2) Probabilità e medie condizionata ad una σ-algebra

PROBABILITÀ CONDIZIONATA AD UNA σ-ALGEBRA

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\qquad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ $\qquad \mathcal{B}$ σ-algebra

Def. $P(A|\mathcal{B})$ è quella v.a. $\mathcal{B}$-misurabile a valori in $[0,1]$ t.c. $\forall B \in \mathcal{B}$

$$P(A \cap B) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A \cap B}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B \, P(A|\mathcal{B})]$$

APPROFONDIMENTO *

È ben definita grazie al teorema di Radon-Nikodym

- Due misure P e Q su $(\Omega, \mathcal{F})$ si dicono che Q è assol. continua rispetto a P $Q \ll P$ se $\forall A \in \mathcal{F}$: $P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0$

- P e Q si dicono equivalenti se $Q \ll P$ e $P \ll Q$

Approfondimento

Teorema di Radon-Nikodym

Se $Q \ll P$ allora $\exists$ una v.a. L $\qquad L = \left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathcal{F}}$

t.c. $\quad Q(B) = \mathbb{E}^P[\mathbb{1}_B L]$ (media rispetto alla misura P)

Fissato $A \in \mathcal{F}$ definiamo Q su $\mathcal{B}$: $Q(B) = P(A \cap B)$

allora $Q \ll P$ su $\mathcal{B}$, perché se $P(B) = 0 \Rightarrow Q(B) = 0$

$\Rightarrow$ per il teorema di R-N $\exists$ L v.a. $\mathcal{B}$-misurabile :

$$Q(B) = P(A \cap B) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B L]$$
$$L = P(A|\mathcal{B})$$

- Sia $\mathcal{B} = \sigma(B) = \{B, B^c, \emptyset, \Omega\}$

$P(A \mid \mathcal{B})$ è costante su B e su B^c perché è $\mathcal{B}$-misurabile

$\forall \omega \in B \qquad \mathbb{E}[\mathbb{1}_B P(A \mid \mathcal{B})] = P(A \mid \mathcal{B})(\omega)\, P(B) = P(A \cap B)$

$\forall \omega \in {}^cB \qquad \mathbb{E}[\mathbb{1}_{B^c} P(A \mid \mathcal{B})] = P(A \mid \mathcal{B})(\omega)\, P(B^c) = P(A \cap {}^cB)$

$$\Rightarrow \quad P(A \mid \mathcal{B})(\omega) = \begin{cases} \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A \mid B) & \omega \in B \\ \dfrac{P(A \cap {}^cB)}{P({}^cB)} = P(A \mid {}^cB) & \omega \in B^c \end{cases}$$

- Sia $\mathcal{B} = \sigma(X)$ scriveremo $P(A \mid \sigma(X)) = P(A \mid X)$

inoltre $\exists$ una funzione $g(x)$: $\qquad g(X) = P(A \mid X)$

queste funzione la indichiamo con la notazione: $g(x) = P(A \mid X = x)$

- Sia $\mathcal{B} = \sigma(X)$ e $A = (Y \in J) \qquad P(Y \in J \mid X)$

è quella v.a. $\sigma(X)$-misur. t.c. $\forall B \in \sigma(X) \qquad B = (X \in I)$

$$P(Y \in J, \cancel{\ } X \in I) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(X \in I)} \underbrace{P(Y \in J \mid X)}_{H(X)}]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} H(x) f_X(x)\, dx = \int_I P(Y \in J \mid X = x) f_X(x)\, dx$$

D'altra parte $\quad P(Y \in J, X \in I) = \iint_{I\,J} f_{(X,Y)}(x, y)\, dx\, dy$

Dunque abbiamo che:

$\forall I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \int_I P(Y \in J \mid X = x)\, f_X(x)\, dx = \int_I \left\{ \int_J f_{(X,Y)}(x,y)\, dy \right\} dx$

$\Rightarrow \quad P(Y \in J \mid X = x) = \int_J \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}\, dy = \int_J f_{Y|X}(y|x)\, dy$

$\Rightarrow \quad P(Y \in J \mid \sigma(X)) = P(Y \in J \mid X) = \int_J f_{Y|X}(y|X)\, dy$

Media condizionata ad una σ-algebra

$(\Omega, \mathcal{F}, P) \qquad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ sotto-σ-algebra

Def. X v.a. $\quad \mathbb{E}(X \mid \mathcal{B})$ v.a. $\mathcal{B}$-misurabile tale che

$\forall B \in \mathcal{B} \qquad \mathbb{E}(\mathbb{1}_B X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B\, \mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}))$

In particolare prendendo $X = \mathbb{1}_A = \begin{cases} 1 & \text{su } A \\ 0 & \text{su } A^c \end{cases}$

$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{B})$ è quella v.a. $\mathcal{B}$-misurabile t.c.

$\forall B \in \mathcal{B} \qquad \mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A \cap B}) = P(A \cap B) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B\, \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{B}))$

D'altra parte $\quad P(A \mid \mathcal{B})$ è una v.a. $\mathcal{B}$-mis. t.c.

$\forall B \in \mathcal{B} \qquad P(A \cap B) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B\, P(A \mid \mathcal{B}))$

$\Rightarrow \quad \mathbb{E}(\mathbb{1}_B \, \mathbb{E}(\mathbb{1}_A | \mathcal{B})) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B \, P(A|\mathcal{B})) \quad \forall B \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(\mathbb{1}_A | \mathcal{B}) = P(A|\mathcal{B})$

vedi foglio 1 esercizio 2c)

OSSERVAZIONI

- Se X è una v.a. semplice

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathbb{1}_{A_i}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, P(A_i|\mathcal{B})$$

- Se $\mathcal{B} = \sigma(Y)$ $\qquad \mathbb{E}(X|\sigma(Y)) = \int_{\mathbb{R}} x \, f_{X|Y}(x|y)\,dx$

coincide con la definizione di media condizionata $\mathbb{E}(X|Y)$

PROPRIETÀ

1) $\boxed{\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}))}$

segue dalla definizione con la scelta $B = \Omega$

2) $\boxed{\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = X \quad \text{se } X \text{ è } \mathcal{B}\text{-misurabile}}$

segue dall'esercizio 2c) del foglio 1.

3) $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{B}) = a\,\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) + b\,\mathbb{E}(Y|\mathcal{B}) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$ linearità

segue dalla linearità del valore atteso

4) se $X \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}$ (X è indipendente da $\mathcal{B}$)

$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X)$

~~Dimostro questa proprietà per~~ $X = \mathbb{1}_A \quad A \in \mathcal{F}$

$\forall B \in \mathcal{B} \qquad P(A \cap B) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B \, \mathbb{E}(\mathbb{1}_A | \mathcal{B})]$

$\quad \parallel$ per l'indipendenza

$P(A)\,P(B)$

$\quad \parallel$

$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A)\,P(B) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B \, \mathbb{E}(\mathbb{1}_A)]$

$\Rightarrow$ essendo entrambe v.c. $\mathcal{B}$-mis.

$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A)$

$P(A|\mathcal{B}) = P(A)$

~~- Per la linearità del valore atteso condizionato, prop. 3), otteniamo che la 4) vale anche per le v.c. semplici~~ $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathbb{1}_{A_i}$

OPPURE direttamente:

$\forall B \in \mathcal{B} \quad \mathbb{E}(\mathbb{1}_B X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B \, \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))$

per l'indip. $\quad \parallel$

$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B)\,\mathbb{E}(X)$

$\quad \parallel$

$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B \, \mathbb{E}(X))$

$\Rightarrow$ Per l'es. 2c) del Foglio n. 1

$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X)$

essendo entrambe v.c. $\mathcal{B}$-mis.

5) Monotonia $\quad X \leq Y$ quasi certamente $\Rightarrow \quad \mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{B})$

(senza dimostrazione)

6) Se $\boxed{Y \text{ è } \mathcal{B}\text{- misurabile} \quad \mathbb{E}(XY|\mathcal{B}) = Y\,\mathbb{E}(X|\mathcal{B})}$

$\forall B \in \mathcal{B} \qquad \mathbb{E}(\mathbb{1}_B X Y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mathbb{E}(XY|\mathcal{B}))$

se $Y = \mathbb{1}_C \quad C \in \mathcal{B}$

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mathbb{1}_C X) = \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{1}_{B\cap C}}_{B\cap C \in \mathcal{B}} X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B\cap C}\mathbb{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mathbb{1}_C \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}(X\mathbb{1}_C|\mathcal{B}) = \mathbb{1}_C\,\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \qquad \text{per } Y = \mathbb{1}_C$$

~~esplorers~~

7) Proprietà della torre: o dei condizionamenti successivi:

$$\boxed{\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \qquad \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)|\mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2)|\mathcal{B}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)}$$

- $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)|\mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)$ segue dalla 2) in quanto $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)$ è anche $\mathcal{B}_2$- misurabile

Rimane da mostrare che

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2)|\mathcal{B}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)$$

$\forall B \in \mathcal{B}_1$ per def. di media condizionata a $\mathcal{B}_1$

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2)|\mathcal{B}_1))$$

D'altra parte $B \in \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B\, \mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}_2)) \overset{\downarrow}{=} \mathbb{E}(\mathbb{1}_B X) \underset{\substack{\uparrow \\ B \in \mathcal{B}_1}}{=} \mathbb{E}(\mathbb{1}_B\, \mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}_1))$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{1}_B\, \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}_2) \mid \mathcal{B}_1)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B\, \mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}_1)) \quad \forall B \in \mathcal{B}_1$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}_2) \mid \mathcal{B}_1) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}_1)$$

8) Disuglianza di Jensen: $\varphi(x)$ funzione convessa

$$\mathbb{E}[\varphi(X) \mid \mathcal{B}] \geq \varphi(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}))$$

Esempio: • $\varphi(x) = x^2$

(*) $\mathbb{E}(X^2 \mid \mathcal{B}) \geq \mathbb{E}(X \mid \mathcal{B})^2 \quad \Rightarrow \quad |\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B})| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2 \mid \mathcal{B})}$

• $\varphi(x) = e^x$

$$\mathbb{E}(e^X \mid \mathcal{B}) \geq e^{\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B})}$$

Inoltre prendendo il valore atteso nella (*)

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X^2 \mid \mathcal{B})) = \mathbb{E}(X^2) \geq \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B})^2)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B})^2) \leq \mathbb{E}(X^2)$$