r+\sigma^2)V_1 + \sigma^2 V_1 + 2rV_1 - rV_1 = 0$$

$$-rV_2 + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)e^{-r(T-t)} - re^{-r(T-t)} + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{-r(T-t)} + rV_2 = 0$$

Verificata

(v) Facoltativa: Formula di Itô

$$f(x) = x^2 - \log x \qquad f'(x) = 2x - \frac{1}{x} \qquad f''(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$df(S_t) = \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f''(S_t)\,dt + f'(S_t)\underbrace{dS_t}_{S_t(r + \sigma\, dW_t^{Q})}$$

$$df(S_t) = \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\left(2 + \frac{1}{S_t^2}\right)dt + \left(2S_t - \frac{1}{S_t}\right)S_t\left(r\overset{dt}{} + \sigma\, dW_t^{Q}\right)$$

$$df(S_t) = \left(\sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + 2S_t^2\left(r\overset{dt}{} + \sigma\, dW_t^{Q}\right) - \left(r\overset{dt}{} + \sigma\, dW_t^{Q}\right)$$

$$df(S_t) = \left[S_t^2(\sigma^2 + 2r) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]dt + 2S_t^2\sigma\, dW_t^{Q} - \sigma\, dW_t^{Q}$$

$$df(S_t) = S_t^2\left[(\sigma^2 + 2r)\,dt + 2\sigma\, dW_t^{Q}\right] - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t - \sigma\, dW_t^{Q}$$

② $\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^1) \\ dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_2 dW_t^2) \end{cases}$ $\quad E(W_t^1 W_t^2) = \rho t \quad \rho \in [0,1)$

$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^1) \\ dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_2 \rho\, dW_t^1 + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\, dB_t) \end{cases}$$ B_t e W_t^1 indipendenti

matrice volatilità

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2\rho & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}$$

Le misure martingala si trovano determinando le soluzioni del sistema $\underline{\sigma}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu_1 - r\\ \mu_2 - r\end{pmatrix}$

$\det\underline{\sigma} = \sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \neq 0$ se $\rho \neq \pm 1$ dunque per $0 \le \rho < 1$ il $\det\underline{\sigma} \neq 0$ e quindi $\exists!$ la soluzione del sistema. Per il secondo teorema fondamentale dell'Asset Pricing un mercato risulta completo (ogni derivato su (S^1, S^2) può essere replicato da una strategia autofinanziante) $\Leftrightarrow$ $\exists!$ Q misura martingala.

Ne consegue che il mercato è completo, e l'unica misura Q è individuata dal vettore dei prezzi di mercato del rischio:

$$\begin{cases} \sigma_1\theta_1 = \mu_1 - r \\ \sigma_2\rho\,\theta_1 + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\,\theta_2 = \mu_2 - r \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \\ \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\,\theta_2 = \mu_2 - r - \sigma_2\rho\dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \\ \theta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\dfrac{\mu_2 - r}{\sigma_2} - \dfrac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \end{cases}}$$

$$\begin{cases} W_t^{1,Q} = W_t^1 + \theta_1 t \\ B_t^{Q} = B_t + \theta_2 t \end{cases}$$ e la misura Q è completamente individuata dal teorema di Girsanov

Osserviamo che per $\rho = 1$ il sistema diventa $\begin{cases} \sigma_1 \Theta_1 = \mu_1 - r \\ \sigma_2 \Theta_1 = \mu_2 - r \end{cases}$ $\Theta_1 = \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_1}$

ed esiste una misura martingale solo se $\dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \dfrac{\mu_2 - r}{\sigma_2}$

Se $\dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \neq \dfrac{\mu_2 - r}{\sigma_2}$ il mercato risulta incompleto in quanto non esiste $\mathbb{Q}$ (è un mercato che permette arbitraggi)

(ii) Per $\rho \in [0,1)$ il mercato è completo, $\exists!\ \mathbb{Q}$ e rispetto a $W_t^{1,\mathbb{Q}}$ e $W_t^{2,\mathbb{Q}}$ la dinamica dei prezzi è data da

$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1 (r\,dt + \sigma_1\, dW_t^{1,\mathbb{Q}}) \\ dS_t^2 = S_t^2 \left\{ \mu_2 dt + \sigma_2 \rho \left(dW_t^{1,\mathbb{Q}} - \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_1} dt \right) + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \left[dB_t^{\mathbb{Q}} - \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \dfrac{\mu_2 - r}{\sigma_2} - \dfrac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \right) dt \right] \right\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow dS_t^2 = S_t^2 \left\{ r\,dt + \sigma_2 \rho\, dW_t^{1,\mathbb{Q}} - \rho \sigma_2 \cancel{\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1}}\, dt + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}\, dB_t^{\mathbb{Q}} + \sigma_2 \rho \cancel{\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1}}\, dt \right\}$$

$$dS_t^2 = S_t^2 \{ r\,dt + \sigma_2 \underbrace{(\rho\, dW_t^{1,\mathbb{Q}} + \sqrt{1-\rho^2}\, dB_t^{\mathbb{Q}})}_{dW_t^{2,\mathbb{Q}}} \}$$

essendo W_t^1 e B_t indipendenti rispetto a $\mathbb{P}$, $W_t^{1,\mathbb{Q}}$ e $B_t^{\mathbb{Q}}$ sono indipendenti rispetto a $\mathbb{Q}$ ne segue che $W_t^{1,\mathbb{Q}}$ e $W_t^{2,\mathbb{Q}}$ sono correlati e $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(W_t^{1,\mathbb{Q}} W_t^{2,\mathbb{Q}}) = \rho t$

(iii) $v(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\log S_T^1 \cdot \log S_T^2 \mid S_t^1 = x_1, S_t^2 = x_2]$

$$S_T^1 = S_t^1 e^{(r - \sigma_1^2/2)(T-t) + \sigma_1 (W_T^{1,\mathbb{Q}} - W_t^{1,\mathbb{Q}})}$$

$$S_T^2 = S_t^2 e^{(r - \sigma_2^2/2)(T-t) + \sigma_2 (W_T^{2,\mathbb{Q}} - W_t^{2,\mathbb{Q}})}$$

$$\log S_T^1 = \log S_t^1 + \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_1 (W_T^{1,\mathbb{Q}} - W_t^{1,\mathbb{Q}})$$

$$\lg S_T^2 = \lg S_t^2 + \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_2 \left(W_T^{2,Q} - W_t^{2,Q}\right)$$

$$E^Q\left[\lg S_T^1 \cdot \lg S_T^2 \mid S_t^1 = x_1,\ S_t^2 = x_2\right] = E^Q\left[\left(\lg x_1 + \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_1 \left(W_T^{1Q} - W_t^{1Q}\right)\right)\left(\lg x_2 + \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_2\left(W_T^{2Q} - W_t^{2Q}\right)\right)\right]$$

$$= \lg x_1 \cdot \lg x_2 + \lg x_1 \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t) + \lg x_2 \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t) + \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t)^2 +$$

$$+ \left(\lg x_1 + \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t)\right) E^Q\big[\sigma_2 \underbrace{\left(W_T^{2,Q} - W_t^{2,Q}\right)}_{=0}\big] + \left(\lg x_2 + \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t)\right) E^Q\big[\sigma_1 \underbrace{\left(W_T^{1,Q} - W_t^{1,Q}\right)}_{=0}\big]$$

$$+ \sigma_1 \cdot \sigma_2 \underbrace{E^Q\left[\left(W_T^{1,Q} - W_t^{1,Q}\right)\left(W_T^{2,Q} - W_t^{2,Q}\right)\right]}_{\rho (T-t)}$$

$$\boxed{v(t, x_1, x_2) = \lg x_1 \cdot \lg x_2 + \lg x_1 \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t) + \lg x_2 \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t) + \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t)^2 + \rho\, \sigma_1 \sigma_2 (T-t)}$$

Facoltativo:

osserviamo che $E(W_t^1 W_T^2) = E(E(W_t^1 W_T^2 \mid \mathcal{F}_t)) = E(W_t^1\, E(W_T^2 \mid \mathcal{F}_t)) = E(W_t^1 W_t^2) = \rho t$

prop. della media condizionale

$\{W_t^2\}_t$ è una mg

$$E\left((W_T^1 - W_t^1)(W_T^2 - W_t^2)\right) = \underbrace{E(W_T^1 W_T^2)}_{\rho T} + \underbrace{E(W_t^1 W_t^2)}_{\rho t} - \underbrace{E(W_T^1 W_t^2)}_{\rho t} - \underbrace{E(W_t^1 W_T^2)}_{\rho t} = \rho (T-t)$$

3 $\tau \sim \exp(\lambda)$ $\qquad P_0(t,T) = 100\, e^{-r\frac{1}{2}} = 98\,€$

$T-t = 6$ mesi $\qquad = 100\, e^{-r(T-t)}$

(i)

$$P_1(t,T) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[100\, \mathbb{1}_{\{\tau>T\}} \mid \tau>t\right] = e^{-r(T-t)}\, 100\, \overbrace{\mathbb{Q}(\tau>T \mid \tau>t)}^{e^{-\lambda(T-t)}}$$

$$P(t,T) = 100\, e^{-r(T-t)}\, e^{-\lambda(T-t)} = P_0(t,T)\, e^{-\lambda(T-t)}$$

$$\frac{P(t,T)}{P_0(t,T)} = e^{-\lambda(T-t)} \qquad \boxed{\lambda = -\frac{1}{T-t} \log\left(\frac{P_1(t,T)}{P_0(t,T)}\right)} = -2\log\left(\frac{88}{98}\right) = 0.2153$$

(ii)

$$P_{RT}(t,T) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[100\, \mathbb{1}_{\{\tau>T\}} + 100\underbrace{(1-\delta)}_{0.75}\, \mathbb{1}_{\{\tau<T\}} \mid \tau>t\right]$$

$$= 100\, e^{-r(T-t)}\, e^{-\lambda(T-t)} + 75\, e^{-r(T-t)}\, \underbrace{\mathbb{Q}(\tau<T \mid \tau>t)}_{1-\mathbb{Q}(\tau>T\mid\tau>t) = 1-e^{-\lambda(T-t)}}$$

$$= 75\, e^{-r(T-t)} + (100-75)\, e^{-r(T-t)}\, e^{-\lambda(T-t)}$$

$$\boxed{P_{RT}(t,T) = 75\, e^{-r(T-t)} + 25\, e^{-(r+\lambda)(T-t)}}$$

poiché $P_0(t,T) = 100\, e^{-r(T-t)} = 98 \Rightarrow e^{-r(T-t)} = \frac{98}{100}$

poiché $P(t,T) = 100\, e^{-(r+\lambda)(T-t)} = 88 \Rightarrow e^{-(r+\lambda)(T-t)} = \frac{88}{100}$

$$\boxed{P_{RT}(t,T) = 75 \cdot \frac{98}{100} + 25 \cdot \frac{88}{100} = 95.5\,€}$$

(iii) Lo spread tra le due istituzioni è rappresentato dalla differenza dei loro rendimenti (logaritmici)

$$P_1(t,T) = P_0(t,T)\, e^{-\lambda_1 (T-t)} = 88 \qquad P_2(t,T) = P_0(t,T)\, e^{-\lambda_2 (T-t)} = 80 \qquad \frac{P_1(t,T)}{P_2(t,T)} = \frac{e^{-\lambda_1(T-t)}}{e^{-\lambda_2(T-t)}} = e^{-(\lambda_1-\lambda_2)(T-}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 - \lambda_2 = -\frac{1}{T-t} \log\left(\frac{P_1(t,T)}{P_2(t,T)}\right) = -2 \log\left(\frac{88}{80}\right) = -0.19$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_2 - \lambda_1 = 0.19 = 19\% \quad \text{spread}}$$

Questo significa che l'intensità di default della seconda istituzione è pari a $0.19 + 0.2153 = 0.$

Scritto del 4 luglio 2019
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

1.
Si consideri un mercato finanziario con due titoli rischiosi i cui prezzi $\{S_t^1\}_{t\geq 0}$ e $\{S_t^2\}_{t\geq 0}$ sono soluzioni delle equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^1) \quad S_0^1 > 0$$
$$dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_2 dW_t^2), \quad S_0^2 > 0.$$

con $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ e $\{W_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, moti browniani indipendenti.Sia $r > 0$ tasso d'interesse istantaneo privo di rischio.
(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente Q e di mercato completo.
(ii) Il mercato finanziario é completo? (Giustificare la risposta)
(iii) Siano $\widetilde{S}_t^i = e^{-rt}S_t^i$, $i = 1, 2$ i prezzi scontati dei titoli. Sia $h_t = (\alpha_t^1, \alpha_t^2, \beta_t)$ una strategia autofinanziante, di valore $V_t^h = \alpha_t^1 S_t^1 + \alpha_t^2 S_t^2 + \beta_t e^{rt}$ e $\widetilde{V}_t^h = e^{-rt}V_t^h$. Mostrare che
$$d\widetilde{V}_t^h = \alpha_t^1 d\widetilde{S}_t^1 + \alpha_t^2 d\widetilde{S}_t^2.$$
(iv) Rispetto alla misura martingala Q, $\widetilde{V}_t^h$ é una martingala?

2.
Si consideri il mercato finanziario dell'esercizio 1.
(i) Calcolare il prezzo $v(t, x_1, x_2)$ (al tempo $t \in [0, T]$ se $S_t^1 = x_1$, $S_t^2 = x_2$) del derivato di payoff finale $F(S_T^1, S_T^2) = \sqrt{S_T^1} + \sqrt{S_T^2} I_{\{S_T^1 < k\}}$, ove k é una costante positiva.
(ii) Sia $Y_t = \sqrt{S_t^1}$. Il processo $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ é un moto browniano geometrico? Ossia risolve una EDS della forma

$$dY_t = Y_t(\bar{\mu} + \bar{\sigma} dW_t^1)$$

In caso di risposta affermativa determinare il suo rendimento atteso $\bar{\mu}$ e volatilitá $\bar{\sigma}$.
(**Suggerimento**: Applicare la formula di Ito per determinare la dinamica del processo $Y_t = \sqrt{S_t^1}$).
(iii) **Facoltativo:** Calcolare

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_1, x_2), \quad \frac{\partial v}{\partial x_2}(t, x_1, x_2).$$

Che cosa rappresentano queste quantitá?

3.
Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente annuo.
i) Determinare il prezzo $p_{RT}(0, T)$ di un DZCB con recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta$, di valore nominale x e maturitá T.
ii) Sia oggi il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 100 euro, maturitá $T = 2$ anni, pari a $p_0 = 95$ euro e quello di un DZCB, di stesso valore nominale e maturitá, con recovery of treasury del 60% pari a $p_{RT} = 90$ euro. Determinare l'intensitá di default λ dell'istituzione finanziaria.
iii) Determinare il prezzo $p_{FV}(0, T)$ di un DZCB con recovery face value (pagato nell'istante di default) pari al 60%, valore nominale 100 euro e maturitá $T = 2$ anni.

Titoli Derivati e Gestione del Rischio II Scritto del 4/07/19 prof. Claudia Ceci

1) $dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^1)$ $S_0^1 > 0$

$dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_2 dW_t^2)$ $S_0^2 > 0$

$\{W_t^1\}$ e $\{W_t^2\}$ moti browniani indipendenti

(i) Q è una misura martingala equivalente se:

- $Q \sim P$ equivalente a P $\forall A \in \mathcal{F}$: $Q(A)=0 \iff P(A)=0$
- $S_t^i e^{-rt}$ $i=1,2$ Q- martingale ossia $\forall s \geq t$ $E^Q[\, S_s^i e^{-rs} \mid \mathcal{F}_t] = S_t^i e^{-rt}$

ossia $E^Q[\, S_s^i \mid \mathcal{F}_t] = S_t^i e^{r(s-t)}$

di payoff finale $F(S_T^1, S_T^2)$

Un mercato finanziario si dice completo se $\forall$ derivato Γ $\exists$ una strategia autofinanziante che replica il derivato : $\exists$ $R_t = (\alpha_t^1, \alpha_t^2, \beta_t)$

α_t^i investimento in S_t^i

β_t investimento nel titolo non rischioso

tale che detto $V_t^R = \alpha_t^1 S_t^1 + \alpha_t^2 S_t^2 + \beta_t e^{+rt}$ il valore al tempo t della strategia

(autofinanziamento) $dV_t^R = \alpha_t^1 dS_t^1 + \alpha_t^2 dS_t^2 + \beta_t dB_t$ $B_t = e^{+rt}$

(replica) $V_T^R = F(S_T^1, S_T^2)$ $dB_t = B_t\, r\, dt$

e inoltre il mercato non deve permettere opportunità di arbitraggio.

In un mercato completo $\exists!$ prezzo di non arbitraggio (che non permette arbitraggi) ed è uguale al valore del portafoglio di copertura V_t^R, $\forall\, t \in [0,T]$.

(ii) Per il secondo teorema fondamentale dell'"Asset Pricing" un mercato (privo di arbitraggi) è completo $\iff \exists!\ Q$ misura martingala equivalente

Le misure Q si trovano risolvendo il sistema lineare:

$$\underline{\sigma}\,\underline{\theta} = \underline{\mu} - \underline{r} \qquad \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \qquad \underline{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$ prezzo di mercato del rischio e $\underline{\mu} - \underline{r} = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \sigma_1 \theta_1 = \mu_1 - r \\ \sigma_2 \theta_2 = \mu_2 - r \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \\ \theta_2 = \dfrac{\mu_2 - r}{\sigma_2} \end{cases}$$ $\exists!$ soluzione $\underline{\theta} \iff \exists!\, Q$

Q è quella misura tale che $\begin{cases} W_t^{1,Q} = W_t^1 + \theta_1 t \\ W_t^{2,Q} = W_t^2 + \theta_2 t \end{cases}$ Q - moti browniani

Q è individuata dal teorema di Girsanov, e rispetto a Q la dinamica di (S^1, S^2) si scrive:

$$dS_t^i = S_t^i(\mu_i dt + \sigma_i dW_t^i) = S_t^i\left\{r\,dt + \sigma_i\left(dW_t^i + \frac{\mu_i - r}{\sigma_i}dt\right)\right\} = S_t^i\{r\,dt + \sigma_i dW_t^{i,Q}\} \quad i = 1,$$

(iii) $\tilde{S}_t^i = e^{-rt} S_t^i \quad \Rightarrow \quad \boxed{d\tilde{S}_t^i = -r e^{-rt} S_t^i dt + e^{-rt} \underbrace{dS_t^i}_{S_t^i(\mu_i dt + \sigma_i dW_t^i)}}$ (*)

osserviamo che

$\Rightarrow \quad d\tilde{S}_t^i = \tilde{S}_t^i(\mu_i - r + \sigma_i dW_t^i)$

$d\tilde{S}_t^i = \tilde{S}_t^i \sigma_i dW_t^{i,Q} \quad \Rightarrow \quad \tilde{S}_t^i$ è una Q-mg, $i = 1,2$ in quanto è integrale di Itô rispetto al moto browniano è una martingala e $\tilde{S}_t^i = \int_0^t \tilde{S}_s^i \sigma_i dW_s^{i,Q}$

$$d\tilde{V}_t^R = -r e^{-rt} V_t^R dt + e^{-rt} \underbrace{dV_t^R}_{\alpha_t^1 dS_t^1 + \alpha_t^2 dS_t^2 + \beta_t r e^{rt} dt}$$

$$d\tilde{V}_t^R = -r e^{-rt}(\alpha_t^1 S_t^1 + \alpha_t^2 S_t^2 + \beta_t e^{rt})dt + e^{-rt}(\alpha_t^1 dS_t^1 + \alpha_t^2 dS_t^2 + \beta_t r e^{rt} dt)$$

$$= \alpha_t^1(-r e^{-rt} S_t^1 dt + e^{-rt} dS_t^1) + \alpha_t^2(-r e^{-rt} S_t^2 dt + e^{-rt} dS_t^2) \stackrel{(*)}{=} \alpha_t^1 d\tilde{S}_t^1 + \alpha_t^2 d\tilde{S}_t^2$$

(iv) rispetto a $\mathbb{Q}$ il valore del portafoglio scontato è una martingala

in quanto $\quad d\tilde{V}^{\varphi}_t = \alpha^1_t \, d\tilde{S}^1_t + \alpha^2_t \, d\tilde{S}^2_t =$

$$= \alpha^1_t \, \sigma_1 \tilde{S}^1_t \, dW^{1,\mathbb{Q}}_t + \alpha^2_t \, \sigma_2 \tilde{S}^2_t \, dW^{2,\mathbb{Q}}_t$$

e $m_t = \int_0^t u_s \, dW^{i,\mathbb{Q}}_s$ $\quad (dm_t = u_t \, dW^{i,\mathbb{Q}}_t)$ risulta essere una martingala

2) Per la valutazione neutrale al rischio:

$$\boxed{v(t,x_1,x_2) = e^{-r(T-t)} \, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sqrt{S^1_T} + \sqrt{S^2_T} \, \mathbb{1}_{\{S^1_T < K\}} \;\middle|\; S^1_t = x_1, \, S^2_t = x_2 \right]} =$$

$$= e^{-r(T-t)} \left\{ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sqrt{S^1_T} \;\middle|\; S^1_t = x_1 \right] + e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sqrt{S^2_T} \, \mathbb{1}_{\{S^1_T < K\}} \;\middle|\; S^1_t = x_1, \, S^2_t = x_2 \right] \right\}$$

$$S^1_T = S^1_t \, e^{(r - \sigma_1^2/2)(T-t) + \sigma_1 (W^{1,\mathbb{Q}}_T - W^{1,\mathbb{Q}}_t)}$$

Calcoliamo il primo valore atteso:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sqrt{S^1_t} \, e^{\frac{1}{2}(r - \sigma_1^2/2)(T-t) + \frac{\sigma_1}{2}(W^{1,\mathbb{Q}}_T - W^{1,\mathbb{Q}}_t)} \;\middle|\; S^1_t = x_1 \right] = \sqrt{x_1} \, e^{\frac{1}{2}(r - \sigma_1^2/2)(T-t)} \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma_1/2 \sqrt{T-t} \, N} \right]}_{= e^{\frac{\sigma_1^2}{8}(T-t)}}$$

$$= \sqrt{x_1} \, e^{\frac{1}{2} r (T-t)} \, e^{\left(-\frac{\sigma_1^2}{4} + \frac{\sigma_1^2}{8}\right)(T-t)} = \sqrt{x_1} \, e^{\frac{r}{2}(T-t)} \, e^{-\frac{\sigma_1^2}{8}(T-t)}$$

$\mathbb{E}[e^{aN}] = e^{a^2/2}$

$N \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\Rightarrow e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sqrt{S^1_T} \;\middle|\; S^1_t = x_1 \right] = \sqrt{x_1} \, e^{-\frac{1}{2}\left(r + \frac{\sigma_1^2}{4}\right)(T-t)}$$

Calcoliamo il secondo valore atteso:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sqrt{S^2_T} \, \mathbb{1}_{\{S^1_T < K\}} \;\middle|\; S^1_t = x_1, \, S^2_t = x_2 \right] \underset{\uparrow}{=} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sqrt{S^2_T} \;\middle|\; S^2_t = x \right] \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{S^1_T < K\}} \;\middle|\; S^1_t = x_1 \right]$$

essendo $\{S^1_t\}$ e $\{S^2_t\}$ indipendenti

- Calcoliamo $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{S^1_T<K\}} \mid S^1_t = x_1\right] = \mathbb{Q}(S^1_T < K \mid S^1_t = x_1) = \mathbb{Q}\left(x_1 e^{(r-\sigma_1^2/2)(T-t) + \sigma_1 (W^{1,\mathbb{Q}}_T - W^{1,\mathbb{Q}}_t)} < K \right)$

$$= \mathbb{Q}\left(e^{(r-\sigma_1^2/2)(T-t) + \sigma_1 (W^{1,\mathbb{Q}}_T - W^{1,\mathbb{Q}}_t)} < \frac{K}{x_1} \right) = \mathbb{Q}\left(\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_1 \sqrt{T-t}\, N < \ln\left(\frac{K}{x_1}\right)\right) =$$

$$= \mathbb{Q}\Bigg(N < \underbrace{\frac{\ln(K/x_1) - (r-\sigma_1^2/2)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}}}_{=\,d(t,x_1)} \Bigg) = \Phi(d(t,x_1))$$ ove $\Phi(x)$ funzione di distribuzione della normale standard

$$\Rightarrow \boxed{v(t,x_1,x_2) = \sqrt{x_1}\, e^{-\frac{1}{2}\left(r+\frac{\sigma_1^2}{4}\right)(T-t)} + \sqrt{x_2}\, e^{-\frac{1}{2}\left(r+\frac{\sigma_2^2}{4}\right)(T-t)}\, \Phi(d(t,x_1))}$$

(ii) $$\delta_1(t,x_1,x_2) = \frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} e^{-\frac{1}{2}\left(r+\frac{\sigma_1^2}{4}\right)(T-t)} + \sqrt{x_2}\, e^{-\frac{1}{2}\left(r+\frac{\sigma_2^2}{4}\right)(T-t)}\, \Phi'(d(t,x_1))\frac{\partial d}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial d}{\partial x_1} = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{T-t}}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\ln\left(\frac{x_1}{K}\right)\right) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{T-t}}\left(-\frac{1}{\frac{x_1}{K}}\frac{1}{K}\right) = -\frac{1}{x_1\sigma_1\sqrt{T-t}}$$

$$\Phi'(d(t,x_1)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d(t,x_1)^2}{2}}$$ in quanto $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

$$\Rightarrow \delta_1(t,x_1,x_2) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} e^{-\frac{1}{2}\left(r+\frac{\sigma_1^2}{4}\right)(T-t)} - \frac{\sqrt{x_2}\, e^{-\frac{1}{2}\left(r+\frac{\sigma_2^2}{4}\right)(T-t)}}{x_1\sigma_1\sqrt{T-t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d^2(t,x_1)}{2}}$$

$$\delta_2(t,x_1,x_2) = \frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{1}{2\sqrt{x_2}} e^{-\frac{1}{2}\left(r+\frac{\sigma_2^2}{4}\right)(T-t)}\, \Phi(d(t,x_1))$$

Queste grandezze rappresentano le delta del portafoglio di copertura, ci forniscono ~~[illegible]~~ le quantità di azioni S^1 e S^2 da detenere nel portafoglio.

(iii) $Y_t = f(S^1_t)$

$$dY_t = \frac{1}{2}\sigma_1^2 (S^1_t)^2 f''(S^1_t)\,dt + f'(S^1_t)\,dS^1_t$$ formula di Itô

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad f''(x) = D\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x_1}\,x_1}$

$$dY_t = \frac{1}{2}\sigma_1^2 (S^1_t)^2\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{(S^1_t)^{3/2}}\right)dt + \frac{1}{2\sqrt{S^1_t}}S^1_t(\mu_1\,dt + \sigma_1\,dW^1_t)$$ $\quad 2-\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

$$dY_t = -\frac{1}{8}\sigma_1^2\sqrt{S^1_t}\,dt + \frac{1}{2}\sqrt{S^1_t}\,(\mu_1\,dt + \sigma_1\,dW^1_t)$$

$$dY_t = Y_t\left\{\left(\frac{1}{2}\mu_1 - \frac{1}{8}\sigma_1^2\right)dt + \frac{\sigma_1}{2}\,dW^1_t\right\} = Y_t\{\bar{\mu}\,dt + \bar{\sigma}\,dW^1_t\}$$

$\bar{\mu} = \frac{1}{2}\mu_1 - \frac{1}{8}\sigma_1^2$ $\qquad \bar{\sigma} = \frac{\sigma_1}{2}$

3) $Q(\tau > t) = e^{-\lambda t}$ $\quad \forall\, t > 0$ $\qquad Q(\tau \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$

(i) $P_{RT}(0,T) = e^{-rT}\,\mathbb{E}^Q\left[x\,\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + x(1-\delta)\,\mathbb{1}_{\{\tau \le T\}}\right] =$

$= x e^{-rT}\{Q(\tau > T) + (1-\delta)Q(\tau \le T)\} =$

$= x e^{-rT}\{e^{-\lambda T} + (1-\delta)(1 - e^{-\lambda T})\} = \boxed{x e^{-rT}\{1-\delta + \delta e^{-\lambda T}\}}$

(ii) $x = 100$ $\quad T = 2$ anni $\quad 1-\delta = 0.6$ (recovery)

$P_0 = 100\,e^{-rT} = 95€$ $\qquad P_{RT} = 100\,e^{-rT}\{0.6 + 0.4\,e^{-\lambda T}\} = 90€$

$$P_{RT} = P_0 \{0.6 + 0.4\, e^{-\lambda T}\} \qquad \frac{P_{RT}}{P_0} = 0.6 + 0.4\, e^{-\lambda T} \qquad e^{-\lambda T} = \left(\frac{P_{RT}}{P_0} - 0.6\right)\frac{1}{0.4}$$

$$\lambda T = -\ln\left\{\frac{P_{RT}}{P_0 \cdot 0.4} - \frac{0.6}{0.4}\right\} \qquad \lambda = -\frac{1}{2}\ln\left\{\frac{90}{95 \cdot 0.4} - \frac{0.6}{0.4}\right\} = 0.07$$

(iii) Se il recovery è pagato al tempo τ

$$P_{FV}(0,T) = \mathbb{E}^{Q}\left[x\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}}\, e^{-rT} + x(1-\delta)\, e^{-r\tau}\, \mathbb{1}_{\{\tau \le T\}}\right] =$$

$$= x\, e^{-rT} \underbrace{Q(\tau > T)}_{e^{-\lambda T}} + x(1-\delta)\, \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-r\tau}\, \mathbb{1}_{\{\tau \le T\}}\right]$$

$$\mathbb{E}^{Q}\left[e^{-r\tau}\, \mathbb{1}_{\{\tau \le T\}}\right] = \int_0^T e^{-ru}\, \lambda\, e^{-\lambda u}\, du = \lambda \int_0^T e^{-(r+\lambda)u}\, du = -\frac{\lambda}{r+\lambda}\, e^{-(r+\lambda)u}\Big|_0^T =$$

$$= -\frac{\lambda}{r+\lambda}\left\{e^{-(r+\lambda)T} - 1\right\}$$

$$\Rightarrow \quad P_{FV}(0,T) = x\, e^{-(r+\lambda)T} + x(1-\delta)\frac{\lambda}{r+\lambda}\left(1 - e^{-(r+\lambda)T}\right)$$

$1-\delta = 0.60 \quad x = 100 \quad T = 2$ anni $\qquad P_0 = 100\, e^{-rT} = 95€ \Rightarrow r = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{95}{100}\right) = 0.0256$

$$P_{FV}(0,T) = P_0\, e^{-\lambda T} + 100 \cdot 0.6 \cdot \frac{0.07}{0.0956}\left(1 - e^{-(0.0956)\cdot 2}\right)$$

$$= 82.58 + 7.65 = 90.23€$$

Scritto del 12 settembre 2019

Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II

Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

1. Si consideri un mercato finanziario con tre titoli rischiosi i cui prezzi $\{S_t^1\}_{t\geq 0}$, $\{S_t^2\}_{t\geq 0}$ e $\{S_t^3\}_{t\geq 0}$ sono soluzioni delle equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1) \quad S_0^1 > 0$$
$$dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_{22} dW_t^2), \quad S_0^2 > 0$$
$$dS_t^3 = S_t^3(\mu_3 dt + \sigma_{31} dW_t^1 + \sigma_{32} dW_t^2), \quad S_0^3 > 0$$

con $\sigma_{ij} > 0$, $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2$, $\{W_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, moti browniani indipendenti. Sia $r > 0$ tasso d'interesse istantaneo privo di rischio.
(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente Q e di mercato completo.
(ii) Determinare le condizioni sui parametri μ_i e σ_{ij} affinché il mercato finanziario sia libero da arbitraggi e completo.
(iii) Nella circostanza del punto ii), scrivere la dinamica dei prezzi S^1, S^2, S^3 rispetto alla misura Q.

2.Si consideri il mercato finanziario dell'esercizio 1. che é descritto rispetto alla misura Q, dato da

$$dS_t^1 = S_t^1(rdt + \sigma_{11} dW_t^{1,Q}) \quad S_0^1 > 0$$
$$dS_t^2 = S_t^2(rdt + \sigma_{22} dW_t^{2,Q}), \quad S_0^2 > 0$$
$$dS_t^3 = S_t^3(rdt + \sigma_{31} dW_t^{1,Q} + \sigma_{32} dW_t^{2,Q}), \quad S_0^3 > 0$$

con $\{W_t^{i,Q}\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, moti browniani indipendenti rispetto a Q.
(i) Applicare la formula di Ito a $log(S_t^i)$, $i = 1, 2$ per dimostrare che

$$S_t^1 = S_0^1 e^{(r-\sigma_{11}^2/2)t + \sigma_{11} W_t^{1,Q}}, \quad S_t^2 = S_0^2 e^{(r-\sigma_{22}^2/2)t + \sigma_{22} W_t^{2,Q}}.$$

(ii) (Facoltativo) Dedurre dal punto precedente che

$$S_t^3 = S_0^3 e^{(r-\sigma_{31}^2/2 - \sigma_{32}^2/2)t + \sigma_{31} W_t^{1,Q} + \sigma_{32} W_t^{2,Q}}.$$

[**Suggerimento:** Mostrare che $dS_t^3 = S_t^3(rdt + \sqrt{\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2} dW_t^{3,Q})$,
con
$W_t^{3,Q} := \frac{\sigma_{31}}{\sqrt{\sigma_{31}^2+\sigma_{32}^2}} W_t^{1,Q} + \frac{\sigma_{32}}{\sqrt{\sigma_{31}^2+\sigma_{32}^2}} W_t^{2,Q}$
moto browniano.]

(iii) Calcolare $v(t, x_1, x_2, x_3) = e^{-r(T-t)} \overset{Q}{E}[S_T^1 S_T^3 + S_T^2 S_T^3 | S_t^1 = x_1, S_t^2 = x_2, S_t^3 = x_3]$, e dire cosa rappresenta?
(iv)Calcolare $\frac{\partial v}{\partial x_i}(t, x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3.$
Che cosa rappresentano queste quantitá?

3. Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria (A) di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente annuo.
i) Determinare la formula del prezzo al tempo $t = 0$ di un DZCB con recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta$, di valore nominale x e maturitá T, $p_{RT}(0, T)$. Qual'é il valore nel caso in cui sia $x = 100$ euro, $\lambda = 3\%$, $r = 2\%$, $\delta = 30\%$ e $T = 1$ anno?
ii) Determinare la formula del prezzo $p_{FV}(0, T)$ di un DZCB con recovery face value (pagato nell'istante di default). Qual'é il valore nel caso in cui sia $x = 100$ euro, $\lambda = 3\%$, $r = 2\%$, $\delta = 30\%$ e $T = 1$ anno?
iii) Confrontare i valori $p_{RT}(0, T)$ e $p_{FV}(0, T)$.
iv) Un'altra istituzione finanziaria (B) ha emesso un DZCB con zero recovery, valore nominale 100 e maturitá $T = 1$ anno. Lo spread tra l'istituzione B e la A é pari al $1,5\%$, determinare l'intensitá di default dell'istituzione B. Motivare la risposta.

Titoli Derivati e Gestione del Rischio II

scritto del 12/09/19

$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$

1) $$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1) \\ dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_{22} dW_t^2) \\ dS_t^3 = S_t^3(\mu_3 dt + \sigma_{31} dW_t^1 + \sigma_{32} dW_t^2) \end{cases}$$

a) Q è una misura martingala equivalente

- se $Q \sim P$ ossia $A \in \mathcal{F}$ $Q(A) = 0 \iff P(A) = 0$
- $\{S_t^i e^{-rt}\}_{t \geq 0}$ $i = 1, 2, 3$ Q - martingala : $\forall s, t$ $\mathbb{E}^Q[S_t^i e^{-rt} | \mathcal{F}_s] = S_s^i e^{-rs}$ $\forall i = 1, 2, 3$

questo significa che la misura Q è neutrale al rischio, in particolare $\mathbb{E}^Q[S_t^i] = S_0^i e^{rt}$, il rendimento atteso di ogni titolo rispetto a Q coincide con r

Un mercato finanziario si dice completo se è libero da arbitraggio ed ogni derivato può essere replicato da una strategia autofinanziante

Per il primo teorema fondamentale dell'"Asset Pricing" un mercato è libero da arbitraggi se $\exists$ una misura martingala Q

Per il secondo teorema fondamentale dell'"Asset Pricing" un mercato libero da arbitraggi è completo se $\exists$ ed unica la misura martingala

Le misure mg si trovano risolvendo il seguente sistema $\underline{\sigma} \cdot \underline{\theta} = \underline{\mu} - \underline{r}$

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} \end{pmatrix} \qquad \underline{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mu} - \underline{r} = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \\ \mu_3 - r \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sigma_{11}\theta_1 = \mu_1 - r \\ \sigma_{22}\theta_2 = \mu_2 - r \\ \sigma_{31}\theta_1 + \sigma_{32}\theta_2 = \mu_3 - r \end{cases} \qquad \theta_1 = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} \qquad \theta_2 = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}}$$

esiste una soluzione solo se è verificata:

$$\sigma_{31}\frac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} + \sigma_{32}\frac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}} = \mu_3 - r$$

- se $\sigma_{31}\frac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} + \sigma_{32}\frac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}} \neq \mu_3 - r$ $\nexists$ $\mathbb{Q}$ e dunque il mercato ammette arbitraggi
- se $\boxed{\sigma_{31}\frac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} + \sigma_{32}\frac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}} = \mu_3 - r}$ $\exists !\, \mathbb{Q}$ ed è quella misura t.c.

$$\begin{cases} W_t^{1,\mathbb{Q}} = W_t^1 + \theta_1 t \\ W_t^{2,\mathbb{Q}} = W_t^2 + \theta_2 t \end{cases} \qquad \mathbb{Q}\text{- moti browniani}$$

e dunque il mercato risulta completo e libero da arbitraggi

(iii) $W_t^1 = W_t^{1,\mathbb{Q}} - \frac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} t$ $\quad W_t^2 = W_t^{2,\mathbb{Q}} - \frac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}} t$ andando a sostituire nelle equazioni dei prezzi

$$\Rightarrow \quad dS_t^1 = S_t^1 \left(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^{1,\mathbb{Q}} - \sigma_{11}\frac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} dt\right) = S_t^1 (r\,dt + \sigma_{11} dW_t^{1,\mathbb{Q}})$$

$$dS_t^2 = S_t^2 \left(\mu_2 dt + \sigma_{22} dW_t^{2,\mathbb{Q}} - \sigma_{22}\frac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}} dt\right) = S_t^2 (r\,dt + \sigma_{22} dW_t^{2,\mathbb{Q}})$$

$$dS_t^3 = S_t^3 \left\{\mu_3 dt + \sigma_{31}\left(dW_t^{1,\mathbb{Q}} - \frac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} dt\right) + \sigma_{32}\left(dW_t^{2,\mathbb{Q}} - \frac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}} dt\right)\right\}$$

$$= S_t^3 \left[\left(\mu_3 - \sigma_{31}\frac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} - \sigma_{32}\frac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}}\right) dt + \sigma_{31} dW_t^{1,\mathbb{Q}} + \sigma_{32} dW_t^{2,\mathbb{Q}}\right.$$

ma $\quad \sigma_{31} \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} + \sigma_{32} \dfrac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}} = \mu_3 - r$

$$\Rightarrow \quad dS^3_t = S^3_t \left(r\,dt + \sigma_{31}\, dW^{1,\varphi}_t + \sigma_{32}\, dW^{2,\varphi}_t \right)$$

2) $\begin{cases} dS^1_t = S^1_t (r\,dt + \sigma_{11}\, dW^{1,\varphi}_t) \\ dS^2_t = S^2_t (r\,dt + \sigma_{22}\, dW^{2,\varphi}_t) \end{cases}$

(i)
Formula di Itô:

$$f(S^1_t) = f'(S^1_t)\, dS^1_t + \frac{1}{2}(S^1_t \sigma_{11})^2 f''(S^1_t)\, dt$$

$f(x) = \log x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{x} \qquad f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$$\log(S^1_t) = \frac{1}{\cancel{S^1_t}} \cancel{S^1_t} (r\,dt + \sigma_{11}\, dW^{1,\varphi}_t) - \frac{1}{2} \cancel{(S^1_t)^2} \sigma_{11}^2 \frac{1}{\cancel{(S^1_t)^2}}\, dt = \left(r - \frac{1}{2}\sigma_{11}^2\right) dt + \sigma_{11}\, dW^{1,\varphi}_t$$

$$\log(S^1_t) = \log(S^1_0) + \int_0^t \left(r - \sigma_{11}^2/2\right) ds + \sigma_{11} W^{1,\varphi}_t \quad \Rightarrow \quad \log\left(\frac{S^1_t}{S^1_0}\right) = \left(r - \sigma_{11}^2/2\right) t + \sigma_{11}\, dW^{1,\varphi}_t$$

$$\Rightarrow \quad S^1_t = S^1_0\, e^{(r - \sigma_{11}^2/2)t + \sigma_{11}\, dW^{1,\varphi}_t}$$

in modo analogo otteniamo che

$$S^2_t = S^2_0\, e^{(r - \sigma_{22}^2/2)t + \sigma_{22}\, dW^{2,\varphi}_t}$$

(ii)
Osserviamo che, grazie alle proprietà delle gaussiane: $\quad W^{1,\varphi}_t \sim N(0,t) \quad W^{2,\varphi}_t \sim N(0,t)$ indip.

$$W^{3,\varphi}_t \sim N\left(0, \left(\frac{\sigma_{31}^2}{\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2} + \frac{\sigma_{32}^2}{\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2}\right) t\right) = N(0,t)$$

e $\quad \sigma_{31} W_t^{1,Q} + \sigma_{32} W_t^{2,Q} = \sqrt{\sigma_{31}^2+\sigma_{32}^2}\left(\dfrac{\sigma_{31}}{\sqrt{\sigma_{31}^2+\sigma_{32}^2}} W_t^{1,Q} + \dfrac{\sigma_{32}}{\sqrt{\sigma_{31}^2+\sigma_{32}^2}} W_t^{2,Q}\right)$

$$= \sqrt{\sigma_{31}^2+\sigma_{32}^2}\; W_t^{3,Q}$$

$$\Rightarrow \quad dS_t^3 = S_t^3\left(r\,dt + \sqrt{\sigma_{31}^2+\sigma_{32}^2}\; dW_t^{3,Q}\right)$$

e quindi procedendo con la formula di Itô come al punto precedente si ottiene che

$$S_t^3 = S_0^3\, e^{\left(r - \left(\sqrt{\sigma_{31}^2+\sigma_{32}^2}\right)^2/2\right)t + \sqrt{\sigma_{31}^2+\sigma_{32}^2}\, W_t^{3,Q}}$$

$$S_t^3 = S_0^3\, e^{\left(r - \sigma_{31}^2/2 - \sigma_{32}^2/2\right)t + \sigma_{31} W_t^{1,Q} + \sigma_{32} W_t^{2,Q}}$$

(iii) Per la valutazione neutrale al rischio $v(t,x_1,x_2,x_3)$ rappresenta l'unico prezzo che non permette arbitraggio del derivato di payoff finale $F(S_T^1, S_T^2, S_T^3) = S_T^1 S_T^3 + S_T^2 S_T^3$ nel mercato finanziario completo descritto nell'esercizio 1. ii).

Osserviamo che

$$v(t,x_1,x_2,x_3) = e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^Q\left[S_T^1 S_T^3 \mid S_t^1 = x_1, S_t^3 = x_3\right] + e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^Q\left[S_T^2 S_T^3 \mid S_t^2 = x_2, S_t^3 = x_3\right]$$

calcoliamo $\quad \mathbb{E}^Q\left[S_T^1 S_T^3 \mid S_t^1 = x_1, S_t^3 = x_3\right] = \mathbb{E}^Q\Big[S_t^1\, e^{(r-\sigma_{11}^2/2)(T-t) + \sigma_{11}(W_T^{1,Q} - W_t^{1,Q})}\,\cdot$

$$\cdot\, S_t^3\, e^{(r - \sigma_{31}^2/2 - \sigma_{32}^2/2)(T-t) + \sigma_{31}(W_T^{1,Q} - W_t^{1,Q}) + \sigma_{32}(W_T^{2,Q}$$

$| \; S_t^2 = x_2, S_t^3 = x$

$$= x_1 x_3\, e^{(r - \sigma_{11}^2/2 - \sigma_{31}^2/2 - \sigma_{32}^2/2)(T-t)}\, \underbrace{\mathbb{E}^Q\left[e^{(\sigma_{11}+\sigma_{31})(W_T^{1,Q} - W_t^{1,Q})} \cdot e^{\sigma_{32}(W_T^{2,Q} - W_t^{2,Q})}\right]}$$

$\| \quad$ per l'indipendenza tra $W^{1,Q}$ e $W^{2,Q}$

$$\mathbb{E}^Q\left[e^{(\sigma_{11}+\sigma_{31})(W_T^{1,Q} - W_t^{1,Q})}\right]\; \mathbb{E}^Q\left[e^{\sigma_{32}(W_T^{2,Q} - W_t^{2,Q})}\right]$$

$$\mathbb{E}[e^{aN}] = e^{a^2/2} \qquad W_T^{1,Q} - W_t^{1,Q} \sim \mathcal{N}(0, T-t)$$

$$W_T^{1,Q} - W_t^{1,Q} \sim \sqrt{T-t}\, N \qquad W_T^{2,Q} - W_t^{2,Q} \sim \sqrt{T-t}\, N$$

$$\mathbb{E}^Q\left[e^{(\sigma_{11}+\sigma_{31})\sqrt{T-t}\, N}\right] = e^{\frac{(\sigma_{11}+\sigma_{31})^2 (T-t)}{2}} \qquad \mathbb{E}^Q\left[e^{\sigma_{32}\sqrt{T-t}\, N}\right] = e^{\frac{\sigma_{32}^2}{2}(T-t)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}^Q[S_T^1 S_T^3 \mid S_t^1 = x_1, S_t^3 = x_3] = x_1 x_3 e^{r(T-t)} e^{\left(-\cancel{\frac{\sigma_{11}^2}{2}} - \cancel{\frac{\sigma_{31}^2}{2}} - \cancel{\frac{\sigma_{32}^2}{2}} + \cancel{\frac{\sigma_{11}^2}{2}} + \cancel{\frac{\sigma_{31}^2}{2}} + \sigma_{11}\sigma_{31} + \cancel{\frac{\sigma_{32}^2}{2}}\right)(T-t)}$$

$$= x_1 x_3 e^{r(T-t)} e^{\sigma_{11}\sigma_{31}(T-t)}$$

analogamente

$$\mathbb{E}^Q[S_T^2 S_T^3 \mid S_t^2 = x_2, S_t^3 = x_3] = x_2 x_3 e^{r(T-t)} e^{\sigma_{22}\sigma_{32}(T-t)}$$

$$\Rightarrow v(t, x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 e^{\sigma_{11}\sigma_{31}(T-t)} + x_2 x_3 e^{\sigma_{22}\sigma_{32}(T-t)}$$

(iv) $\frac{\partial v}{\partial x_1} = x_3 e^{\sigma_{11}\sigma_{31}(T-t)}$ $\quad \frac{\partial v}{\partial x_2} = x_3 e^{\sigma_{22}\sigma_{32}(T-t)}$ $\quad \frac{\partial v}{\partial x_3} = x_1 e^{\sigma_{11}\sigma_{31}(T-t)} + x_2 e^{\sigma_{22}\sigma_{32}(T-t)}$

rappresentano le delta del portafoglio di copertura del derivato di payoff finale $S_T^1 S_T^3 + S_T^2 S_T^3$, ossia la quantità di azioni da detenere all'istante t che permette di coprirsi dal rischio dalla vendita del derivato

3. $\tau \sim \exp(\lambda)$ $\quad Q(\tau > t) = e^{-\lambda t} \quad Q(\tau \le t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \forall t > 0$

(i)

$$P_{RT}(0,T) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}\left[x\, \mathbb{1}_{(\tau > T)} + x(1-\delta)\, \mathbb{1}_{(\tau \le T)} \right] =$$

$$= e^{-rT} x \{ Q(\tau > T) + (1-\delta) \underbrace{Q(\tau \le T)}_{1 - Q(\tau > T)} \} = x e^{-rT} \{ e^{-\lambda T} + (1-\delta)(1 - e^{-\lambda T}) \}$$

$$\boxed{P_{RT}(0,T) = x e^{-rT} \{ 1 - \delta + \delta e^{-\lambda T} \}}$$

$\lambda = 3\%$ $\quad r = 2\%$ $\quad \delta = 30\%$ $\quad x = 100€$ $\qquad P_{RT}(0,1) = 100\, e^{-0.02} \{ 0.70 + 0.30\, e^{-0.03} \} = 97.15€$

$T = 1$ anno

(ii)

$$P_{FV}(0,T) = \mathbb{E}^{Q}\left[x\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} e^{-rT} + (1-\delta) x e^{-r\tau} \mathbb{1}_{\{\tau \le T\}} \right] = x e^{-rT} Q(\tau > T) + (1-\delta) x\, \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-r\tau} \mathbb{1}_{(\tau \le T)} \right]$$

$$\mathbb{E}^{Q}\left[e^{-r\tau} \mathbb{1}_{(\tau \le T)} \right] = \int_0^T e^{-ru} \lambda e^{-\lambda u}\, du = \lambda \int_0^T e^{-(r+\lambda)u}\, du = -\frac{\lambda}{r+\lambda} e^{-(r+\lambda)u} \Big|_0^T = -\frac{\lambda}{r+\lambda} \{ e^{-(r+\lambda)T} - 1 \}$$

$$\boxed{P_{FV}(0,T) = x e^{-(r+\lambda)T} + x(1-\delta) \frac{\lambda}{r+\lambda} \left(1 - e^{-(r+\lambda)T}\right)}$$

$$P_{FV}(0,1) = 100\, e^{-(0.02+0.03)} + 100 \cdot 0.70 \cdot \frac{0.03}{0.05} \left(1 - e^{-0.05}\right) = 95.12 + 2.048 = 97.17€$$

(iii) $P_{FV}(0,T) > P_{RT}(0,T)$ in quanto è più conveniente per chi detiene le DZCB ricevere le recovery al tempo di default (se avviene prima dell'anno) rispetto a riceverlo alla maturità.

(iv) Spread tra le due istituzioni riferisce alla differenza dei loro rendimenti logaritmici

$$P_{RT}^{A}(0,T) = x e^{-rT} \{ 1 - \delta + \delta e^{-\lambda_A T} \} \qquad P_{RT}^{B}(0,T) = x e^{-rT} \{ 1 - \delta + \delta e^{-\lambda_B T} \} \qquad \lg \frac{P^B(0,T)}{P^A(0,T)} = 0.01$$

per $\delta = 1$ $\quad P^A(0,1) = x e^{-(r+\lambda_A)T} \qquad P^B(0,T) = x e^{-(r+\lambda_B)T}$

$$\frac{P^B(0,1)}{P^A(0,1)} = \frac{x e^{-(r+\lambda_A)T}}{x e^{-(r+\lambda_B)T}} = e^{-(\lambda_A - \lambda_B)}$$

$$\lg \frac{P^B(0,T)}{P^A(0,T)} = \lambda_B - \lambda_A \Rightarrow \lambda_B = \lambda_A + \lg \frac{P^B(0,T)}{P^A(0,T)} = 0.03 + 0.0$$