

6. APPROFONDIMENTI VALUTAZIONE DI DERIVATI

- Cambio di misura di probabilità, Teorema di Girsanov
- Misura martingala
- Teorema di Feynman-Kac
- Arbitraggi e mercati finanziari completi
- Teoremi fondamentali dell'Asset Pricing

Cambio di misura di probabilità

$(\mathcal{G}, \mathcal{F}, P)$ Def. $Q \ll P$ assolutamente q continua rispetto a P
significa che se $P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0 \quad A \in \mathcal{G}$

Un noto teorema di analisi, il teorema di Radon-Nikodym dice che allora esiste una v.o. L t.c. ($\mathcal{G}$ -mis.)
 $Q(A) = E[1_A] = \int_A L dP$

inoltre $L = \frac{dQ}{dP}$ si indica così ($\Rightarrow dQ = L dP$)

Essendo Q una misura di probabilità $Q(\Omega) = 1 = E[L]$

~~$Q(\Omega) = 1$~~
e poiché $E[1_A L] \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{G} \Rightarrow L \geq 0$

Consideriamo ora uno spazio di probabilità con una retroazione $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$

se $Q \ll P$ su $\mathcal{F}$ $\Rightarrow Q \ll P$ su $\mathcal{F}_t, \quad \forall t$

(ovvero $\forall A \in \mathcal{F}_t: P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0$)

allora $\exists$ una v.o. $L_t, \quad \mathcal{F}_t$ -misurabile tale che

$$\forall A \in \mathcal{F}_t \quad Q(A) = E\left[\frac{dQ}{dP} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

Verifichiamo che $(L_t)_{t \geq 0}$ è una P -mg e che $L_t \geq 0, \quad E[L_t] = 1 \quad \forall t$

Se mostriamo che $L_t = E[L | \mathcal{F}_t]$ per l'esempio 1 avremo che è una martingala
Infatti, $\forall A \in \mathcal{F}_t$

$$Q(A) = E(1_A L_t) \text{ ma } A \in \mathcal{F} \Rightarrow Q(A) = E(1_A L) = E(1_A E(L | \mathcal{F}_t))$$

$$\text{quindi abbiamo che } \forall A \in \mathcal{F}_t \quad E(1_A L_t) = E(1_A E(L | \mathcal{F}_t))$$

$$\text{e per l'es. 2c) del foglio N.1} \quad L_t = E(L | \mathcal{F}_t)$$

$$\text{Poi osserviamo che } E(L_t) = E(E(L | \mathcal{F}_t)) = E(L) = 1$$

Sia r tasso d'interesse istantaneo costante $\Rightarrow B_t = B_0 e^{rt}$ titolo non rischioso
privato di rischio detto "bond"

Def. $(Q, \mathcal{F}, P)$ una misura $Q \sim P$ (equivalente: $Q(A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$)

si dice misura mg per $(S_t)_{t \geq 0}$ (processo dei prezzi di un titolo rischioso)
se $S_t e^{-rt}$ è una mg rispetto a Q , ossia

$$\forall s \leq t \quad E^Q[S_t e^{-rt} | \mathcal{F}_s] = S_s e^{-rs}$$

Ne consegue che se Q è una misura martingale per $(S_t)_{t \geq 0}$: $E^Q[S_t | \mathcal{F}_s] = S_s e^{-r(t-s)}$
e in particolare $E^Q[S_t | \mathcal{F}_0] = E^Q[S_t] = S_0 e^{rt}$ per $s=0$

Ossia la misura Q è la cosiddetta misura neutrale al rischio, rispetto ad essa
 $(S_t)_{t \geq 0}$ ha lo stesso tasso di rendimento atteso del bond (privato di rischio), ossia r

Sia ora $(S_t)_{t \geq 0}$ descritto da un moto browniano geometrico (modello Black & Scholes)

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

ci si chiede se esiste ed unica la misura mg per $(S_t)_{t \geq 0}$.

Abbiamo visto che $S_t e^{-\mu t}$ è una mg rispetto a P

dunque auremo che $S_t e^{-rt}$ è una mg rispetto a Q se

$$S_t = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t^Q}$$

con $(W_t^Q)_{t \geq 0}$ moto browniano rispetto a Q

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t + (\mu - r)t}$$

posto $W_t^Q = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$, se esiste Q : W_t^Q è un moto browniano rispetto a Q

auremo che Q è una misura martingala. Questo è assicurato dal teorema di Girsanov.

Teorema di Girsanov

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Sia $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ un processo stocastico t.c. $V_{t \geq 0} \mathbb{E} \left[e^{\frac{1}{2} \int_0^t \theta(s)^2 ds} \right] < +\infty$ (Condizione di Novikov)

allora $\mathbb{F} \subset \mathcal{Q} \sim P$ t.c. $W_t^Q = W_t + \int_0^t \theta(s) ds$ è un Q -moto browniano.

Nel modello B & S la misura martingale è quella misura Q associata

a $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$ (prezzo di mercato del rischio)

Invece se teorema di Girsanov ci dice come è costruita la misura $\mathbb{Q}$:

$$L_t^{\mathbb{Q}} := \frac{d\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}}$$

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_A L_t^{\mathbb{Q}}) \quad \forall A \in \mathcal{F}_t$$

$$L_t^{\mathbb{Q}} = e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \theta(s)^2 ds + \int_0^t \theta(s) dW_s}$$

(la condizione di Novikov è indispensabile per dimostrare che $L_t^{\mathbb{Q}}$ è una martingala)

Per $\theta(t) = \theta$ costante

$$L_t^{\mathbb{Q}} = e^{-\frac{1}{2} \theta^2 t - \theta W_t}$$

è la derivata di Radon-Nikodym che permette di passare da $\mathbb{P}$ a $\mathbb{Q}$

Invece si può passare anche da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{P}$ con

$$(L_t^{\mathbb{Q}})^{-1} = e^{\frac{1}{2} \theta^2 t + \theta W_t}$$

essendo

$$W_t = W_t^{\mathbb{Q}} + \theta t$$

$$(L_t^{\mathbb{Q}})^{-1} = e^{\frac{1}{2} \theta^2 t + \theta (W_t^{\mathbb{Q}} - \theta t)} = e^{-\frac{1}{2} \theta^2 t + \theta W_t^{\mathbb{Q}}}$$

Perché le derivate di RN per passare da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{P}$ e viceversa sono:

$$\left. \frac{d\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\frac{1}{2} \theta^2 t + \theta W_t}$$

W_t moto browniano

$\Downarrow$

$W_t + \theta t$ $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ -moto browniano

$$\left. \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}} \right|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\frac{1}{2} \theta^2 t + \theta W_t^{\mathbb{Q}}}$$

$W_t^{\mathbb{Q}}$ $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ -moto browniano

$\Downarrow$

$W_t^{\mathbb{Q}} - \theta t$ $\mathbb{P}$ -moto browniano

Indaghiamo in modo più approfondito le equazioni ed la soluzione di una equazione alle derivate parziali del tipo:

$$(EDP) \int_0^T \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \mu(t, x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - r f(t, x) = 0 \quad t \in (0, T), x \in \mathbb{R}$$

$$f(T, x) = F(x)$$

e la sua rappresentazione in termini di valore atteso.

Teorema di Feynman-Kac

Sia $f(t, x)$ l'unica soluzione $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ della (EDP), allora

$$f(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[F(X_T) | X_t = x]$$

ove $dX_t, t \in [0, T]$ è l'unica soluzione della eq. differenziale stocastica

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t \quad t \in [0, T], X_0 \in \mathbb{R}$$

Dim.

Sia $Z_t = e^{-rt} f(t, X_t)$ e applichiamo la formula di Itô

$$dZ_t = e^{-rt} df(t, X_t)$$

$$dZ_t = e^{-rt} \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, X_t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dX_t \right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -r e^{-rt} f + e^{-rt} \frac{\partial f}{\partial t} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = e^{-rt} \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = e^{-rt} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow dg(t, x_t) = \int -r e^{-rt} f(t, x_t) dt + e^{-rt} \frac{1}{2} \sigma^2(t, x_t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x_t) dt + e^{-rt} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_t) \int \mu(t, x_t) dt + \sigma(t, x_t) dw_t$$

poiché f è soluzione dell'EDP si ottiene che

$$\Rightarrow dg(t, x_t) = e^{-rt} \sigma(t, x_t) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_t) dw_t$$

ossia

$$g(T, x_T) = g(t, x_t) + \int_t^T e^{-rs} \sigma(s, x_s) \frac{\partial f}{\partial x}(s, x_s) dw_s = g(t, x_t) + M_T - M_t$$

$$\text{ove } M_t := \int_0^t e^{-rs} \frac{\partial f}{\partial x}(s, x_s) \sigma(s, x_s) dw_s \quad \text{è una mg se } \mathbb{E} \left[\int_0^T \left| e^{-rs} \frac{\partial f}{\partial x}(s, x_s) \sigma(s, x_s) \right|^2 ds \right] < \infty$$

"

$$\Rightarrow \mathbb{E}[g(T, x_T) | \mathcal{F}_t] = g(t, x_t) + \mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_t] - M_t = g(t, x_t)$$

$$\mathbb{E}[f(T, x_T) e^{-rT} | \mathcal{F}_t] = e^{-rt} f(t, x_t)$$

tenendo conto della condizione

$$f \text{ inda mea (EDP)} \quad f(t, x) = F(x)$$

$$\Rightarrow f(t, x_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[F(x_T) | \mathcal{F}_t]$$

$$\sigma(x_t) \subset \mathcal{F}_t$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[f(t, x_t) | \sigma(x_t)] = f(t, x_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\mathbb{E}[F(x_T) | \mathcal{F}_t] | \sigma(x_t)] =$$

$$= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[F(x_T) | \sigma(x_t)]$$

□

Def. Un Orthogonal

è un portafoglio autofinanziante T.c. $R_t = (\alpha_t, \beta_t)$ $V_0^R = 0$ ~~è~~ quasi certamente

$$P(V_T^R \geq 0) = 1 \quad e \quad P(V_T^R > 0) > 0$$

• S_t titolo rischioso

• B_t bond privo di rischio

$$B_t = e^{-rt}$$

$$dB_t = r B_t dt$$

$$V_t^R = \alpha_t S_t + \beta_t B_t$$

$R_t = (\alpha_t, \beta_t)$ è autofinanziante se

$$dV_t^R = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t$$

• $S_t = S_t e^{-rt}$ prezzo scontato

Prop. Il portafoglio $R_t = (\alpha_t, \beta_t)$ è autofinanziante $\Leftrightarrow dV_t^R = \alpha_t d\tilde{S}_t$

dim.

$$d\tilde{S}_t = e^{-rt} dS_t - r e^{-rt} S_t dt$$

$$dV_t^R = e^{-rt} dV_t^R - r e^{-rt} V_t^R dt$$

$$dV_t = \alpha_t dS_t + r(V_t - \alpha_t S_t) dt$$

$$\Rightarrow dV_t^R = e^{-rt} \left[\alpha_t dS_t + r(V_t - \alpha_t S_t) dt \right] - r e^{-rt} V_t^R dt$$

$$dV_t^R = e^{-rt} \left[\alpha_t dS_t - r \alpha_t S_t dt \right] = \alpha_t d\tilde{S}_t$$

□

Def.

$Q \sim P$ è una misura martingale se $\{S_t\}_{t \in [0, T]}$ è una Q -martingale

$$E^Q[e^{-rt} S_t | \mathcal{F}_s] = e^{-rs} S_s \quad \forall t \geq s \quad \Leftrightarrow \quad E^Q[S_t | \mathcal{F}_s] = S_s e^{r(t-s)}$$

$$\forall t \geq s$$

Osserviamo che se Q è una misura martingala (e $1_{S_t \leq 0}$ allora il valore T di ogni strategia $R_t = (x_t, \beta_t)$ autofinanziante è una Q -martingala, infatti

$$dV_t^R = \alpha_t dS_t \quad \text{e se } 1_{S_t \leq 0} \text{ è una } Q\text{-mg} \Rightarrow 1_{V_t^R \leq 0} \text{ è una martingala}$$

In particolare nel Modello B&S

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t^P) \quad 1_{W_t^P \leq 0} \text{ moto-browniano} \\ dS_t = S_t (\underbrace{r dt + \sigma dW_t^Q}_{Q\text{-martingala}})$$

Questo vale in generale anche senza specificare la dinamica del prezzo

$$dS_t^R = -r e^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t = -r e^{-rt} S_t dt + e^{-rt} (S_t \sigma dt + S_t \sigma dW_t^Q) \\ dS_t^R = S_t e^{-rt} \sigma dW_t^Q = \sigma S_t^R dW_t^Q$$

$$\Rightarrow dV_t^R = \alpha_t \sigma S_t^R dW_t^Q \Rightarrow V_t^R = V_0^R + \underbrace{\int_0^t \alpha_s \sigma S_s^R dW_s^Q}_{Q\text{-mg}}$$

I Teoremi fondamentali dell'asset pricing

Un mercato è libero da arbitraggi $\Leftrightarrow$ Esiste una misura martingala equivalente P im.

Se esiste Q misura mg equivalente (e $1_{S_t \leq 0}, 1_{V_t^R \leq 0}$ sono strategie autof. V_t^R Q -mg

$$\Rightarrow \mathbb{E}^Q[V_T^R] = V_0^R = V_0^R$$

e dunque $\nexists$ arbitraggi. Infatti se R_t fosse un arbitraggio $V_0^R = 0, P(V_T^R > 0) = 1$ e $P(V_T^R > 0) > 0 \Rightarrow Q(V_T^R > 0) = 1$ e $Q(V_T^R > 0) > 0$ (perché vero)

misura equivalenti, $\Rightarrow \mathbb{E}^Q[V_T^R] > 0$ e questo è in contraddizione
 con $\mathbb{E}^Q[V_T^R] = V_0^R = 0$
 $\parallel$
 $e^{-rt} \mathbb{E}^Q[V_T^R]$

Viceversa se esiste un arbitraggio

R_t autofinanziante e
 $V_0^R = 0$, $P(V_T^R \geq 0) = 1$, $P(V_T^R > 0) > 0$

$\Rightarrow \exists Q \sim P$ $\mathbb{E}^Q[V_T^R] > 0$ e dunque Q non può essere una misura
 martingala avvenenti $\mathbb{E}^Q[V_T^R] = e^{-rt} \mathbb{E}^Q[V_T^R] = V_0^R = 0$

□

Teorema fondamentale dell'asset pricing

~~Un mercato libero da arbitraggio è completo se e solo se~~ $\exists$ una misura martingala equivalente

Osservazioni:

Se in un mercato finanziario esiste una misura mg equivalente Q allora
 le $V_t^{R^1}$ e $V_t^{R^2}$ sono strategie autofinanzianti t.c.

$$V_T^{R^1} = V_T^{R^2} \Rightarrow V_t^{R^1} = V_t^{R^2} \quad \forall t \in [0, T].$$

Imponi $V_T^{R^1} = V_T^{R^2}$ sono Q -martingale $\Rightarrow$

$$V_t^{R^1} = \mathbb{E}^Q[V_T^{R^1} | \mathcal{H}_t] \\ V_t^{R^2} = \mathbb{E}^Q[V_T^{R^2} | \mathcal{H}_t]$$

$\Rightarrow$

$$V_t^{R^1} = V_t^{R^2} \parallel e^{-rt} V_t^{R^1} = e^{-rt} V_t^{R^2}$$

$$\Downarrow V_t^{R^1} = V_t^{R^2}$$

Def. Un derivato di payoff finale X o X è una v.a. Π_T -misurabile e replicabile se $\Pi_t = (C_t, P_t)$ auto finanziante t.c. $V_T^Q = X$.

$$\begin{aligned} \text{Se } Q &= \text{quasi misera mg} \\ &\Rightarrow X_t^Q = Q - m_Q - x \\ &\quad V_t^{R,Q} = X \\ &\Rightarrow V_t^{G,Q} = e^{-rt} X \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \frac{<?}{+50} \\ \parallel \\ \rho_1, \rho_2 \\ \frac{<}{+50} \\ \parallel \\ \text{用} \text{ } \text{ } \\ \text{ } \text{ } \\ \frac{<?}{+50} \\ \text{ } \text{ } \\ \text{ } \text{ } \\ \parallel \\ \text{用} \text{ } \text{ } \\ \text{ } \text{ } \\ \rho_1, \rho_2 \\ \times \\ \text{ } \text{ } \\ \text{ } \text{ } \end{array}$$

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_t] = e^{-(r(T-t))} \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_t]$$

Quindi se $\mathcal{R} \in \mathcal{P}$ è uno stat. autof. de neppure si dovrebbe

$$Y_k = \mathbb{E}[X | H_k]$$

V è misura martingala equivalente, $H_t := e^{-\int_0^t r_s ds} \mathbb{E}^Q[X | \mathcal{H}_t]$ è detto prezzo d'arbitraggio di X ed è definito in modo unico.

Def. Un mercato si dice completo se ogni derivato è replicabile da una strategia autofinanziata.

II Teorema Fundamental de Asset Pricing

Um mercado eficiente é completo $\Leftrightarrow$ Existe uma única medida martingale

Dim. ∇ mosiano $\Rightarrow$ e'imicaione ($\Rightarrow$)

Obtinamos isto e se X é periódica allora V_{Q_1} e V_{Q_2} misurano equivalenti

$$E^{\Theta_1}[X | \mathcal{H}_t] = E^{\Theta_2}[X | \mathcal{H}_t] \quad (\text{modèle de mélange de Markov})$$

scandalo di Vito ~~Alfano~~ e
una Q_1 de una Q_2 mangia)

$$\Rightarrow \mathbb{E}^{Q_1}[X] = \mathbb{E}^{Q_2}[X]$$

$$\text{assumendo } \mathbb{F} = \mathbb{F}_T$$

$$\Rightarrow$$

$$Q_1(A) = Q_2(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

$$X = 1_A$$

(basta mostrar)

$\forall X$ v.a.

$\mathbb{F}_T$ -measurable

Se não demonstrar onde se encontra.

□