7. Proprietà dei prezzi delle opzioni e Strategie di hedging

- Le Greche di un portafoglio e delle opzioni
- Delta hedging
- La volatilità implicita
- Delta-Gamma hedging
- Robustezza del modello Black & Scholes

Le Greche (Pascucci p.280)

(o del prezzo di un derivato)
misurano la sensitività di un portafoglio rispetto alla variazione dei fattori da cui esso dipende.

Per esempio abbiamo visto che il prezzo di una call/put dipende da diversi fattori:

$$c_t = c(\cdot\,; K;\ S_t, T-t, r, \sigma) \qquad p_t = p(S_t, T-t, r, \sigma;\ K)$$

prezzo del sottostante S_t, tempo $T-t$, tasso d'interesse privo di rischio r e volatilità σ.

Se indichiamo con $f(t,x,\sigma,r)$ il valore di una strategia markoviana autofinanziante nel modello Black & Scholes, sappiamo che verifica l'EDP:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rx\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - rf = 0 \qquad (t,x) \in (0,T) \times (0,+\infty)$$

In particolare il valore di un derivato di payoff finale $F(S_T)$ verifica l'EDP di B&S

Poniamo

$\boxed{\Delta = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{delta}}$

$\boxed{\Gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{gamma}}$ (misura la sensibilità del delta rispetto alle variaz. del sottostante)

$\boxed{\nu = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad \text{vega}}$

$\boxed{\rho = \frac{\partial f}{\partial r} \quad \text{rho}}$

$\boxed{\Theta = \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{... theta}}$

Diciamo che una strategia è neutrale rispetto ad uno dei fattori di rischio se la corrispondente greca è nulla, ossia se il valore del portafoglio (o di un derivato) è insensibile rispetto alle variazioni di tale fattore.

Esempio di Portafoglio Δ-neutrale

La strategia delta-hedging in cui la quota in azioni $\alpha_t = \frac{\partial f}{\partial x}$ ove $f(t,x)$ è il valore di un derivato al tempo t se $S_t = x$.

In fatti rende il portafoglio costituito da α_t azioni e una posizione corta sul derivato

$$V(t,S_t) = \alpha_t S_t - f(t,S_t)$$

(α_t: quota α_t nell'azione; $f(t,S_t)$: posizione corta su un derivato di payoff $F(S_T)$)

immune al rischio di variazioni del prezzo del sottostante, in quanto

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \alpha_t - \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \text{essendo} \quad \alpha_t = \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)$$

Per i prezzi delle calls e delle puts si trovano delle espressioni esplicite per le greche.

- Calcolo del delta di una call:

$$c(t,x) = x\,\Phi(d_1(t,x)) - K e^{-r(T-t)}\,\Phi(d_2(t,x))$$

$$d_1(t,x) = \frac{\ln(x/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad d_2(t,x) = d_1(t,x) - \sigma\sqrt{T-t} \quad \Rightarrow \frac{\partial d_2}{\partial x_1} = \frac{\partial d_1}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \Phi(d_1) + x\,\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial x} - K e^{-r(T-t)}\,\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \Phi(d_1) + \frac{\partial d_1}{\partial x}\left\{ x\,\Phi'(d_1) - K e^{-r(T-t)}\,\Phi'(d_2) \right\} = \Phi(d_1)$$

in quanto $\boxed{x\,\Phi'(d_1) = K e^{-r(T-t)}\,\Phi'(d_2)}$

in fatti $\dfrac{\Phi'(d_1)}{\Phi'(d_2)} = \dfrac{K}{x} e^{-r(T-t)}$, ricordiamo che $\Phi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

$$\frac{\Phi'(d_1)}{\Phi'(d_2)} = \frac{e^{-d_1^2/2}}{e^{-d_2^2/2}} = e^{\frac{d_2^2-d_1^2}{2}} = e^{\frac{(d_2-d_1)(d_2+d_1)}{2}} = e^{-\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}(2d_1-\sigma\sqrt{T-t})} = e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\, e^{-d_1\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 - d_1 = -\sigma\sqrt{T-t}$$

$$d_2 + d_1 = 2d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$e^{-\sigma\sqrt{T-t}\, d_1} = e^{-\sigma\sqrt{T-t}\cdot\frac{\ln(x/K)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} = e^{-(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}\, e^{-\ln(x/K)} = e^{-(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}\, e^{\ln(K/x)}$$

$$= \frac{K}{x} e^{-(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}$$

$$\Rightarrow \frac{\Phi'(d_1)}{\Phi'(d_2)} = \frac{K}{x} e^{-r(T-t)} \quad \Rightarrow \boxed{\Delta_c(t,x) = \Phi(d_1(t,x))}$$

- Il delta della call è $\Phi(d_1)$ e $0 < \Phi(d_1) < 1$, la quota di azioni nel portafoglio di copertura è positiva, quindi per coprire una posizione corta su una call acquistiamo il sottostante

- Inoltre poiché $\frac{\partial c}{\partial x} > 0 \Rightarrow$ il prezzo di una call è una funzione crescente del prezzo del sottostante

Dalla relazione di parità: $p(t, S_t) + S_t = c(t, S_t) + K e^{-r(T-t)}$

$$p(t,x) = c(t,x) - x + K e^{-r(T-t)}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial x} - 1 = \Phi(d_1) - 1 = \boxed{-\Phi(-d_1) = \Delta_p}$$

quindi il delta di una call $-1 < \Delta_p < 0$, la quota in azioni nel portafoglio di copertura è negativa, quindi vendita (allo scoperto) del sottostante per coprire una posizione corta su una put

- Inoltre poiché $\frac{\partial p}{\partial x} < 0 \Rightarrow$ il prezzo di una put è una funzione decrescente del prezzo del sottostante

• Gamma di una call: $\boxed{\Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(t, S_t) = \frac{\Phi'(d_1)}{\sigma\sqrt{T-t}\, S_t}}$

Infatti

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \Phi(d_1(t,x)) \Rightarrow \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \Phi'(d_1) \cdot \frac{\partial d_1}{\partial x}$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\log\left(\frac{x}{k}\right) + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right) \qquad \frac{\partial d_1}{\partial x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \frac{1}{x/k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}\, x}$$

Inoltre dalla relazione di parità: $p(t,x) = c(t,x) - x + K e^{-r(T-t)}$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial x} - 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \Gamma$$

ossia $\boxed{\Gamma_c = \Gamma_p}$

Osserviamo che $\Gamma > 0$:

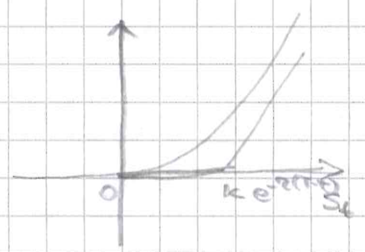
$\frac{\partial c}{\partial x} > 0 \quad \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} > 0 \Rightarrow$ il prezzo di una call è una funzione crescente e convessa al variare del prezzo del sottostante

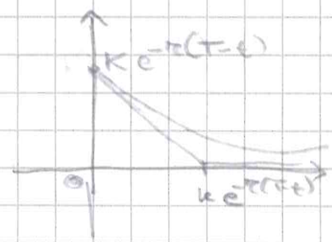
$\frac{\partial p}{\partial x} < 0 \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} > 0 \Rightarrow$ mentre per la put il prezzo è funzione decrescente ma sempre convessa del prezzo del sottostante

OSS: sia d_1 che $d_2 \to -\infty$ per $x \to 0^+$

$$\lim_{x\to 0^+} c(t,x) = K e^{-r(T-t)} \Phi(-\infty) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} p(t,x) = K e^{-r(T-t)}$$





• Calcoliamo ora la vega di una call e di una put

Vega: $\nu = \frac{\partial c}{\partial \sigma}$

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma} = x\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}$$

$$d_1(t,x) = \frac{\ln(x/k) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2(t,x) = d_1(t,x) - \sigma\sqrt{T-t}$$

OSSERVAZIONE

Si può dimostrare che
$$(S_t - Ke^{-r(T-t)})_+ \overset{(1)}{\leq} c_t \leq S_t$$
$$(Ke^{-r(T-t)} - S_t)_+ \overset{(2)}{\leq} p_t \leq Ke^{-r(T-t)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} c(t,x) = \lim_{x \to 0^+}\Big[x\,\Phi(\underbrace{d_1(t,x)}_{\downarrow\, -\infty}) - Ke^{-r(T-t)}\,\Phi(\underbrace{d_2(t,x)}_{\downarrow\, -\infty})\Big] = 0 \qquad c(t,x) + Ke^{-r(T-t)} = p(t,x) + x$$

e $\lim_{x\to +\infty} \overline{\Phi}(x) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} p(t,x) = Ke^{-r(T-t)}$$

Per dimostrare la (1) consideriamo i portafogli P_A: 1 azione ~~e somma Ke^{-rT}~~

$$S_0 - Ke^{-rT} \leq c_0$$

P_B: 1 call + somma Ke^{-rT}

$V_T(P_A) = S_T$ $\qquad V_T(P_B) = (S_T - K)_+ + K = \begin{cases} S_T - K + K & \text{se } S_T > K \\ K & \text{se } S_T < K \end{cases}$ $\qquad V_T(P_B) = \max\{S_T, K\}$

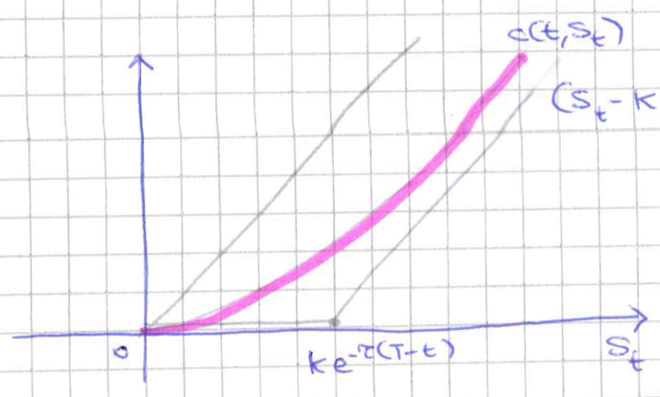
$$V_T(P_B) \geq V_T(P_A) \underset{\text{AOA}}{\Rightarrow} V_0(P_B) = c_0 + Ke^{-rT} \geq V_0(P_A) = S_0$$

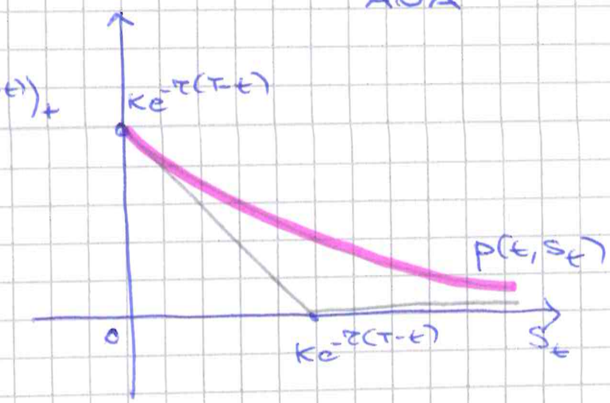
Per dimostrare la (2) consideriamo i portafogli P_C: somma Ke^{-rT}

$$p_0 \geq Ke^{-r(T)} - S_0$$

P_D: 1 put + 1 azione

$$V_T(P_D) = (K - S_T)_+ + S_T = \max(S_T, K) \geq V_T(P_C) = K \underset{\text{AOA}}{\Rightarrow} V_0(P_D) = p_0 + S_0 \geq V_0(P_C) = Ke^{-rT}$$





$c(t,S_t)$ f. crescente e convessa
$p(t,S_t)$ f. decrescente e convessa

$$\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = -\sqrt{T-t} + \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial c}{\partial \sigma} = \frac{\partial d_1}{\partial \sigma}\underbrace{\left[x\Phi'(d_1) - K e^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\right]}_{=0} + \Phi(d_2) K e^{-r(T-t)}\sqrt{T-t}$$

e poi tenendo conto che $\quad x\Phi'(d_1) = K e^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)$

$\Rightarrow \dfrac{\partial c}{\partial \sigma} = x\,\Phi'(d_1)\sqrt{T-t}$ e osserviamo che dalla relazione di parità $\dfrac{\partial p}{\partial \sigma} = \dfrac{\partial c}{\partial \sigma}$

le vega di una call e di una put coincidono e

$$\boxed{\nu_c = \nu_p = S_t\sqrt{T-t}\;\Phi'(d_1) = \nu}$$

Osserviamo che $\nu > 0$ il prezzo di una call e di una put è una funzione crescente della volatilità (con l'opzione si trae vantaggio dalla maggiore rischiosità del sottostante).

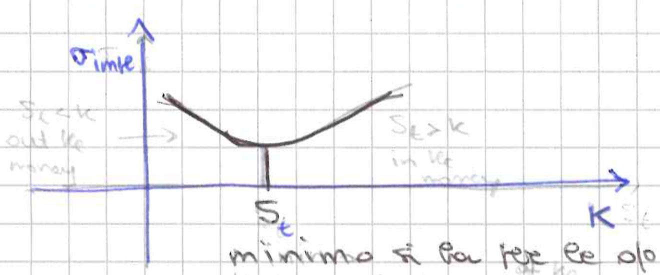
Inoltre essendo $\dfrac{\partial c}{\partial \sigma} > 0 \Rightarrow$ la funzione ~~[illegible]~~ prezzo è invertibile rispetto a σ

Significa che ad ogni valore di c corrisponde un unico valore della volatilità (detta volatilità implicita)

~~Inoltre si può ricavare che:~~ $\cancel{(S_t - K e^{-r(T-t)})_+ \le C_t \le S_t \quad (K e^{-r(T-t)} - S_t)_+ \le P_t \le K e^{-r(T-t)}}$

"Effetto Smile":

Nello pratica si osserva che la volatilità implicita di opzioni con la stessa maturità e sottostante ma diversi prezzi d'esercizio non coincidono $\Rightarrow$ l'assunzione di volatilità costante nel modello B&S è irrealistica



Critica al modello B&S ha portato a due classi di modelli: a volatilità locale e volatilità stocastica

minimo si ha per le opzioni "at the money" ovvero con $K = S_t$

L'approccio più utilizzato nei mercati finanziari per prezzare le opzioni è di usare la volatilità implicita, ricavandola da opzioni già presenti sul mercato.

L'insieme delle volatilità implicite delle opzioni in funzione sia del prezzo di esercizio che delle scadenze permette di disegnare la superficie di volatilità [vedi Pascucci p. 399 - 400]

L'ipotesi di volatilità costante del modello Black & Scholes avrebbe dovuto portare ad una curva piatta.

La critica di volatilità costante del modello B&S ha portato a modelli più sofisticati:

- modelli a volatilità endogene (in genere il mercato rimane completo)
- " " esogene (fattori di rischio aggiuntivi $\Rightarrow$ mercato diventa incompleto)

I modelli più realistici sono i secondi che comprendono i modelli a volatilità stocastica (Heston).

Tra quelli a vol. endogene i più popolari sono quelli a volatilità locale:

$$dS_t = S_t \{ \mu(t, S_t)\, dt + \sigma(t, S_t)\, dW_t \}$$

CALCOLO DELLA VOLATILITÀ IMPLICITA

Nel particolare per il prezzo di una call:

$$C_0 = C(S_0, K, T, r, \sigma)$$

Se conosco C_0 posso determinare il valore σ (vol. implicita) che rende C_0 = prezzo di mercato.
Non è possibile invertire la funzione C però si utilizzano procedure iterative.
Spesso gli analisti calcolano le volatilità implicite nei prezzi delle opzioni, scritte su un certo titolo, che sono più attivamente negoziate per poi determinare i prezzi di altre opzioni, scritte sullo stesso titolo, ma meno attivamente negoziate.

ESEMPIO

Una call scritta su un titolo che non paga dividendi ha un prezzo di mercato di 2.5\$
$S_0 = 15\$$, $K = 13\$$, la vita residua è 3 mesi e $r = 5\%$. Qual'è la volatilità implicita?

$$C_0 = 15\,\Phi(d_1) - 13e^{-0.05 \times \frac{3}{12}}\,\Phi(d_2)$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\frac{3}{12}}}\left\{\ln\left(\frac{15}{13}\right) + \left(0.05 + \frac{\sigma^2}{2}\right)\times\frac{3}{12}\right\} \qquad d_2 = d_1 - \sigma \times \frac{3}{12}$$

Si usa il metodo iterativo:

Se $\sigma = 20\%$ $\Rightarrow$ $C_0 = 2.32\$$ $\Rightarrow$ dobbiamo aumentare il valore di σ perché $2.32 < 2.5$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Se } \sigma = 40\% & \Rightarrow & C_0 = 2.507\$ \\ \text{Se } \sigma = 39\% & \Rightarrow & C_0 = 2.487\$ \end{array}\right\} \Rightarrow 0.39 < \sigma < 0.40$$

Se $\sigma = 39.7\%$ allora $C_0 = 2.50\$$

Poi questo valore di σ può essere utilizzata per prezzare altre opzioni europee scritte sul medesimo sottostante per diversi valori del prezzo di esercizio.

Osserviamo che poiché $c(t,x)$ risolve l'eq. di valutazione:

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t}(t,x) + rx\frac{\partial c}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(t,x) - r\,c(t,x) = 0 \\ c(T,x) = (x-K)_+ \end{cases}$$

Segue che $$\Theta(t,x) = \frac{\partial c}{\partial t}(t,x) = r\,c(t,x) - rx\underbrace{\Delta(t,x)}_{\Phi(d_1)} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \underbrace{\Gamma(t,x)}_{\frac{\Phi'(d_1)}{\sigma\sqrt{T-t}\,x}}$$

$$\Theta(t,x) = r\left\{\cancel{x\Phi(d_1)} - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)\right\} - \cancel{rx\Phi(d_1)} + \frac{1}{2}\sigma x\frac{\Phi'(d_1)}{\sqrt{T-t}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Theta_c = -Kr e^{-r(T-t)}\Phi(d_2) - \frac{1}{2}\sigma S_t \frac{\Phi'(d_1)}{\sqrt{T-t}}}$$

osserviamo che $\Theta_c < 0$
il prezzo della call
diminuisce quando ci si avvicina
alla scadenza, infatti diminuisce
l'effetto della volatilità in
quanto è moltiplicato per $\sqrt{T-t}$

Dalle relazione di parità:

$$p(t,x) = c(t,x) - x + Ke^{-r(T-t)} \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial c}{\partial t} + rKe^{-r(T-t)}$$

segue $$\Theta_p = rKe^{-r(T-t)}\left\{1 - \Phi(d_2)\right\} - \frac{1}{2}\sigma S_t\frac{\Phi'(d_1)}{\sqrt{T-t}} =$$

$$\boxed{= rKe^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - \frac{1}{2}\sigma S_t\frac{\Phi'(d_1)}{\sqrt{T-t}}}$$

per la put la Θ assume
valori positivi e negativi

- Calcoliamo ora il rho di una call e di una put

$$\rho_c = \frac{\partial c}{\partial r} = x\,\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial r} + K(T-t)\,e^{-r(T-t)}\,\Phi(d_2) - K\,e^{-r(T-t)}\,\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial r}$$

$\frac{\partial d_1}{\partial r} = \frac{\partial d_2}{\partial r}$ e poiché $x\,\Phi'(d_1) = K\,e^{-r(T-t)}\,\Phi'(d_2)$

$$\Rightarrow \quad \rho_c = K(T-t)\,e^{-r(T-t)}\,\Phi(d_2)$$

$\rho_c > 0$ il prezzo di una call aumenta al crescere di r

Mentre per la put $\quad p(t,x) = c(t,x) - x + K e^{-r(T-t)}$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial c}{\partial r} - K(T-t)\,e^{-r(T-t)} = -K(T-t)\,e^{-r(T-t)}\underbrace{\left(1 - \Phi(d_2)\right)}_{\Phi(-d_2)}$$

$\rho_p < 0$ il prezzo di una put decresce al crescere di r

ROBUSTEZZA DEL MODELLO (Pascucci p.288)

Nel modello B&S la strategia di delta-hedging replica il payoff $F(S_T)$ di un derivato qualsiasi sia l'andamento del sottostante.

Nel modello B&S la dinamica di $\{S_t^{BS}\}$ è la soluzione di $dS_t^{BS} = S_t^{BS}(\mu\,dt + \sigma\,dW_t)$.

Supponiamo ora che la dinamica reale del sottostante sia diversa dal modello B&S e sia data da: $\quad dS_t = S_t(\mu_t\,dt + \sigma_t\,dW_t)$

$\{\mu_t\}$ $\{\sigma_t\}$ processi stocastici

Sappiamo che la strategia delta-hedging consiste nel detenere $\frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)$ azioni

ove $f(t,x)$ risolve: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + rx\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) - rf(t,x) = 0 & (t,x) \in [0,T) \times (0,+\infty) \\ f(T,x) = F(x) & x \in (0,+\infty) \end{cases}$

Il fatto che la dinamica del sottostante $\neq$ dal modello di B&S ha come conseguenza la perdita della proprietà di autofinanziamento $\Rightarrow$ la strategia ha un costo non nullo.

Scriviamo la formula di Itô per individuare la dinamica di $f(t,S_t)$

ove $\{S_t\}$ risolve: $dS_t = S_t(\mu_t\,dt + \sigma_t\,dW_t)$

$$df(t,S_t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)\,dS_t + \left\{\frac{\partial f}{\partial t}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,S_t)\right\}dt$$

d'altra parte poiché f risolve l'eq. di valutazione

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = rf(t,x) - rx\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$$

$$\Rightarrow df(t,S_t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)\,dS_t + \left\{rf(t,S_t) - rS_t\frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t) + \frac{1}{2}(\sigma_t^2 - \sigma^2)S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,S_t)\right\}dt$$

ricordando che $dB_t = rB_t\,dt$

$$\Rightarrow df(t,S_t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)\,dS_t + \frac{f(t,S_t) - S_t\frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)}{B_t}\,dB_t + R_t\,dt \qquad (*)$$

OSS: Ricordiamo che V_t è autofinanziante se $dV_t = \alpha_t\,dS_t + (V_t - \alpha_t S_t)\,r\,dt$

Da cui segue che la strategia il cui valore è $f(t,S_t)$ non è autofinanziante ma compare un termine di correzione dovuto all'errore specificazione del modello sottostante dato da $R_t = \frac{1}{2}(\sigma_t^2 - \sigma^2) S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

che è nullo solo se $\sigma_t^2 = \sigma^2$ ed in tal caso è autofinanziante.

Inoltre la strategia delta-hedging non replica più il derivato. Infatti, $\beta_t = (V - \alpha_t S_t) e^{-rt}$

~~Consideriamo~~ una strategia delta-hedging la valore del portafoglio $V = \alpha_t S_t + \beta_t B_t$

$$V(t,S_t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t) S_t + e^{-rt}\left(V(t,S_t) - S_t \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)\right) B_t$$

ed è autofinanziante se

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)\, dS_t + \left(V(t,S_t) - S_t \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)\right) r\,dt$$

$$dV(t,S_t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)\, dS_t + e^{-rt}\left(V(t,S_t) - S_t \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)\right) dB_t \qquad (**)$$

dove $dB_t = r B_t\, dt = r e^{rt}\, dt$

Sottraendo $(**)$ e $(*)$ si ottiene la dinamica dell'errore di replicazione

$$d(V(t,S_t) - f(t,S_t)) = r\left(V(t,S_t) - \cancel{S_t \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)}\right)dt - r\left(f(t,S_t) - \cancel{S_t \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)}\right)dt + R_t\, dt$$

$$= \left\{ r\left(V(t,S_t) - f(t,S_t)\right) - \frac{1}{2}(\sigma_t^2 - \sigma^2) S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,S_t) \right\} dt$$

~~Integriamo tra $[0,T]$ e assumiamo $V(0,S_0) = f(0,S_0)$~~

$$\cancel{V(T,S_T) - f(T,S_T) = V(0,S_0) - f(0,S_0) + \int_0^T r\left(V(t,S_t) - f(t,S_t)\right)dt - \int_0^T \frac{1}{2}(\sigma_t^2 - \sigma^2) S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,S_t)\, dt}$$

chiamo $q_t = V(t,S_t) - f(t,S_t)$

e osserviamo che $d(q_t e^{-rt}) = dq_t\, e^{-rt} - r q_t e^{-rt} dt = e^{-rt}(dq_t - r q_t\, dt)$

$$\underbrace{\left\{ d\left(V(t,S_t) - f(t,S_t)\right) - r\left(V(t,S_t) - f(t,S_t)\right) dt \right\} e^{-rt}}_{d\left(\left(V(t,S_t) - f(t,S_t)\right) e^{-rt} \right)} = -\frac{1}{2}\left(\sigma_t^2 - \sigma^2\right) e^{-rt} S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,S_t)\, dt$$

Integriamo tra $[0,T]$ e assumiamo $V(0,S_0) = f(0,S_0)$

$$\Big\{ V(T,S_T) - \underbrace{f(T,S_T)}_{=\,F(S_T)} \Big\} e^{-rT} = -\int_0^T \frac{(\sigma_t^2 - \sigma^2)}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,S_t)\, e^{-rt}\, dt$$

$$\Rightarrow \underbrace{V(T,S_T) - F(S_T)}_{\text{errore di replicazione}} = \int_0^T \frac{(\sigma^2 - \sigma_t^2)}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,S_t)\, e^{r(T-t)}\, dt$$

Questo errore dipende dal gamma $\Gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

In particolare l'errore è piccolo se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ è piccolo.

Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geq 0$ (come nel caso delle opzioni call e put) otteniamo che se $\sigma \geq \sigma_t$

la strategia di Black&Scholes super-replica il derivato ossia $V(T,S_T) \geq F(S_T)$.

Si dice che il modello di B&S è robusto e può essere utilizzato efficacemente per la copertura di un derivato, purché si prenda σ abbastanza grande.

Strategie delta-gamma hedging

- Nella strategia delta-hedging la quota investita in azioni è data da $\frac{\partial f}{\partial x}(t, S_t)$ che cambia al variare del prezzo del sottostante. Quindi il portafoglio dovrebbe essere ribilanciato ad ogni istante. Questo non è possibile in concreto.

  Inoltre la variazione del delta $\Delta = \frac{\partial f}{\partial x}$ al variare del sottostante è espressa da $\frac{\partial \Delta}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e dunque se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ è piccolo è comunque efficace la strategia delta-hedging anche se non viene ribilanciata ad ogni istante.

- Per minimizzare il numero di ribilanciamenti è naturale costruire una strategia che oltre neutrale al delta sia anche neutrale al gamma.

  Per fare questo è necessario introdurre un altro derivato di valore $g(t, S_t)$.

  Il portafoglio che costruiamo consiste in una posizione corta nel derivato di prezzo $f(t, S_t)$ in cui si investe una quota nel sottostante e una quota in un altro derivato.

  Per esempio se $f(t, S_t)$ è un derivato esotico e $g(t, S_t)$ è un'opzione call o put quotata sul mercato.

$$V(t, S_t) = -f(t, S_t) + \alpha_t S_t + \beta_t g(t, S_t)$$

Imponiamo la condizione: $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$ $\quad \Delta$ e Γ-neutrale

e otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -\frac{\partial f}{\partial x}(t, S_t) + \alpha_t + \beta_t \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t) = 0 \\ -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, S_t) + \beta_t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, S_t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \beta_t = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,S_t)}{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,S_t)} \quad e \quad \alpha_t = \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t) - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,S_t)}{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,S_t)} \frac{\partial g}{\partial x}(t,S_t)$$

Strategie delta-gamma hedging

$$\alpha_t = \Delta_f(t,S_t) - \beta_t \, \Delta_g(t,S_t)$$

Un portafoglio Δ e Γ neutrale è immune alle variazioni del sottostante ma anche alle variazione del delta. Se $\Delta_f = \Gamma_f = 0$

OSS.

Nei portafogli Δ-neutrali $\quad \Theta_f + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \Gamma_f = rf \quad$ quando Θ_f assume valori grandi positivi il Γ_f assume valori grandi negativi e viceversa

$\Rightarrow$ il Θ_f è usato spesso come proxy per il Γ_f.

ESEMPIO

Costruire un portafoglio corto in una call con α_t azioni e β_t put in modo che sia Δ che Γ neutrale. Considerare la call e la put scritte sullo stesso sottostante, maturità e stesso prezzo di esercizio.

$$V(t,x) = -c(t,x) + \alpha_t x + \beta_t p(t,x)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = -\dfrac{\partial c}{\partial x} + \alpha_t + \beta_t \dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \beta_t \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} \end{cases} \Rightarrow \quad \beta_t = \frac{\Gamma_c}{\Gamma_p} = 1$$

se call e put oltre ad essere scritte sulla stessa azione hanno stessa maturità e prezzo d'esercizio

$$\Rightarrow \quad -\frac{\partial c}{\partial x} + \alpha_t + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_t = \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} = \Phi(d_1) + \underbrace{\Phi(-d_1)}_{1-\Phi(d_1)} = 1$$

Il portafoglio call corta, put lunga, 1 azione lunga e sia Δ che Γ-neutrale

Il portafoglio è anche Vega-neutrale?

$$\nu_V = \frac{\partial V}{\partial \sigma} = -\frac{\partial c}{\partial \sigma} + \frac{\partial p}{\partial \sigma} = -\nu_c + \nu_p = 0$$

sì

Questo è in accordo con la relazione di parità in quanto $V(t,x) = p(t,x) + x - c(t,x) = Ke^{-r(T-t)}$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial \sigma} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = rKe^{-r(T-t)} > 0$$

Se le maturità sono diverse:
e/o i prezzi di esercizio sono diversi

$$\beta_t = \frac{\Gamma_c}{\Gamma_p} = \frac{\dfrac{\Phi'(d_1(T_1))}{\sigma\sqrt{T_1-t}\, S_t}}{\dfrac{\Phi'(d_1(T_2))}{\sigma\sqrt{T_2-t}\, S_t}} = \frac{\Phi'(d_1(T_1))}{\Phi'(d_1(T_2))} \frac{\sqrt{T_2-t}}{\sqrt{T_1-t}}$$

$i = 1,2$

$$d_1(T_i) = \frac{\log(S_t/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T_i - t)}{\sigma\sqrt{T_i - t}}$$

$$\beta_t = e^{-\frac{(d_1(T_1)^2 - d_1(T_2)^2)}{2}} \frac{\sqrt{T_2-t}}{\sqrt{T_1-t}} \neq 1 \quad \text{se } T_1 \neq T_2$$

$$-\frac{\partial c}{\partial x} + \alpha_t + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \Rightarrow \alpha_t = \Phi(d_1(T_1)) + \Phi(-d_1(T_2))$$

e $$\nu_v = -\frac{\partial c}{\partial \sigma} + \frac{\partial p}{\partial \sigma} = -S_t\sqrt{T_1-t}\;\Phi'(d_1(T_1)) + S_t\sqrt{T_2-t}\;\Phi'(d_1(T_2)) \neq 0$$

si può ~~anche scrivere~~ $\cancel{= S_t\sqrt{T_2-t}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{d_1(T_2)^2}{2}}\left\{1 - \frac{\Phi'(d_1(T_1))\sqrt{T_1-t}}{\Phi'(d_1(T_2))\sqrt{T_2-t}}\right\}}$

Esempio di hedging usando le Greche

1) Sia $V(t,x)$ il valore di un portafoglio al tempo t se $S_t = x$ Δ-neutrale /

$$\Delta_V(t,x) = \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) = 0 \quad \text{ma non } \Gamma\text{-neutrale}$$

L'investitore vuole comprare o vendere β contratti di un derivato di prezzo $f(t,x)$ in modo da rendere il portafoglio Γ-neutrale. Vogliamo determinare n t.c.

$$V(t,x) + \beta f(t,x) \quad \text{abbia } \Gamma\text{-nullo}$$

$$\Gamma_V + \beta \Gamma_f = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{-\Gamma_V}{\Gamma_f}$$

Ora però il portafoglio non è più Δ-neutrale perché il suo delta è dato da

$$\Delta_V + \beta \Delta_f = \beta \Delta_f$$

allora dovrà acquistare/vendere azioni nella quantità Δ_f infatti

il portafoglio $\tilde{V}(t,x) = V(t,x) + \beta f(t,x) - \beta \Delta_f x$

risulta Δ e Γ-neutrale: ~~infatti~~

$$\Delta_{\tilde{V}} = \Delta_V + \beta \Delta_f - \beta \Delta_f = 0$$

$$\Gamma_{\tilde{V}} = \Gamma_V + \beta \Gamma_f = 0$$

2) Sia $V(t,x)$ il valore di un portafoglio al tempo t se $S_t = x$ Δ-neutrale

vogliamo ~~[illegible]~~ rendere questo sia Γ che ν neutrale.

Bisogna determinare β_1 e β_2, β_1 contratti di un derivato di prezzo $f(t,x)$

e β_2 " " " $g(t,x)$

$$V(t,x) + \beta_1 f(t,x) + \beta_2 g(t,x)$$

e imponiamo che Γ_V e ν_V siano entrambi nulli

$$\begin{cases} \Gamma_V + \beta_1 \Gamma_f + \beta_2 \Gamma_g = 0 \\ \nu_V + \beta_1 \nu_f + \beta_2 \nu_g = 0 \end{cases}$$

Sistema di due eq. in due incognite che ammette una e una sola soluzione se

$$\begin{vmatrix} \Gamma_f & \Gamma_g \\ \nu_f & \nu_g \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \Gamma_f \nu_g \neq \Gamma_g \nu_f$$

$$\frac{\Gamma_f}{\nu_f} \neq \frac{\Gamma_g}{\nu_g}$$

Dopodiché per rendere il portafoglio Δ-neutrale

bisogna acquistare e vendere azioni in base al Δ_f e Δ_g. Ossia il portafoglio

$$V(t,x) + \beta_1 f(t,x) + \beta_2 g(t,x) - \beta_1 \Delta_f \cdot x - \beta_2 \Delta_g \cdot x$$

Sarà Δ, Γ e ν - neutrale

CONFRONTO PREZZO CALL REALE E PREZZO FORMULA DI Black & Scholes

Inoltre si può dimostrare che se $\{S_t\}_{t\geq 0}$ è il prezzo di un'azione descritto rispetto alla misura $\mathbb{Q}$ dalla EDS

$$dS_t = S_t(r\,dt + \sigma_t\,dW_t)$$

con σ_t p. stocastico e $\boxed{\sigma_1 \leq \sigma_t \leq \sigma_2}$

allora $\boxed{c_{BS}(t, S_t, \sigma_1) \leq e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(S_T - K)_+ \mid \mathcal{F}_t\right] \leq c_{BS}(t, S_t, \sigma_2)}$

$c_{BS}(t, x, \sigma)$ prezzo della call nel modello Black & Scholes. Questo spiega perché la formula di B&S venga utilizzata anche se l'ipotesi di volatilità costante non è realizzata, in quanto le formule di B&S danno una approssimazione del valore reale dell'opzione.

Questo risultato è l'es. 2) del Foglio N.6 di esercizi

FOGLIO 6 ES. N. 2

1) $dS_t = S_t(r\,dt + \sigma_t\,dW_t)$ rispetto ad una misura mg Q

call scritta su S_t con maturità T e prezzo d'esercizio Q

$$c_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^Q[(S_T - K)_+ \mid \mathcal{F}_t]$$

assumere $\sigma_1 < \sigma_t < \sigma_2$

Se $c_{BS}(t, x, \sigma_1) := e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^Q[(X_T - K)_+ \mid X_t = x]$

ove $dX_t = X_t(r\,dt + \sigma\,dW_t)$ ~~nel~~ modello B&S

mostrare che $c_{BS}(t, S_t, \sigma_1) \le c_t \le c_B(t, S_t, \sigma_2)$

• Applichiamo la formula di Ito a $\boxed{c_{BS}(t, x, \sigma_2)\,e^{-rt} = f(t,x)}$

$$df(t,S_t) = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}(t,S_t) + \frac{1}{2}S_t^2\sigma_t^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,S_t)\right\}dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)\,dS_t$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial c_{BS}}{\partial x}e^{-rt} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -r e^{-rt}c_{BS} + e^{-rt}\frac{\partial c_{BS}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 c_{BS}}{\partial x^2}e^{-rt}$$

$$df(t,S_t) = \left[e^{-rt}\frac{\partial c_{BS}}{\partial t} - re^{-rt}c_{BS} + \frac{1}{2}S_t^2\sigma_t^2 e^{-rt}\frac{\partial^2 c_{BS}}{\partial x^2}\right]dt + \frac{\partial c_{BS}}{\partial x}e^{-rt}(S_t r\,dt + S_t\sigma_t\,dW_t)$$

$$f(t,S_t) = f(0,S_0) + \int_0^t \frac{\partial c_{BS}}{\partial x}e^{-ru}S_u\sigma_u\,dW_u + \int_0^t e^{-rs}\left\{\frac{\partial c_{BS}}{\partial t} + rS_u\frac{\partial c_{BS}}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_s^2 S_s^2\frac{\partial^2 c_{BS}}{\partial x^2} - rc_{BS}\right\}$$

Dalla EDP
$$\begin{cases} \dfrac{\partial c_{BS}}{\partial t} + rx\dfrac{\partial c_{BS}}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\sigma_2^2 x^2\dfrac{\partial^2 c_{BS}}{\partial x^2} - rc_{BS} = 0 \\ c_{BS}(T, x, \sigma_2) = (x-K)_+ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{-rt}c_{BS}(t, S_t, \sigma_2) = c_{BS}(0, S_0, \sigma_2) + \int_0^t e^{-rs}\frac{1}{2}S_u^2(\sigma_u^2 - \sigma_2^2)\frac{\partial^2 c_{BS}}{\partial x^2}\,du + \int_0^t \frac{\partial c_{BS}}{\partial x}e^{-ru}S_u\sigma_u\,dW_u} \qquad t \in [0,T]$$

Calcolando questa espressione ~~all'istante T~~ tra $[T, t]$ ~~e~~ e prendendo la media

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}(S_T-K)_+ \mid \mathcal{F}_t\right] = e^{-rt}c_{BS}(t,S_t,\sigma_2) + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T e^{-rs}\frac{1}{2}S_u^2(\sigma_u^2-\sigma_2^2)\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\,du \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right]$$

$$+ \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T \frac{\partial c_{BS}}{\partial x} e^{-ru} S_u\sigma_u\, dW_u \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right]}_{=0}$$

per la proprietà di mg

$$\Rightarrow \quad c_t = c_{BS}(\sigma_2) + e^{-rt}\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T e^{-rs}\frac{1}{2}S_u^2(\sigma_u^2-\sigma_2^2)\frac{\partial^2 c_{BS}}{\partial x^2}du \,\Big|\,\mathcal{F}_t\right]}_{\leq 0}$$

analogamente

$$c_t = c_{BS}(\sigma_1) + e^{-rt}\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T e^{-rs}\frac{1}{2}S_u^2(\sigma_u^2-\sigma_1^2)\frac{\partial^2 c_{BS}}{\partial x^2}du \,\Big|\,\mathcal{F}_t\right]}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow \quad c_{BS}(\sigma_1) \leq c_t \leq c_{BS}(\sigma_2)$$