

3

- Processi stocastici a tempo continuo
 - il moto browniano
 - il moto browniano geometrico (modello Black & Scholes)
 - la passeggiata di Markov
 - le martingale

~~le passeggiate di Markov di Markov~~

3

Processi stocastici a tempo continuo

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$I = [0, T]$ o $[0, +\infty)$

tempo

Def.

$(X_t)_{t \in I}$ è una famiglia di v.a. a valori in $\mathbb{R}$ t.c.

$X: (t, \omega) \in I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

è misurante, ossia $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall (t, \omega): X_t(\omega) \in B \in \mathcal{B}(I) \times \mathcal{F}$

Osserv. $\forall t$ fissato quindi X_t è una v.o. $\Rightarrow \forall \omega: X_t(\omega) \in B \in \mathcal{F}$

$\forall \omega$ fissato $X_t(\omega)$ è una funzione deterministica del tempo
dalla traiettoria del processo $t \rightarrow X_t(\omega)$

Def. - Un processo è dice continuo se lo sono le sue traiettorie ω fissato

Def. una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ in $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ è una famiglia crescente

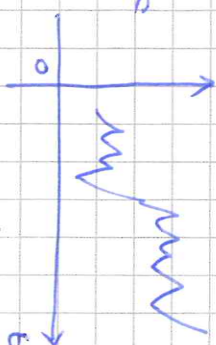
di σ -algebra di $\mathcal{F}$, con $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \quad \forall s \leq t$

Def. Filtrazione naturale generata da un processo adattato $(X_t)_{t \in I}$

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s; s \leq t\} = \sigma\{X_s \in B\}; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), s \leq t$$

Oss. - È la più piccola filtrazione rispetto alla quale il processo è adattato.

- Eventi della forma $\{X_{t_1} \in I_1, \dots, X_{t_n} \in I_n\}$ con $t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t$ $I_1, \dots, I_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
di solo contenuti in $\mathcal{F}_t^X$



~~Verifica consegnare
dalla 1a di esercizi~~

PASCUA Calo.4

III

Def. Un processo $(X_t)_{t \in T}$ si dice adattato ad una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ se $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$ o equivalentemente se $\forall t \quad X_t$ è una v.a. $\mathcal{F}_t$ -misurabile.

Def.

Moto Browniano o Processo di Wiener

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F}_t)$ $W = (W_t)_{t \in [0, \infty)}$

(i) $W_0 = 0$ q.c.

(ii) W è continuo e ha traiettorie continue

(iii) $W_t - W_s \perp \mathcal{F}_s \quad \forall t \geq s$ e $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$

Teorema esiste un unico processo che verifica (i), (ii) e (iii)

(varianza)

Conseguenze: (iii) con $s=0 \quad W_t - W_0 = W_t \sim N(0, t)$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[W_t] = 0$$

$$\mathbb{E}[W_t^2] = t$$

Traduzione intuitiva del teorema Brown per descrivere il moto di una particella soggetta agli urti molecolari.

Modello Black & Scholes

Moto Browniano geometrico:

dinamico di un titolo istochastico

$$S_0 > 0$$

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

$$\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{\mu t}$$

e σ volatilità del titolo

REMARK

Vedremo in seguito che nel modello B&S

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu \Delta t + \sigma \Delta W_t + o(\Delta t)$$

$$\Delta S_t = S_{t+\Delta t} - S_t$$

$$\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t$$

$$\text{e } \Delta W_t \sim N(0, \Delta t)$$

μ tasso di rendimento atteso dell'azione (nel regime esponenziale)

• Mostriamo che $E[S_t] = S_0 e^{\mu t}$

$$E[S_t] = E\left[S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}\right] = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$$

$$E[e^{\sigma W_t}] = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t} E[e^{\sigma W_t}]$$

poiché $W_t \sim N(0, t) \Rightarrow W_t \sim \sqrt{t} N$

$$\text{Calcoliamo } E[e^{a N}] = e^{\frac{a^2}{2}} \quad N \sim N(0, 1)$$

$$E[e^{a N}] = \int_{\mathbb{R}} e^{ax} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2 - 2ax}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2 - 2ax + a^2}{2} + \frac{a^2}{2}} dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} e^{\frac{a^2}{2}} dx = e^{\frac{a^2}{2}}$$

$$\Rightarrow E[S_t] = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t} \cdot e^{\frac{\sigma^2}{2}t} = S_0 e^{\mu t}$$

μ è il rendimento atteso dell'azione

• OSS: $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$

l'azione non è più rischiosa ma ha un andamento deterministico, μ è il tasso (istantaneo) di rendimento dell'azione

• Nel modello di B&S $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$, σ è la volatilità del titolo

Il rendimento esogeno $X_t = \log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$

σ^2 è la varianza di X_t nell'unità di tempo

Def.

Diremo che un processo stocastico $(X_t)_{t \geq 0}$ gode delle proprietà di Markov rispetto alle filtrazioni $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ se il processo è adattato ad esso

$$\forall I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad P(X_t \in I \mid \mathcal{F}_s) = P(X_t \in I \mid X_s) \quad \forall t \geq s \quad \forall I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Ossia se le future condizioni sono al presente e indipendenti dal passato.

Se $(X_t)_{t \geq 0}$ rappresenta il prezzo di un titolo il cui rischio ^{stesso} questa proprietà è coerente con la "forma debole delle efficienze dei mercati" secondo cui le prezzi ^{stesso} la cui informazione presente nella serie storica dei prezzi.

Oss: La proprietà di Markov è equivalente a dire che $\forall f(x)$

$$E[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = E[f(X_t) \mid X_s] \quad \forall t \geq s$$

Lemna $X \in \mathcal{Y}$ u.a. X è $\mathcal{G}$ -misurabile e $\mathcal{Y} \perp \mathcal{G}$ ($\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ -algebra)

$$\Rightarrow E[g(\mathcal{Y}) h(X) \mid \mathcal{G}] = h(X) E[g(\mathcal{Y})]$$

Dim.

$$\forall B \in \mathcal{G} \quad E[1_B E[g(\mathcal{Y}) h(X) \mid \mathcal{G}]] = E[1_B g(\mathcal{Y}) h(X)] =$$

$$1_B h(X) \text{ è } \mathcal{G}\text{-mis. e } \mathcal{Y} \perp \mathcal{G} \Rightarrow 1_B h(X) \perp \mathcal{Y}$$

$$= E[1_B h(X)] E[g(\mathcal{Y})] = E[1_B h(X) \underbrace{E[g(\mathcal{Y})]}_{\mathcal{G}\text{-mis.}}] \text{ per l'es. del teo Fubini}$$

$$\Rightarrow E[g(\mathcal{Y}) h(X) \mid \mathcal{G}] = h(X) E[g(\mathcal{Y})]$$

□

Il Lemma si estende anche a funzioni $R(x, y)$ della coppia:

$$\mathbb{E}[R(X, Y) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[R(x, Y)] \Big|_{x=X} = g(X)$$

ove $g(x) = \mathbb{E}[R(x, Y)]$

PROP.

Il moto browniano è un processo di Markov: $\mathbb{E}[f(W_t) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(W_t) | W_s]$ $\forall t \geq s$
Dim.

$$\forall f(x)$$

Se dimostriamo che $\mathbb{E}[f(W_t) | \mathcal{F}_s]$ è una funzione solo di W_s abbiamo fatto, in fatti se $\mathbb{E}[f(W_t) | \mathcal{F}_s] = g(W_s)$ allora per la proprietà della torre $\sigma(W_s) \subseteq \mathcal{F}_s$

$$\mathbb{E}[f(W_t) | W_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(W_t) | \mathcal{F}_s] | W_s] = \mathbb{E}[g(W_s) | W_s] = g(W_s) = \mathbb{E}[f(W_t) | \mathcal{F}_s]$$

Rimane da mostrare che $\mathbb{E}[f(W_t) | \mathcal{F}_s] = g(W_s)$. $\forall t \geq s$

Questo segue dal Lemma, in quanto

$$\mathbb{E}[f(W_t) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(\underbrace{W_t - W_s}_{\text{v.a. } \perp \mathcal{F}_s} + \underbrace{W_s}_{\text{v.a. } \mathcal{F}_s\text{-mis.}}) | \mathcal{F}_s] = g(W_s)$$

$$\text{ove } g(x) := \mathbb{E}[f(W_t - W_s + x)]$$

□

OSS: Siamo in grado di calcolare questa funzione $g(x)$. $W_t - W_s \sim W(0, t-s)$

$$W_t - W_s \sim \sqrt{t-s} N \quad N \sim W(0, 1)$$

$$g(x) = \mathbb{E}[f(W_t - W_s + x)] = \mathbb{E}[f(\sqrt{t-s} N + x)] = \int_{\mathbb{R}} f(\sqrt{t-s} y + x) f_N(y) dy$$

$$\mathbb{E}[f(W_t - 2W_s + x)] = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Oppure

$$W_t - 2W_s + x \sim \mathcal{N}(x, t-s)$$

ossia la densità di una gaussiana di media x e varianza $t-s$

$$|f(x)| = \mathbb{E}[f(W_t - 2W_s + x)] = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}} dy$$

Più in generale si mostra che ogni processo ad incrementi indipendenti $(X_t)_{t \geq 0}$ è un processo di Markov, in quanto si utilizza il fatto che $X_t - X_s \perp \mathcal{F}_s \quad \forall t \geq s$

Osserviamo che data l'indipendenza di $W_t - 2W_s \perp \mathcal{F}_s$ segue che i rendimenti relativi $\frac{S_t - S_s}{S_s}$ su intervalli disgiunti sono i.a. indipendenti:

$$\frac{S_t - S_s}{S_s} = \frac{S_t}{S_s} - 1 = \frac{S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}}{S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})s + \sigma W_s}} - 1 = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-s) + \sigma(W_t - W_s)} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{S_t - S_s}{S_s} \perp \mathcal{F}_s$$



$[r, s]$ e $[s, t]$
intervalli disgiunti

in particolare prendo $r < s$ e considero il rendimento relativo all'intervallo $[r, s]$ ottenuto da $\frac{S_t - S_s}{S_s} \perp \mathcal{F}_s$ in quanto quest'ultima v.o. è $\mathcal{F}_s$ -misurante

PROP.

Il processo dei prezzi $(S_t)_{t \geq 0}$ nel modello Black & Scholes verifica la proprietà di Markov

Dim.

osserviamo che $S_t = R(t, U_t)$ con $R(t, x) = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x}$
 $\forall P(x), \forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(S_t) | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\left[\underbrace{f(R(t, U_t))}_{F(t, U_t)} | \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}[F(t, U_t) | \mathcal{F}_s] = \\ &= \mathbb{E}[f(S_t) | \mathcal{U}_s] = \mathbb{E}[f(S_t) | S_s] \end{aligned}$$

↓
poiché $(U_t)_{t \geq 0}$ gode della proprietà di Markov

Nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato che $\sigma(U_s) = \sigma(S_s)$ perché S_s si scrive come funzione di U_s e viceversa $S_s = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})s + \sigma U_s} = R(s, U_s)$

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_s}{S_t}\right) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})s + \sigma U_s \Rightarrow U_s = \frac{1}{\sigma} \left\{ \mathbb{E}\left(\frac{S_s}{S_t}\right) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})s \right\} = R^{-1}(s, \frac{S_s}{S_t})$$

In tutti e due i casi $(U_s \in I) = (R^{-1}(s, S_s) \in I) = (S_s \in \tilde{I}) \Rightarrow \sigma(U_s) \subseteq \sigma(S_s)$
e viceversa $(S_s \in I) = (R(s, U_s) \in I) = (U_s \in J) \Rightarrow \sigma(S_s) \subseteq \sigma(U_s)$

□

Le Martingale

Def. - $\{M_t\}_{t \geq 0}$ processo $\mathcal{F}_t$ -adattato è una martingale se $\forall t \geq 0$ con $\mathbb{E}[M_t] < \infty$ $\forall t$

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$$

- è una submg se $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \geq M_s \quad \forall t \geq s$
- è una supermg se $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \leq M_s \quad \forall t \geq s$

ESEMPIO

1) X v.o. $M_t := \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_t]$

allora M_t è una mg, infatti $\forall t \geq s$

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_s] = M_s$$

$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ e applichiamo la proprietà della torre

2) $(W_t)_{t \geq 0}$ moto browniano è una mg

$$\mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s + W_s | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] + W_s = \mathbb{E}[W_t - W_s] + W_s = W_s$$

3) Ogni processo ad incrementi indipendenti e media costante $\bar{m}$ è una mg

$$X_t - X_s \perp \mathcal{F}_s \quad \text{e} \quad \mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_s] \quad \forall s, t$$

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t - X_s + X_s | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t - X_s | \mathcal{F}_s] + X_s = \mathbb{E}[X_t - X_s] + X_s = X_s$$

PROP.

$$\text{Se } (H_t)_{t \geq 0} \text{ \u00e9 uma mg} \Rightarrow \mathbb{E}(H_t) = \mathbb{E}(H_s) = \mathbb{E}(H_0)$$

$$\forall t \geq s$$

o processo \u00e9
m\u00e9dia constante

$$\text{Se } (H_t)_{t \geq 0} \text{ \u00e9 uma submg} \Rightarrow \mathbb{E}(H_t) \geq \mathbb{E}(H_s) \geq \mathbb{E}(H_0)$$

$$\forall t \geq s$$

o processo \u00e9
m\u00e9dia crescente
no tempo

$$\text{Se } (H_t)_{t \geq 0} \text{ \u00e9 uma supermg} \Rightarrow \mathbb{E}(H_t) \leq \mathbb{E}(H_s) \leq \mathbb{E}(H_0)$$

$$\forall t \geq s$$

o processo \u00e9
m\u00e9dia decrescente
no tempo

Dim.

$$(H_t)_{t \geq 0} \text{ mg}$$

$$\mathbb{E}(H_t | \mathcal{F}_s) = H_s$$

$$\forall t \geq s$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(H_t | \mathcal{F}_s)) = \mathbb{E}(H_s)$$

$$\forall t \geq s$$

$$\mathbb{E}(H_t)$$

$$(H_t)_{t \geq 0} \text{ submg}$$

$$\mathbb{E}(H_t | \mathcal{F}_s) \geq H_s$$

$$\forall t \geq s$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(H_t | \mathcal{F}_s)) \geq \mathbb{E}(H_s)$$

$$\forall t \geq s$$

$$\mathbb{E}(H_t)$$

$$(H_t)_{t \geq 0} \text{ supermg}$$

$$\mathbb{E}(H_t | \mathcal{F}_s) \leq H_s$$

$$\forall t \geq s$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(H_t | \mathcal{F}_s)) \leq \mathbb{E}(H_s)$$

$$\forall t \geq s$$

$$\mathbb{E}(H_t)$$

PROPOSIZIONE

$(W_t)_{t \geq 0}$ moto browniano

$$\textcircled{1} \quad W_t^2 - t = mg$$

$$\textcircled{2} \quad e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t} = mg$$

$\sigma \in \mathbb{R}$

OSS: Prendendo $c = -\sigma \rightarrow e^{-\frac{\sigma^2}{2}t - c W_t}$ è una martingale

Dim. $\textcircled{1} \quad \forall t \geq s$

$$\mathbb{E}[W_t^2 - t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t^2 - W_s^2 + t W_s^2 - t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t^2 - W_s^2 | \mathcal{F}_s] + W_s^2 - t$$

Dobbiamo mostrare che

$$\mathbb{E}[W_t^2 - W_s^2 | \mathcal{F}_s] = t - s$$

osserviamo che

$$W_t^2 - W_s^2 = (W_t - W_s)^2 - 2W_s^2 + 2W_s(W_t - W_s)$$

$$= (W_t - W_s)^2 + 2W_s(W_t - W_s)$$

$$\mathbb{E}[W_t^2 - W_s^2 | \mathcal{F}_s] = \underbrace{\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2 | \mathcal{F}_s]}_{t-s} + 2 \underbrace{\mathbb{E}[W_s(W_t - W_s) | \mathcal{F}_s]}_{W_s \mathbb{E}[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] = 0}$$

$$= (t-s) + 2W_s \mathbb{E}[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] = t-s$$

$\textcircled{2}$

Dobbiamo mostrare che $\mathbb{E}[e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t} | \mathcal{F}_s] = e^{-\frac{\sigma^2}{2}s + \sigma W_s}$

$\forall t \geq s$

essa da $\mathbb{E}[e^{-\frac{\sigma^2}{2}(t-s) + \sigma(W_t - W_s)} | \mathcal{F}_s] = 1$

$$\mathbb{E}[e^{-\frac{\sigma^2}{2}(t-s) + \sigma(W_t - W_s)} | \mathcal{F}_s] = e^{-\frac{\sigma^2}{2}(t-s)} \mathbb{E}[e^{\sigma(W_t - W_s)} | \mathcal{F}_s] =$$

poiché $W_t - W_s \perp \mathcal{F}_s$

$$= e^{-\frac{\sigma^2}{2}(t-s)} \mathbb{E}[e^{\sigma(W_t - W_s)}] = e^{-\frac{\sigma^2}{2}(t-s)} \mathbb{E}[e^{\sigma \sqrt{t-s} N}] = e^{-\frac{\sigma^2}{2}(t-s)} e^{\frac{\sigma^2}{2}(t-s)} = 1$$

□

Nel modello Black & Scholes

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} = S_0 e^{\mu t} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t}$$

$$S_t = S_0 e^{\mu t} \cdot Z_t \quad \text{con } (Z_t)_{t \geq 0} \text{ mg}$$

di media 1

In quanto $Z_0 = e^0 = 1$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(S_t) = \mathbb{E}(S_0 e^{\mu t} Z_t) = S_0 e^{\mu t} \mathbb{E}(Z_t) = S_0 e^{\mu t} \quad \text{che avevamo già dimostrato}$$

Inoltre $S_t e^{-\mu t} = S_0 Z_t$ è una mg di media S_0

• Le martingale: $\left(e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + c W_t} \right)_{t \geq 0}$ e $\left(e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t - c W_t} \right)_{t \geq 0}$ sono chiamate

le martingale esponenziali $c \in \mathbb{R}$