

5. VALUTAZIONE DI DERIVATI NEL MODELLO BLACK & SCHOLES

- Introduzione ai derivati
- Relazione di parità put-call
- Strategie di investimento autofinanzianti, equazione di valutazione di Black & Scholes
- Valutazione neutrale al rischio
- Formule per il prezzo della call e della put

Introduzione ai derivati

• Un derivato è un contratto finanziario in cui payoff ad una data futura T dipende dal valore di un sottostante: $F(S_T)$

Per esempio S_T è il valore di una azione al tempo T

Esistono derivati con sottostanti indici azionari, valute, merci ed anche beni non scambiati sui mercati come i derivati energetici

Il più semplice contratto derivati sono i futures e i forward (Contratti a termine):

• i contratti sono obbligati ad acquistare / vendere l'attività sottostante ad una data futura T e ad un prezzo di consegna concordato all'inizio di stipula.

I contratti forward sono negoziati Over the Counter OTC mentre i futures nei

Posizione lunga: acquisto
Posizione corta: vende

mercati regolamentati, e questo consente di onorare il contratto ogni giorno ed evitare che ci siano insolvenze.

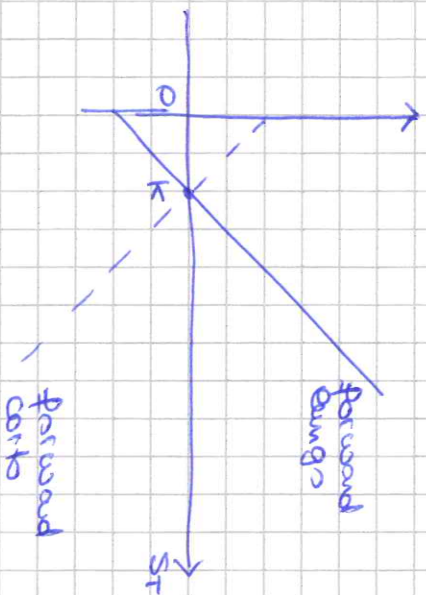
Esempi di futures e forwards sono sia merci e valute.

Le opzioni sono contratti derivati che attribuiscono al detentore il diritto di acquistare (call) o vendere (put) un'attività sottostante ad una data futura ed ad un prezzo predefinito, le "strike price" - prezzo di esercizio)

Entrare nei contratti forward / future non costa nulla mentre per acquistare una call e una put si deve sostenere un costo iniziale c e p .

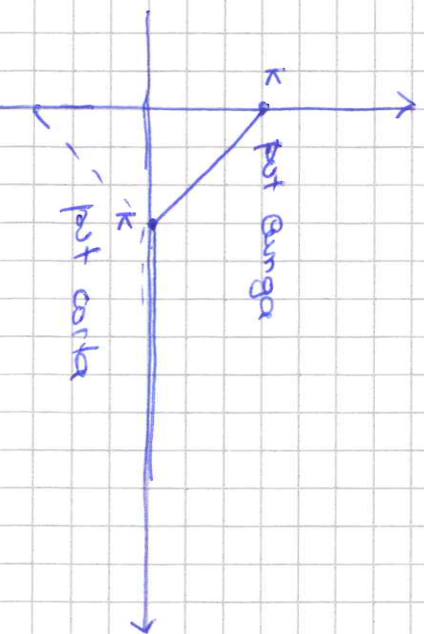
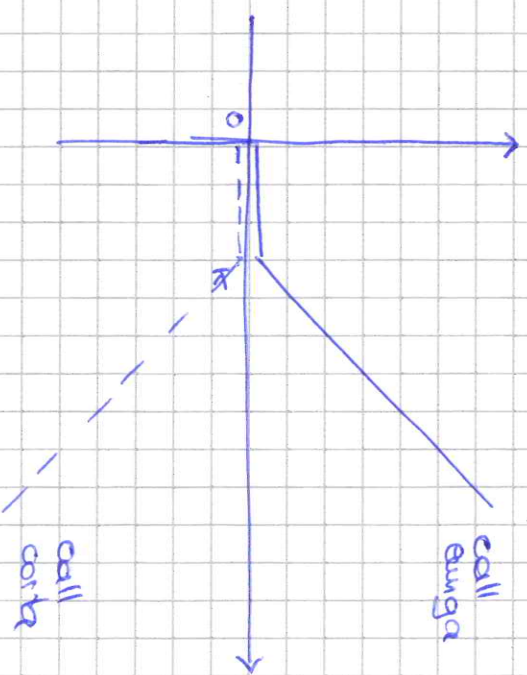
Payoff call $FC(S_T) = (S_T - K)_+ = \begin{cases} S_T - K & \text{se } S_T > K \\ 0 & \text{se } S_T \leq K \end{cases}$ La call viene esercitata

Payoff put $FC(S_T) = (K - S_T)_+ = \begin{cases} K - S_T & \text{se } S_T < K \\ 0 & \text{se } S_T \geq K \end{cases}$ La put viene esercitata



Payoff forward lungo
 $FC(S_T) = S_T - K$

forward corto
 $-(S_T - K) = K - S_T$



Il nostro scopo è di calcolare il prezzo di un derivato (in qualsiasi istante precedente alla maturità) che non permetta arbitraggi sul mercato, senza profitti privi di rischio.

Ipotesi di mercato: Azioni di transizione - Assenza di opportunità di arbitraggio - ie denaro viene preso e dato in prestito allo stesso tasso d'interesse r costante (tasso istantaneo di interesse)

Relazione di parità put-call:

$$p + S_0 = c + K e^{-rT}$$

Consideriamo due portafogli

P_1 : 1 call + 1 somma

P_2 : 1 put + 1 azione

$$V_T(P_1) = (S_T - K)_+ + K e^{-rT} e^{rT} = (S_T - K)_+ + K = \begin{cases} S_T - K + K = S_T & \text{se } S_T > K \\ K & \text{se } S_T \leq K \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_T(P_1) = \max(S_T, K)$$

$$V_T(P_2) = (K - S_T)_+ + S_T = \begin{cases} S_T & \text{se } S_T > K \\ K - S_T + S_T = K & \text{se } S_T \leq K \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_T(P_2) = \max(S_T, K)$$

$$\text{In AOA } V_T(P_1) = V_T(P_2) \Rightarrow V_0(P_1) = V_0(P_2) \text{ ovv. } c + K e^{-rT} = p + S_0$$

Vediamo che se $p + S_0 > c + K e^{-rT}$ si apre il arbitraggio: acquistiamo la call e vendiamo la put e l'azione allo scoperto, ~~per fare~~ ~~es~~ ~~spendiamo~~ incassiamo $p + S_0 - c$ che investiamo al tasso r

al tempo T

call lunga + put corta

$$(S_T - K)_+ + (K - S_T)_+ = \begin{cases} S_T - K & \text{se } S_T > K \\ S_T - K & \text{se } S_T \leq K \end{cases}$$

$$= (S_T - K) \text{ se } S_T > K \\ = (S_T - K) \text{ se } S_T \leq K$$

acq. e' azione al prezzo K

acquistiamo l'azione al prezzo K e vendiamo la put allo scoperto

$$(p + S_0 - c) e^{rT} - K > 0 \text{ incasso per ipotesi } p + S_0 - c > K e^{-rT}$$

Se fosse $p + S_0 < c + K e^{-rT}$ si avrebbe il seguente arbitraggio: acquistiamo la put + l'azione e

vendiamo la call: questo richiede di prestito di $p + S_0 - c$ al tempo T

al tempo T call corta + put lunga

$$-(S_T - K)_+ + (K - S_T)_+ = \begin{cases} S_T - K & \text{se } S_T > K \\ S_T - K & \text{se } S_T \leq K \end{cases}$$

$$= K - S_T \text{ vendiamo l'azione al prezzo } K$$

$$K - (p + S_0 - c) e^{rT} > 0 \text{ perde per ipotesi } p + S_0 - c < K e^{-rT}$$

vendiamo l'azione

restituiamo il prestito

Valutazione dei derivati nel modello Black & Scholes

(Pasucci cap. 7)
p. 263

$$dB_t = r B_t dt$$

$$\frac{dB_t}{B_t} = r dt$$

$$\int_0^t \frac{1}{B_r} dB_r = \int_0^t r dr = rt$$

$$Eg(B_r)|_0^t = Eg(B_t) - Eg(B_0) = rt$$

$$Eg\left(\frac{B_t}{B_0}\right) = e^{rt}$$

$$\frac{B_t}{B_0} = e^{rt}$$

$$B_t = B_0 e^{rt}$$

$$\text{costo } B_0 = 1$$

$$B_t = e^{rt}$$

$$r < \gamma$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dB_t = r B_t dt \\ B_0 = 1 \end{array} \right.$$

Titolo non rischioso (bond)

$$\left\{ \begin{array}{l} dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t) \\ S_0 = S_0 \end{array} \right. \quad \text{titolo rischioso}$$

• Derivato con payoff finale $F(S_T)$, per esempio

$$\text{call} \quad F(S_T) = (S_T - K)_+ = \begin{cases} S_T - K & \text{se } S_T > K \\ 0 & \text{se } S_T < K \end{cases}$$

T maturità
 K prezzo d'esercizio

$$\text{put} \quad F(S_T) = (K - S_T)_+ = \begin{cases} K - S_T & \text{se } S_T < K \\ 0 & \text{se } S_T > K \end{cases}$$

Def. Una strategie è un processo stocastico $R_t = (\alpha_t, \beta_t)$

$$\text{con } \alpha_t \in \mathbb{R}^2 \text{ e } \beta_t \in \mathbb{R}^1$$

$$\left(\mathbb{E} \int_0^T \alpha_t^2 dt < \infty \right) \quad \left(\mathbb{E} \int_0^T |\beta_t| dt < \infty \right)$$

α_t quote di S_t nel portafoglio
" " β_t nel portafoglio

valore del
portafoglio

$$V_t^R = \alpha_t S_t + \beta_t B_t$$

α, β possono assumere anche valori negativi, anche è ammesso da vendita allo scoperto e finanzia denaro in prestito.

Def.

Diciamo che la strategia è autofinanziante se vale

$$dV_t^R = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t$$

Questa relazione esprime il fatto che la variazione istantanea del valore del portafoglio è dovuta al movimento dei prezzi dei titoli e non ad un intervento esterno in cui si è aggiunta l'equità. Osserviamo che si può anche scrivere:

$$dV_t^R = \alpha_t dS_t + \pi(V_t^R - \alpha_t S_t) dt$$

~~Definizione~~

$$S_t = e^{-rt} S_t \quad \text{prezzo scontato}$$

$$V_t^R = e^{-rt} V_t^R \quad \text{portafoglio scontato}$$

Proposizione

Una strategia $R_t = (\alpha_t, \beta_t)$ è autofinanziante $\Leftrightarrow dV_t^R = \alpha_t d\tilde{S}_t$

$$\text{dim.} \quad dV_t^R = -r e^{-rt} V_t^R dt + e^{-rt} dV_t^R = -r \tilde{V}_t^R dt + e^{-rt} (\alpha_t dS_t + \beta_t dB_t)$$

$$e \beta_t B_t = V_t^R - \alpha_t S_t \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} dV_t^R &= -r \tilde{V}_t^R dt + \alpha_t e^{-rt} (dS_t + (\pi(V_t^R - \alpha_t S_t) dt)) = \\ &= -r \tilde{V}_t^R dt + \pi \tilde{V}_t^R dt + \alpha_t e^{-rt} dS_t + \underbrace{e^{-rt} \alpha_t dS_t - \alpha_t \pi e^{-rt} S_t dt}_{\alpha_t (e^{-rt} dS_t - \pi e^{-rt} S_t dt)} = \alpha_t d\tilde{S}_t \end{aligned}$$

altro modo:

$$d\tilde{S}_t = -r e^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t$$

$$\text{Osserviamo che: } d\tilde{S}_t = (\mu - r) \tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dW_t$$

□

Strategie Markoviane

Def.

$$R_t = (\alpha_t, \beta_t)$$

con

$$\alpha_t = \alpha(t, S_t)$$

$$\beta_t = \beta(t, S_t)$$

$$\alpha, \beta \in C^{1,2}([0, T] \times [0, T])$$

$$\Rightarrow V_t^R = \alpha(t, S_t) S_t + \beta(t, S_t) \cdot e^{rt} = F(t, S_t)$$

Teorema 1.

Sia $R = (\alpha_t, \beta_t)$ un hedge foglio markoviano e $V_t^R = F(t, S_t)$ le valenze del hedge foglio al tempo t . Le seguenti affermazioni sono equivalenti

(i) R è autofinanziante

(ii) F è soluzione dell'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, s) + r s \frac{\partial F}{\partial s}(t, s) + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(t, s) - r F(t, s) = 0$$

$$\text{e vale la relazione } \alpha(t, s) = \frac{\partial F}{\partial s}(t, s)$$

Dim.

Mostriamo che (i) $\Rightarrow$ (ii)

Vallo formo del V_t^R :

$$dV_t^R = dF(t, S_t) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(t, S_t) \right\} dt + \frac{\partial F}{\partial s}(t, S_t) dS_t \quad (1)$$

V_t^R è autofinanziante se

$$dV_t^R = \alpha(t, S_t) dS_t + \underbrace{\beta(t, S_t) dB_t}_{B_t r dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dV_t^R}{V_t^R} = \frac{dF(t, S_t)}{F(t, S_t)}$$

ricordiamo che

$$V_t^q = \alpha(t, S_t) \cdot S_t + \beta(t, S_t) B_t$$

$$P(t, S_t) B_t = V_t^q - \alpha(t, S_t) S_t$$

$$\Rightarrow dV_t^q = \alpha(t, S_t) dS_t + \pi(V_t^q - \alpha(t, S_t) S_t) dt + \frac{\partial P(t, S_t)}{\partial t} \cdot S_t \quad (2)$$

Confrontando (1) e (2)

$$\Rightarrow \alpha(t, S_t) = \frac{\partial P(t, S_t)}{\partial S}$$

$$\pi(V_t^q - \alpha(t, S_t) S_t) = \frac{\partial P(t, S_t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P(t, S_t)}{\partial S^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P(t, S_t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P(t, S_t)}{\partial S^2} + \pi P(t, S_t) + \pi S_t \frac{\partial P(t, S_t)}{\partial S} = 0$$

$\Rightarrow$ eq. diff. deterministica

poiché S_t è una v.e. con densità stocasticamente continua T e q funzione continua su $(0, +\infty)$

$$\text{allora } q(S_t) = 0 \Rightarrow q(s) = 0 \quad \forall s \in (0, +\infty)$$

Viceversa (ii) $\Rightarrow$ (i)

Dalla formula di Itô abbiamo da (1) e poiché P è soluzione delle eds

$$\Rightarrow dV_t^q = \underbrace{(\pi V_t^q - \pi S_t \frac{\partial P}{\partial S})}_{\alpha_t} dt + \underbrace{\frac{\partial P}{\partial S}}_{\alpha_t} dS_t = \alpha_t dS_t + \pi \underbrace{(V_t^q - \alpha_t S_t)}_{P_t B_t} dt = \alpha_t dS_t + \pi P_t dB_t$$

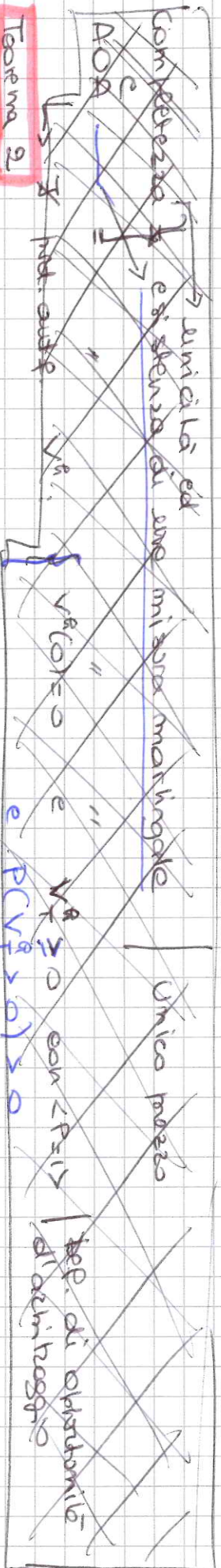
$$\pi B_t dt = dB_t$$

* $q(S_t) \mathbb{1}_{(S_t \in (a, b))} = 0$
 $\Rightarrow \mathbb{E}[q(S_t) \mathbb{1}_{(S_t \in (a, b))}] = 0$
 $\int_a^b q(x) f_{S_t}(x) dx = 0 \quad \forall a < b$
 $\Rightarrow q(x) = 0$

Prezzo d'arbitraggio = valore di una strategia replicante autofinanziante

Def. Mercato completo se per ogni derivato esiste una strategia autofinanziante che lo replica.

La definizione è ben posta se tutte le strategie replicanti hanno lo stesso valore (più dell'assenza di arbitraggio) di prezzo d'arbitraggio



Teorema 2

Il mercato di B & S è completo e libero da arbitraggi, nel senso che ogni derivato europeo di payoff $F(S_T)$ ammette un'unica strategia autofinanziante che lo replica,

$$\exists! \alpha_t = (\alpha_t, \beta_t) \quad \alpha_t = \frac{\partial F}{\partial S}(t, S_t) \quad \beta_t = e^{-rt} (F(t, S_t) - S_t \frac{\partial F}{\partial S}(t, S_t))$$

ove F è l'unica soluzione del pib di Cauchy

$$(P_b) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} + rS \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} - rF = 0 & (t, S) \in [0, T) \times (0, +\infty) \\ F(T, S_T) = F(S_T) \end{cases}$$

Inoltre $V_t^R = F(t, S_t)$ è il valore del portafoglio replicante e coincide con

il valore del derivato al tempo t .

EDP di Black & Scholes

Nota come EDP di (valutazione)

Sotto ipotesi ipotesi su $F(x)$ si dimostra che la soluzione analitica è data da:

$$f(t, x) = e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} F(x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}z}) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Verifichiamo che tale f è soluzione della equazione di Black-Scholes (Valutazione neutrale al rischio):

$$f(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q [F(S_T) | S_t = x]$$

ove Q è l'unica misura mg (o neutrale al rischio) sotto rispetto a Q :

$$S_t = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t^Q} \quad 1 \leq t \leq T \quad Q\text{-moto browniano}$$

[Q è l'unica misura equivalente a P tale che $W_t^Q = W_t^P + \frac{r-\mu}{\sigma}t$ è un moto browniano]

$$\mathbb{E}^Q [F(S_T) | S_t = x] = \mathbb{E}^Q [F(S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q)}) | S_t = x]$$

$$= \mathbb{E}^Q [F(x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q)})] = \mathbb{E}^Q [F(x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}N})] \quad \text{ove } N \sim N(0, 1)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} F(x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}z}) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

REMARK

Osserviamo che se costruiamo un portafoglio in una posizione lunga in α_t azioni e corte nel derivato, autofinanziante e che sia ^{privato} privo di rischio

$$V(t, S_t) = \alpha_t S_t - f(t, S_t) \text{ allora } f(t, x) \text{ risolve l'Eq. di valutazione di B&S.}$$

Imponi,

imponendo che sia autofinanziante: $dV(t, S_t) = \alpha_t \cdot dS_t - df(t, S_t)$ e applicando l'Itô a $f(t, S_t)$

$$dV(t, S_t) = \alpha_t \cdot dS_t - \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, S_t) \cdot \sigma^2 S_t^2 \right\} dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, S_t) \cdot dS_t$$

Affinché sia privo di rischio: $\alpha_t = \frac{\partial f}{\partial x}(t, S_t)$

inoltre in assenza di arbitraggio: $dV(t, S_t) = r V(t, S_t) dt$
dove avere rendimento pari ad r

$$\Rightarrow - \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, S_t) \sigma^2 S_t^2 \right\} dt = r \underbrace{\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(t, S_t) \cdot S_t - f(t, S_t) \right\}}_{V(t, S_t)} dt$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t) + r S_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, S_t) - r f(t, S_t) = 0$$

rihaviamo Eq. di var. di B&S

REMARK $\alpha_t = \frac{\partial f}{\partial x}(t, S_t)$ con $f(t, x)$ sol. della EDP di B&S (Strategie A-Replicating)

allora se portafoglio con $\frac{\partial f}{\partial x}(t, S_t)$ azioni e corto sul derivato è privo di rischio

Formulas for a call e ka lost

$$F(S_T) = (S_T - K)^+$$

$$P_0 = e^{-rT} E^Q[(S_T - K)^+] = e^{-rT} E^Q[(S_T - K) \mathbb{1}_{(S_T > K)}] = e^{-rT} [E^Q[S_T \mathbb{1}_{(S_T > K)}] - K Q(S_T > K)]$$

$$Q(S_T > K) = Q\left(S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T} > K\right) = Q\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T > \ln(K/S_0)\right) =$$

$$= Q\left(\sigma W_T > \ln(K/S_0) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T\right) = Q\left(N > \underbrace{\frac{\ln(K/S_0) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}}_{-d_2}\right) = Q\left(N < \underbrace{\frac{\ln(K/S_0) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}}_{d_2}\right) = \Phi(d_2)$$

$$E^Q[S_T \mathbb{1}_{(S_T > K)}] = E^Q\left[S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T} \mathbb{1}_{(S_T > K)}\right] = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T} E^Q\left[e^{\sigma W_T} \mathbb{1}_{(N > -d_2)}\right] =$$

$$\int_{-d_2}^{+\infty} \frac{e^{\sigma\sqrt{T}x}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x^2 - 2\sigma\sqrt{T}x)}{2}} dx = \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \sigma\sqrt{T})^2}{2}} dx = \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 T} Q(Z > -d_2) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 T} Q(N > -d_1)$$

$$d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T} = \frac{\ln(K/S_0) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} =$$

$$d_1 = \frac{\ln(K/S_0) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$\Rightarrow d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$C_0 = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2)$$

$$Z \sim N(\sigma\sqrt{T}, 1)$$

$$Z = \sigma\sqrt{T} + N$$

$$= e^{\frac{1}{2}\sigma^2 T} Q(N > -d_1)$$

$$= e^{\frac{1}{2}\sigma^2 T} Q(N < d_1)$$

$$P_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^Q[(K - S_T)_+] = e^{-rT} K \underbrace{\mathbb{E}^Q[\mathbb{1}_{(S_T < K)}]}_{\Phi(-d_2)} - e^{-rT} \underbrace{\mathbb{E}^Q[S_T \mathbb{1}_{(S_T < K)}]}_{e^{rT} S_0 \Phi(-d_1)}$$

$$P_0 = K e^{-rT} \Phi(-d_2) - S_0 \Phi(-d_1)$$

oppure si ricava con la relazione di put-call:

$$P_0 + S_0 = C_0 + K e^{-rT}$$

$$P(t, x) + x = C(t, x) + K e^{-r(T-t)}$$

Analogamente si ricava il prezzo dello call dal put e di una put

$$C(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[(S_T - K)_+ | S_t = x] = x \Phi(d_1(t, x)) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2(t, x))$$

$$P(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[(K - S_T)_+ | S_t = x] = K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2(t, x)) - x \Phi(-d_1(t, x))$$

$$\text{ovvero } d_1(t, x) = \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \quad \text{e } d_2(t, x) = d_1(t, x) - \sigma \sqrt{T-t}$$

Approfondimento:

- Nel caso in cui l'azione offre dei dividendi con rendimento costante (composto continuamente a q) ome nel periodo infinitesimo viene pagato un dividendo pari a $q S_t dt$ allora la condizione di arbitraggio diventa:

$$dV_t = \alpha_t (dS_t + q S_t dt) + \beta_t dB_t$$

e di conseguenza l'eq. di valutazione associata si scrive come

$$[q \text{ è detto "dividend yield"}]$$

Senza reddito	
$t=0$	t
S_0	S_t
con "dividend yield" q	
$S_0 e^{qt}$	$S_t e^{qt}$