9. Mercati finanziari con più titoli rischiosi

- Mercati finanziari con N titoli rischiosi e d moti browniani
- Misure martingala equivalenti
- Mercati completi e incompleti
- Esempi

Mercati finanziari con N titoli rischiosi (Pascucci p. 378)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ filtrazione

$\underline{W}_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)$ moto browniano d-dimensionale ossia $W_t^1, \dots, W_t^d$ sono d- moti browniani indipendenti

N titoli rischiosi $\quad \boxed{dS_t^i = S_t^i \left(\mu_i \, dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} \, dW_t^j \right) \qquad i = 1, \dots, N}$

$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{pmatrix}$ vettore dei rendimenti attesi $\quad \mathbb{E}[S_t^i] = S_0^i e^{\mu_i t}$ (*)

$(\sigma_{ij})_{\substack{i=1,\dots,N \\ j=1,\dots,d}}$ matrice $N \times d$ di volatilità

Titolo privo di rischio $\quad dB_t = rB_t \, dt$, $B_0 = 1$ $\qquad B_t = e^{rt}$ bond

Def. Q è una misura martingala per il mercato finanziario se

- $Q \sim P$ (equivalente a P) ossia $Q(A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$
- $\tilde{S}_t = (e^{-rt} S_t^1, \dots, e^{-rt} S_t^N)$ vettore dei prezzi scontati è una martingala
  $\forall t > s \quad \mathbb{E}^Q[\tilde{S}_t | \mathcal{F}_s] = \tilde{S}_s$

Ossia $\forall i = 1, \dots, N \quad \mathbb{E}^Q[S_t^i | \mathcal{F}_s] = S_s^i e^{r(t-s)} \quad \forall t > s$

significa che rispetto a Q i titoli rischiosi hanno rendimento atteso r

(*) Grazie alla formula di Itô multidimensionale è possibile determinare l'espressione esplicita della EDS : $dS_t^i = S_t^i \left(\mu_i \, dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} \, dW_t^j \right)$

$$\Rightarrow \boxed{S_t^i = S_0^i \, e^{\left(\mu_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2\right)t} \, e^{\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} W_t^j}}$$

$$\mathbb{E}[S_t^i] = S_0^i \, e^{\left(\mu_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2\right)t} \, \mathbb{E}\left[e^{\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} W_t^j}\right]$$

ora osserviamo che

$$\mathbb{E}\left[e^{\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} W_t^j}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{d} e^{\sigma_{ij} W_t^j}\right] \underset{\text{per l'indipendenza}}{=} \prod_{j=1}^{d} \mathbb{E}\left[e^{\sigma_{ij} W_t^j}\right] = \prod_{j=1}^{d} e^{\sigma_{ij}^2 t/2} = e^{\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 t/2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[S_t^i] = S_0^i \, e^{\mu_i t}$$

Una misura equivalente a P, Q, grazie al teorema di Girsanov, è individuata dal vettore $\underline{\theta} \in \mathbb{R}^d$: $\underline{W}_t^{\theta} = \underline{W}_t + \underline{\theta}\, t$ è un moto browniano d-dimensionale rispetto a Q

$$W_t^{\theta,i} = W_t^i + \theta_i t \qquad i=1,\dots,d$$

Se Q è una misura neutrale al rischio allora dobbiamo determinare a quale $\underline{\theta} \in \mathbb{R}^d$ è associata ed è caratterizzata dal fatto che rispetto a Q:

$$dS_t^i = S_t^i\left(r\,dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}\, dW_t^{\theta,j}\right) \qquad \forall i=1,\dots,N$$ (rispetto a Q ogni titolo deve avere rendimento atteso r)

$$dS_t^i = S_t^i\left(r\,dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}\, dW_t^j + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}\,\theta_j\, dt\right) = S_t^i\left(\left(r + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}\theta_j\right)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}\, dW_t^j\right)$$

confrontando questa equazione con

$$dS_t^i = S_t^i\left(\mu_i\, dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}\, dW_t^j\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \mu_i = r + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}\theta_j \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}\theta_j = \mu_i - r \qquad i=1,\dots,N}$$

ossia $\underline{\theta} = \begin{pmatrix}\theta_1\\ \vdots \\ \theta_N\end{pmatrix}$ deve risolvere un sistema lineare di matrice dei coefficienti

$(\sigma_{ij})_{\substack{i=1,\dots,N\\ j=1,\dots,d}}$

e vettore dei termini noti $\begin{pmatrix}\mu_1 - r\\ \vdots \\ \mu_N - r\end{pmatrix}$

- Se il sistema non ammette soluzioni allora $\nexists\, Q$, ossia il mercato finanziario ammette arbitraggi per il primo teorema fondamentale dell'Asset Pricing

- Se il sistema ammette un'unica soluzione $\underline{q}$ allora $\exists!\, Q$, per il secondo teorema fondamentale dell'Asset Pricing, il mercato è libero da arbitraggi e completo, ossia ogni derivato di pay off finale $F(S_T^1, \dots, S_T^N)$ può essere replicato da una strategia autofinanziante (*) $(\alpha_t^1, \dots, \alpha_t^N)$ con α_t^i quota nel titolo di prezzo $\{S_t^i\}$

  In tal caso ~~esiste~~ esiste un unico prezzo di non-arbitraggio dato da:

$$0 \leq t < T \qquad v(t, S_t^1, \dots, S_t^N) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^Q[\, F(S_T^1, \dots, S_T^N) \mid \mathcal{F}_t\,]$$
$$v_0 = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^Q[\, F(S_T^1, \dots, S_T^N)]$$

- Se il sistema ammette ∞ soluzioni allora $\exists\, \infty$ misure martingala, ossia il mercato è libero da arbitraggi ma non è completo

(*)
analogamente al modello Black & Scholes unidimensionale, per il mercato B&S multidimensionale completo, la strategia di replica è determinata conoscendo $v(t, x_1, \quad, x_N)$

$v(t, x_1, \dots, x_N) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^Q[F(S_T^1, \dots, S_T^N) \mid S_t^1 = x_1, \dots, S_t^N = x_N]$, più precisamente coincide con la strategia Delta-hedging: $\alpha_t^i = \dfrac{\partial v}{\partial x_i}(t, x_1, \dots, x_N)$ rappresenta la quota ~~di~~ di azioni di prezzo $\{S_t^i\}$ $\quad i = 1, \dots, N$ nel portafoglio di copertura al tempo t se $S_t^1 = x_1, \dots, S_t^N = x_N$.

- Se $N=d$ il sistema $\sigma \cdot \underline{\theta} = \underline{\mu} - \underline{r}$ è un sistema quadrato e se $\det \sigma \neq 0$ allora $\exists!\, Q$ individuale dall'unica soluzione del sistema $\underline{\theta} = \sigma^{-1}(\underline{\mu} - \underline{r})$, il mercato è libero da arbitraggi e completo.

- Se $N<d$ (numero dei titoli < fonti d'incertezza) allora se $rg(\sigma) = rg(\sigma, \underline{\mu} - \underline{r}) = K < d$ il sistema per il Teorema di Rouché-Capelli ammette ∞^{d-K} soluzioni. ~~eeeeeeee~~.
In questo caso, il mercato ~~potenzialmente~~ in generale, ammette ∞ misure martingale e dunque è un mercato incompleto

- Se $N>d$ (numero dei titoli > fonti d'incertezza)
allora se $rg(\sigma) = rg(\sigma, \underline{\mu} - \underline{r}) = K$ $\begin{cases} K=d & \exists!\, Q \\ K<d & \exists\ \infty^{d-K} \text{ misure martingale} \end{cases}$

se $rg(\sigma) \neq rg(\sigma, \underline{\mu} - \underline{r})$ il sistema non ammette soluzioni e dunque esistono arbitraggi sul mercato.

In particolare un mercato libero da arbitraggi è completo $\iff$ $d \leq N$ e il $rg(\sigma) = d$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $N > d$ **Più titoli rischiosi che fonti d'incertezza**

Due titoli rischiosi $N=2$ e $d=1$ ed un solo moto browniano e $r_t = r$ costante

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu^1 dt + \sigma^1 dW_t) \qquad \mu^1 \in \mathbb{R}, \ \sigma^1 > 0$$
$$dS_t^2 = S_t^2(\mu^2 dt + \sigma^2 dW_t) \qquad \mu^2 \in \mathbb{R}, \ \sigma^2 > 0$$

Il sistema per determinare il prezzo di mercato del rischio è:

$$\begin{cases} \sigma^1 \theta = \mu^1 - r \\ \sigma^2 \theta = \mu^2 - r \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \theta = \frac{\mu^1 - r}{\sigma^1} \\ \theta = \frac{\mu^2 - r}{\sigma^2} \end{array}$$

è risolubile se $\frac{\mu^1 - r}{\sigma^1} = \frac{\mu^2 - r}{\sigma^2}$ ossia se i due titoli hanno lo stesso prezzo di mercato del rischio.

Se questa condizione non fosse rispettata ($\nexists\, Q$ misura mg) allora abbiamo un arbitraggio. Se fosse $\lambda = \frac{\mu^1 - r}{\sigma^1} - \frac{\mu^2 - r}{\sigma^2} > 0$ consideriamo un portafoglio con autofinanziante

quota in S^1 $\alpha_t^1 = \frac{1}{S_t^1 \sigma^1} V_t$ e quota in S^2 $\alpha_t^2 = -\frac{1}{S_t^2 \sigma^2} V_t$

Valore del portafoglio $V_t = \alpha_t^1 S_t^1 + \alpha_t^2 S_t^2 + \beta_t B_t$

essendo autofinanziante

$$dV_t = \alpha_t^1 dS_t^1 + \alpha_t^2 dS_t^2 + \beta_t \underbrace{dB_t}_{rB_t dt} = \alpha_t^1 dS_t^1 + \alpha_t^2 dS_t^2 + r(V_t - \alpha_t^1 S_t^1 - \alpha_t^2 S_t^2) dt$$

$$dV_t = \frac{1}{\sigma^1}(\mu^1 dt + \sigma^1 dW_t) V_t - \frac{1}{\sigma^2}(\mu^2 dt + \sigma^2 dW_t) V_t + r\left(V_t - \frac{1}{\sigma^1} V_t + \frac{1}{\sigma^2} V_t\right) dt$$

$$dV_t = \left(\frac{\mu^1 - r}{\sigma_1} - \frac{\mu^2 - r}{\sigma_2}\right) V_t\, dt + r V_t\, dt + \cancel{dW_t} - \cancel{dW_t}$$

$$dV_t = V_t \lambda\, dt + r V_t\, dt = V_t (\lambda + r)\, dt \quad \Rightarrow \quad V_t = V_0 e^{(\lambda + r)t}$$

è un arbitraggio in quanto è privo di rischio ed ha un rendimento certo $\lambda + r > r$.

Ritorniamo al sistema di N eq. e d incognite

$$\underset{N\times d}{\sigma_t} \cdot \underset{d\times 1}{\theta_t} = \mu_t - r = \begin{pmatrix} \mu_t^1 - r \\ \vdots \\ \mu_t^N - r \end{pmatrix}$$

Teorema di Rouché - Capelli

C.N.E.S. affinché un sistema lineare di N equazioni in d incognite ammette soluzioni

$$\underset{N\times d}{A}\, \underset{d\times 1}{x} = \underset{N\times 1}{b}$$

è che $rg(A) = rg(A, b) = k$. Se $d = k$ il sistema ammette una sola soluzione altrimenti ne ammette ∞^{d-k}.

- Se $N = d$ e $\det \sigma_t \neq 0$ allora il sistema ammette una sola soluzione $\theta_t = \sigma_t^{-1}(\mu_t - r)$ che si può determinare con il teorema di Cramer, quindi $\exists!$ Q il mercato è completo
- Se $N < d$ e σ_t ha rango massimo, $rg(\sigma_t) = N \Rightarrow rg(\sigma_t, \mu_t - r) = N$ il sistema ammette ∞^{d-N} soluzioni,

  $\exists\, \infty$ misure mg il mercato è incompleto

ESEMPI: di Mercato Completo con due titoli rischiosi e due moti browniani

1) S^1 e S^2 guidati da moti browniani indipendenti con $\sigma_1, \sigma_2 > 0$

$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1 (\mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^1) \\ dS_t^2 = S_t^2 (\mu_2 dt + \sigma_2 dW_t^2) \end{cases} \qquad \text{Matrice di volatilità } \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$dS_t^i = S_t^i \left(r\,dt + \sigma_i \left(dW_t^i + \frac{\mu_i - r}{\sigma_i} dt \right) \right) \qquad i = 1,2$$

$\exists!$ $\mathbb{Q}$ misura martingala tale che:

$$\boxed{\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t \; ; \; dZ_t = -Z_t(\theta_1 dW_t^1 + \theta_2 dW_t^2) \quad Z_t = e^{-\frac{1}{2}\theta_1^2 t - \theta_1 W_t^1} e^{-\frac{1}{2}\theta_2^2 t - \theta_2 W_t^2}}$$

$$\begin{cases} dW_t^{\mathbb{Q},1} = dW_t^1 + \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} dt \\ dW_t^{\mathbb{Q},2} = dW_t^2 + \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} dt \end{cases} \quad \text{sono } \mathbb{Q}\text{-moti browniani}$$

In fatti il sistema lineare

$$\sigma \theta = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{pmatrix} \quad \text{è} \quad \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{pmatrix}$$

e $\det \sigma = \sigma_1 \sigma_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists! \, (\theta_1, \theta_2) \quad \begin{cases} \theta_1 = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \\ \theta_2 = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} \end{cases}$ Il mercato è completo. Più precisam

2) S^1 e S^2 guidati da moti browniani correlati

W_t^1 e B_t correlati con $\mathbb{E}[W_t B_t] = \rho t$ e $\rho \in (-1, 1)$ $\quad |\rho| < 1$

$B_t = \rho W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}\, W_t^2$ con W_t^2 indip. da W_t^1 $\qquad W_t^i \sim \mathcal{N}(0,t)$

$\mathbb{E}[B_t] = 0 \qquad \mathrm{Var}(B_t) = \rho^2 t + (1-\rho^2) t = t \quad \Rightarrow \quad B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$

OSS: W_t^1 e W_t^2 sono moti browniani $\Rightarrow$ hanno incrementi indip. $\Rightarrow$ B_t ha increm. indip.
$W_0^1 = W_0^2 = 0 \qquad \Rightarrow B_0 = 0$

$$dS_t^1 = S_t^1 (\mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^1) \qquad \text{con } \sigma_1, \sigma_2 > 0$$

$$dS_t^2 = S_t^2 (\mu_2 dt + \sigma_2 dB_t) = S_t^2 (\mu_2 dt + \sigma_2 \rho\, dW_t^1 + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}\, dW_t^2)$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2 \rho & \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \qquad \det \sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} > 0 \quad \text{se } |\rho| \neq 1$$

Per determinare il prezzo di mercato del rischio dobbiamo risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2 \rho & \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \sigma_1 \theta_1 = \mu_1 - r \\ \sigma_2 \rho\, \theta_1 + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}\, \theta_2 = \mu_2 - r \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta_1 = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \\ \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}\, \theta_2 = \mu_2 - r - \sigma_2 \rho\, \theta_1 \end{cases}$$

$$\theta_2 = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} - \frac{\cancel{\sigma_2} \rho}{\cancel{\sigma_2} \sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} - \rho \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \right)$$

$\exists!$ la soluzione, ossia $\exists!$ prezzo di mercato del rischio

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \\ \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} - \rho \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \right) \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists!$ Q misura martingala equivalente. Il mercato è completo

Esiste un unico prezzo di non arbitraggio per ogni derivato di payoff finale $F(S_T^1, S_T^2)$

$$f(t, S_t^1, S_t^2) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^Q [F(S_T^1, S_T^2) \mid S_t^1, S_t^2]$$

per fare questo calcolo è utile la rappresentazione esplicita di S_t^1 ed S_t^2 che si può ricavare con Itô multidimensionale

$$S_t^1 = S_0^1 \, e^{(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)t + \sigma_1 W_t^1}$$

$$S_t^2 = S_0^2 \, e^{(\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2)t + \sigma_2 W_t^2} = S_0^2 \, e^{(\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2)t + \sigma_2 \rho W_t^1 + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}\, W_t^2}$$

Rispetto a Q:
$$\begin{cases} S_t^1 = S_0^1 \, e^{(r - \sigma_1^2/2)t + \sigma_1 W_t^1} \\ S_t^2 = S_0^2 \, e^{(r - \sigma_2^2/2)t + \sigma_2 \rho W_t^1 + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}\, W_t^2} \end{cases}$$

$\{W_t^1\}$ e $\{W_t^2\}$ moti browniani indipendenti

- Valutare il derivato di payoff finale $\boxed{F(S_T^1, S_T^2) = \mathbb{1}_{\{S_T^1 S_T^2 > K\}}}$

$$f(t, S_t^1, S_t^2) = e^{-r(T-t)} \, \mathbb{E}^Q\left[\mathbb{1}_{\{S_T^1 S_T^2 > K\}} \mid \mathcal{F}_t \right]$$

$$f(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)} \, Q\left(S_T^1 S_T^2 > K \mid S_t^1 = x_1, \; S_t^2 = x_2 \right)$$

$$S_T^1 = S_t^1 \, e^{(r - \sigma_1^2/2)(T-t) + \sigma_1 (W_T^1 - W_t^1)}$$

$$S_T^2 = S_t^2 \, e^{(r - \sigma_2^2/2)(T-t) + \sigma_2 \rho (W_T^1 - W_t^1) + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}\,(W_T^2 - W_t^2)}$$

$$P\left(S_T^1 S_T^2 > K \mid S_t^1 = x_1, \; S_t^2 = x_2 \right) = Q\left(x_1 x_2 \, e^{(2r - \sigma_1^2/2 - \sigma_2^2/2)(T-t)} \, e^{(\sigma_1 + \sigma_2\rho)(W_T^1 - W_t^1) + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\,(W_T^2 - W_t^2)} > K \right)$$

$$W_T^1 - W_t^1 \sim \mathcal{N}(0, T-t)$$
$$W_T^2 - W_t^2 \sim \mathcal{N}(0, T-t)$$

$$X = (\sigma_1 + \sigma_2\rho)(W_T^1 - W_t^1) + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\,(W_T^2 - W_t^2) \sim \mathcal{N}\left(0, \left[(\sigma_1 + \sigma_2\rho)^2 + \sigma_2^2(1-\rho^2)\right]\right.$$

infatti $\operatorname{Var}(X) = (\sigma_1 + \sigma_2\rho)^2 (T-t) + \sigma_2^2(1-\rho^2)(T-t) = (\sigma_1^2 + \cancel{\sigma_2^2\rho^2} + 2\sigma_1\sigma_2\rho + \sigma_2^2 - \cancel{\rho^2\sigma_2^2})(T-t)$

$$X \sim \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)(T-t)}\; N = aN$$

$$= \mathbb{Q}\left(e^{b+aN} > \frac{K}{x_1 x_2}\right) = \mathbb{Q}\left(b + aN > \ln\left(\frac{K}{x_1 x_2}\right)\right)$$

$$= \mathbb{Q}\left(N > \frac{\ln(K/x_1x_2) - b}{a}\right) = \mathbb{Q}\left(N > \frac{\ln(K/x_1x_2) - \left(2r - \frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\ln(x_1x_2/K) + \left(2r - \frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2}}\right)$$

$$\Rightarrow f(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)}\, \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{x_1x_2}{K}\right) + \left(2r - \frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2}}\right)$$

• Valutare un derivato di payoff finale $\boxed{F(S_T^1\ S_T^2) = S_T^1\sqrt{S_T^2}}$

$$f(t, S_t^1, S_t^2) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_T^1\sqrt{S_T^2} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_T^1\sqrt{S_T^2} \mid \mathcal{F}_t\right] \overset{S_t^1 = x_1,\ S_t^2 = x_2}{=} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big[\ x_1\, e^{(r - \sigma_1^2/2)(T-t) + \sigma_1(W_T^1 - W_t^1)}\ \sqrt{x_2}\, e^{\frac12(r - \sigma_2^2/2)(T-t) + \frac12\rho\sigma_1(W_T^1 - W_t^1) + \frac12\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}(W}$$

$$= x_1\sqrt{x_2}\, e^{\left(\frac32 r - \frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{\sigma_2^2}{4}\right)(T-t)}\ \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma_1(1+\frac{\rho}{2})(W_T^1 - W_t^1)}\right]}_{=\ \mathbb{E}\left[e^{\sigma_1(1+\frac{\rho}{2})\sqrt{T-t}\,N}\right]\ =\ e^{\frac{\sigma_1^2}{2}(1+\frac{\rho}{2})^2(T-t)}}\ \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\frac12\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}(W_T^2 - W_t^2)}\right]}_{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\frac12\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{T-t}\,N}\right]\ \ e^{\frac12\frac14\sigma_2^2(1-\rho^2)(T-t)}}$$

$1 + \frac{\rho^2}{4} + \rho$

$$f(t, x_1, x_2) = x_1\sqrt{x_2}\, e^{-r(T-t)}\, e^{\frac32 r(T-t)}\, e^{\left(-\frac12\sigma_1^2 - \frac{1}{4}\sigma_2^2\right)(T-t)}\, e^{\frac{\sigma_1^2}{2}(1+\frac{\rho}{2})^2(T-t)}\, e^{\frac18\sigma_2^2(1-\rho^2)(T-t)}$$

$$= x_1\sqrt{x_2}\, e^{\frac12 r(T-t)}\, e^{\sigma_1^2\frac{\rho}{2}(1+\frac{\rho}{4})(T-t)}\, e^{-\frac18\sigma_2^2(1+\rho^2)(T-t)} \qquad = x_1\sqrt{x_2}\, e^{c(T-t)}$$

Delta del portafoglio di copertura $\quad f(t, x_1, x_2) = x_1 \sqrt{x_2}\, e^{ct} \quad c = \frac{1}{2} r + \frac{\sigma_1^2 \rho}{2}\left(1 + \frac{\rho}{4}\right) - \frac{1}{8}\sigma_1^2(1+\rho^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \sqrt{x_2}\, e^{ct}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_1}{2\sqrt{x_2}}\, e^{ct}$$

rappresenta la quota in azioni S^1 e S^2 ~~[illegible]~~ da detenere nel portafoglio in modo da eliminare completamente il rischio di aver venduto il derivato