

• L'integrale di H_t

• la formula di Itô e applicazioni alla dinamica dei prezzi
dell'azione nel modello Black & Scholes

• Integrale di Itô di funzioni deterministiche

Cenni all'integrale di Itô (Pasucci p.134)

IV

- Si può dimostrare che le traiettorie del moto browniano non sono derivabili, quindi non siamo in grado di definire $\int_{a,t} du_t$ traiettorie le traiettorie
- La costruzione dell'integrale di Itô si effettua per processi $\{u_t\}_{t \geq 0}$, $\mathbb{F}_t$ -adattati e t.c. $\mathbb{E}[\int_0^T u_t^2 dt] < \infty$. Questa classe di processi la chiamiamo $\mathbb{H}^2$.

COSTRUZIONE DELL'INTEGRALE DI ITÔ

- Dalprima si definisce $\int_{a,t} du_t$ per processi semplici, ossia della forma

$$u_t = \sum_{k=1}^N c_k \mathbb{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(t)$$

ove le c_k sono v.c. $\mathbb{E}[c_k^2] < \infty \forall k$ con le $\mathbb{F}_{t_{k-1}}$ -misurabili

- Oss: $c_k \mathbb{F}_{t_{k-1}}$ -misurabili $\Leftrightarrow \{u_t\}$ è $\mathbb{F}_t$ -adattato

$$\{u_t \in \mathcal{H} \mid c_k \in \mathcal{H} \mid \mathbb{F}_{t_{k-1}} \in \mathbb{F}_t \text{ se } t_{k-1} \leq t \leq t_k\}$$

$$\mathbb{E}[\int_0^T u_t^2 dt] = \sum_{k=1}^N \mathbb{E}[\int_{(t_{k-1}, t_k]} c_k^2 dt] = \sum_{k=1}^N \mathbb{E}[c_k^2] \mathbb{P}(t_k - t_{k-1})$$

$\wedge \infty$

$$\text{se } \mathbb{E}[c_k^2] < \infty$$

Def. Se $u_t \in \mathbb{H}^2$ ed è un processo semplice allora si definisce

$$\int_0^t u_t dW_t := \sum_{k=1}^N c_k (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})$$

$$\text{Def. } \int_0^t u_t dW_t = \sum_{k=1}^N c_k \mathbb{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(t) dW_t$$

In particolare

$$\int_0^t dW_t = W_t - W_0 = W_t$$

$$\int_0^t a dW_t = a W_t \quad a \in \mathbb{R}$$

Teorema (Itô) (da integrare di W_t)

(1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_0^t (a W_t + b V_t) dW_t = a \int_0^t W_t dW_t + b \int_0^t V_t dW_t$$

proprietà di linearità

(2) addizionalità rispetto all'estremo di integrazione

$$\int_0^t W_t dW_t = \int_0^c W_t dW_t + \int_c^t W_t dW_t \quad s < c < t$$

(3)

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t W_t dW_t \mid \mathcal{F}_s \right] = 0$$

(4)

$$X_t := \int_0^t W_t dW_t \text{ è una martingala t.c.}$$

$$X_t^2 - \int_0^t W_t^2 dt = m_0$$

$$\text{ossia } \langle X \rangle_t = \int_0^t W_t^2 dt$$

$$\text{ed in particolare } \mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E} \left[\int_0^t W_t^2 dt \right]$$

Dim.

Le ipotesi (1) e (2) seguono immediatamente dalle definizioni.

(3)

Essendo W_t semplice

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t W_t dW_t \mid \mathcal{F}_s \right]$$

$$W_t = \sum_{u=1}^n C_u \mathbb{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(t)$$

se $t \in (s, t]$

$$s < t_{k-1} < t_k < t_N \leq t$$

$$s = t_0 < t_k < t_N = t$$

$$\mathbb{E} \left[\sum_{u=1}^n C_u (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \mid \mathcal{F}_s \right] = \sum_{u=1}^n \mathbb{E} [C_u (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \mid \mathcal{F}_s] =$$

$$\mathbb{E}_s \in \mathcal{F}_{t_{k-1}} \quad \forall k=1, \dots, n$$

$$s = t_0 \quad t = t_N$$

$$t \in (s, t]$$

$$s < t_{k-1} < t_k < t_N \leq t$$

$$s = t_0 < t_k < t_N = t$$

$$\mathbb{E} \left[\sum_{u=1}^n C_u (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \mid \mathcal{F}_s \right] = \sum_{u=1}^n \mathbb{E} [C_u (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \mid \mathcal{F}_s] =$$

$$\mathbb{E}_s \in \mathcal{F}_{t_{k-1}} \quad \forall k=1, \dots, n$$

$$= \sum_{u=1}^n E[E[C_u(W_{t_u} - W_{t_{u-1}}) | \mathcal{F}_{t_{u-1}}] | \mathcal{F}_S] = \sum_{u=1}^n E[C_u E[W_{t_u} - W_{t_{u-1}} | \mathcal{F}_{t_{u-1}}] | \mathcal{F}_S] =$$

essendo $E_{t_{u-1}} \mathcal{F}_S \quad \forall u=1, \dots, n$

$E[W_{t_u} - W_{t_{u-1}}] = 0$
in quanto $W_{t_u} - W_{t_{u-1}} \perp \mathcal{F}_{t_{u-1}}$

Osserviamo che $X_t \in \mathcal{F}_t$ $\mathcal{F}_t$ -misurabile e poi

$$(A) \quad E[X_t | \mathcal{F}_S] = E\left[\int_0^t z_r dW_r \mid \mathcal{F}_S\right] = E\left[\int_0^S z_r dW_r + \int_S^t z_r dW_r \mid \mathcal{F}_S\right] =$$

$$= \underbrace{\int_0^S z_r dW_r}_{\mathcal{F}_S\text{-misurabile}} + E\left[\int_S^t z_r dW_r \mid \mathcal{F}_S\right] = X_S$$

" 0 per 3)

Rimane da mostrare che

$$E[X_t^2 - \int_0^t z_r^2 dr \mid \mathcal{F}_S] = X_S^2 - \int_0^S z_r^2 dr$$

ossia che $E[X_t^2 - X_S^2 \mid \mathcal{F}_S] = E\left[\int_S^t z_r^2 dr \mid \mathcal{F}_S\right]$

limitando a dimostrare che $E[X_t^2] = E\left[\int_0^t z_r^2 dr\right]$

APPROFONDIMENTO

$$E\left[\left(\sum_{u=1}^n C_u (W_{t_u} - W_{t_{u-1}})\right)^2\right] = E\left[\sum_{u=1}^n C_u^2 (W_{t_u} - W_{t_{u-1}})^2 + 2 \sum_{a \neq u} C_u C_a (W_{t_u} - W_{t_{u-1}})(W_{t_a} - W_{t_{a-1}})\right]$$

$$= \sum_{u=1}^n E[C_u^2 (W_{t_u} - W_{t_{u-1}})^2] + 2 \sum_{a \neq u} E\left[C_u C_a (W_{t_u} - W_{t_{u-1}})(W_{t_a} - W_{t_{a-1}})\right]$$

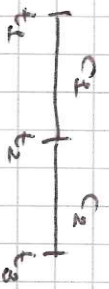
$$= \sum_{u=1}^n E\left[C_u^2 E[(W_{t_u} - W_{t_{u-1}})^2 \mid \mathcal{F}_{t_{u-1}}]\right] = \sum_{u=1}^n E[C_u^2] (t_u - t_{u-1})$$

" 0 che mostriamo nella lezione seguente

$$E[(W_{t_u} - W_{t_{u-1}})^2] = (t_u - t_{u-1})$$

$$= \int_0^t E[z_r^2] dr$$

mostriamo il caso
di 2 addendi



$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}[c_1(W_{t_2} - W_{t_1}) \cdot c_2(W_{t_3} - W_{t_2})] = \\
 &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[c_1(W_{t_2} - W_{t_1}) \cdot c_2(W_{t_3} - W_{t_2}) | \mathcal{F}_{t_2}]] = \\
 &= \mathbb{E}[c_1(W_{t_2} - W_{t_1}) c_2 \underbrace{\mathbb{E}[W_{t_3} - W_{t_2} | \mathcal{F}_{t_2}]}_{=0}] = 0 \\
 & \mathbb{E}[W_{t_3} - W_{t_2}] = 0
 \end{aligned}$$

In generale $\mathbb{E} \left[\int_a^b u_t dW_t \int_b^c u_t dW_t \right] = 0 \quad a < c < b \quad \square$

La definizione si estende ad ogni processo $u \in \mathbb{L}^2$ mantenendo le stesse proprietà, utilizzando la seguente proprietà

Proprietà

$\forall u \in \mathbb{L}^2 \quad \exists$ dupl. di processi semplici in $\mathbb{L}^2$! $\lim_{n \rightarrow \infty} u_t^n = u_t$

nel senso che $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^t (u_t^n - u_t)^2 dt = 0$. (Convergenza in media quadratica)

Def $\forall u \in \mathbb{L}^2$

$$\int u_t dW_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_t^n dW_t$$

ove l'un'è la successione di processi semplici che converge ad u

Processi di Itô p. 216 Pascaucci

Def.

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

$$\begin{aligned} \sigma_s &\in \mathbb{L}^2 & \mathbb{E} \left[\int_0^T \sigma_s^2 ds \right] < \infty \\ \mu_s &\in \mathbb{L}^1 & \mathbb{E} \left[\int_0^T |\mu_s| ds \right] < \infty \end{aligned}$$

Si scrive anche nella forma:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

↓
coeff. di drift → coeff. di diffusione

Processo variazione quadratica

$$\langle X \rangle_t := \langle \sum_0^t \sigma_r dW_r \rangle = \sum_0^t \sigma_r^2 dr$$

Formula di Itô p. 218

- $f \in C^2(\mathbb{R})$ it processo $f(W_t)$ ha differenziale stocastico dato da:

$$(1) df(W_t) = f'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t) dt$$

termine correttivo rispetto al calcolo differenziale ordinario

- Se X_t è un processo di Itô e $Y_t = f(t, X_t)$ allora Y_t ha differenziale stocastico dato da:

$$dY_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) \sigma_t dW_t \quad (2)$$

operare

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) d\langle X \rangle_t$$

$$\langle W \rangle_t = t$$

Applicazioni della formula di Ito

1) Calcoliamo le differenze stocastiche del movimento browniano geometrico:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $W_t \in \mathbb{R}$ moto browniano

$$S_t = f(t, W_t) \quad \text{ove } f(t, x) = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) f$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sigma f$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial f}{\partial x} = \sigma^2 f$$

$$df(t, W_t) = \left((\mu - \frac{\sigma^2}{2}) f(t, W_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 f(t, W_t) \right) dt + \sigma f(t, W_t) dW_t$$

$$\Rightarrow dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t)$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

il rendimento dell'azione in un intervallo infinitesimo $[t, t+dt]$ è dato dal rendimento atteso μ più un termine aleatorio σdW_t che è tanto maggiore quanto σ è $\sigma \cdot (\text{volatilità dell'azione})$

2) Differenziale della martingala esponenziale

$$Z_t = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t}$$

$$c \in \mathbb{R}$$

$$Z_t = f(t, W_t)$$

$$f(t, x) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma x}$$

$$dZ_t = \left\{ -\frac{1}{2}\sigma^2 Z_t + \frac{1}{2}\sigma^2 Z_t + c Z_t dW_t \right\} = c Z_t dW_t$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 f \\ \frac{\partial f}{\partial x} = \sigma f \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c \frac{\partial f}{\partial x} = c^2 f \end{cases}$$

Analogamente a prima troviamo che:

$$dZ_t = Z_t c dt + \omega_t$$

ossia $Z_t = 1 + \int_0^t c Z_s ds$

inoltre sappiamo che se $Z \in \mathbb{L}^2$ allora $\int_0^t Z_s dW_s$ è una mg $\Rightarrow \{Z_t\}_{t \geq 0}$ è una martingale

Definiamo che $Z \in \mathbb{L}^2$, ossia che $\mathbb{E}[\int_0^T Z_s^2 ds] < \infty$

~~$$\mathbb{E}[\int_0^T Z_s^2 ds] = \mathbb{E}[\int_0^T \mathbb{E}[Z_s^2 | \mathcal{F}_s] ds] = \mathbb{E}[\int_0^T e^{2cs} ds] = \frac{1}{2c} (e^{2cT} - 1) < \infty$$~~

$$Z_t^2 = (e^{-\frac{1}{2}ct} + cW_t)^2 = e^{-ct} + 2cW_t$$

$$\mathbb{E}[e^{cW_t}] = \mathbb{E}[e^{c\sqrt{t}N}] = e^{\frac{c^2 t}{2}}$$

$$W_t \sim \sqrt{t}N$$

$$\mathbb{E}[\int_0^T Z_t^2 dt] = \int_0^T \mathbb{E}[Z_t^2] dt = \int_0^T e^{-ct} \mathbb{E}[e^{2cW_t}] dt =$$

$$= \int_0^T e^{-ct} \cdot e^{\frac{4c^2 t}{2}} dt = \int_0^T e^{c^2 t} dt = \frac{1}{c^2} e^{c^2 t} \Big|_0^T = \frac{1}{c^2} (e^{c^2 T} - 1) < \infty$$

3) Scambiando c con -c si ottiene anche che

$$\tilde{Z}_t = e^{-\frac{1}{2}c^2 t - cW_t}$$

è una mg

soluzione della

$$d\tilde{Z}_t = -c\tilde{Z}_t dW_t$$

Oss: Le proprietà di martingale per Z_t e $\tilde{Z}_t$ le avevamo già provate con un calcolo diretto

Integrale di Itô di processi stocastici, o sia funzioni deterministiche del tempo

Risultato noto:

$X_1, \dots, X_n$ v.a. indipendenti con $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$

$$\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^n c_i X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n c_i \mu_i, \sum_{i=1}^n c_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Oss:

La media e la varianza di Y seguono dalle proprietà di media e varianza

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^n c_i \mu_i$$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n c_i X_i}_{\text{v.a. indipendenti}}\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(c_i X_i) = \sum_{i=1}^n c_i^2 \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^n c_i^2 \sigma_i^2$$

PROP. Sia $u(t)$ una funzione deterministica del tempo t.c. $\int_0^T u(t)^2 dt < +\infty$

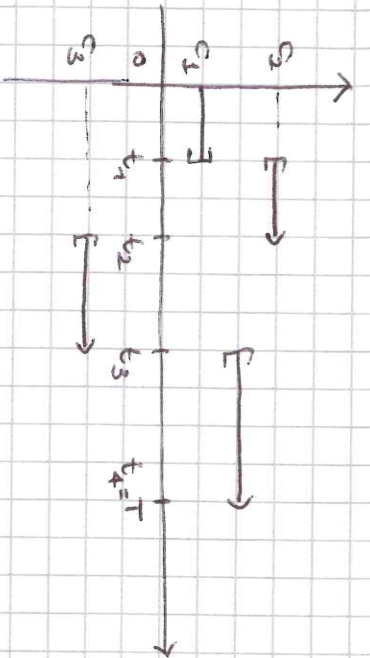
$$\text{allora } X_t := \int_0^t u(s) ds \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^t u(s)^2 ds\right) \quad \forall t \in [0, T]$$

Dim.

ci limitiamo a dimostrare il risultato per funzioni semplici del tempo, ne

$$u(s) = \sum_{k=1}^n c_k \mathbb{1}_{(t_{k-1}, t_k]} \quad \text{con } 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T \quad \text{e } c_k \text{ costanti}$$

sono funzioni costanti a tratti



Per definizione $X_t = \int_0^t 2c(s) dW_s = \sum_{k=1}^n c_k (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) = \sum_{k=1}^n c_k X_k$

$$X_k := W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \quad k=1, \dots, n \text{ sono v.a. indipendenti} \quad X_k \sim \mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1})$$

$$\Rightarrow X_t \sim \mathcal{N}\left(0, \underbrace{\sum_{k=1}^n c_k^2 (t_k - t_{k-1})}_{\int_0^t u^2(s) ds}\right)$$

Oss: Dalla teoria generale già sappiamo che $\{X_t\}$ è una martingala $X_0=0$ e che $X_t^2 - \int_0^t u^2(s) ds = mg$ nulla in zero

$\Rightarrow \mathbb{E}(X_t^2) = \mathbb{E}\left(\int_0^t u^2(s) ds\right)$ se $u(s)$ è una funzione deterministica
ricaviamo che $\mathbb{E}(X_t^2) = \int_0^t u^2(s) ds$, risultato che abbiamo ottenuto
in questo caso partendo grazie alle proprietà della gaussiana.