**I appello – Ricerca operativa** 30.05.2014

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare (intera) il seguente problema.

Una Società gestisce una squadra di calcio adottando una politica di massimizzare il suo profitto nel caso peggiore, cioè nel caso in cui i risultati della squadra non siano buoni, in un orizzonte temporale di 1 anno. Così si concentra sull’acquisto/vendita dei giocatori. Per brevità consideriamo solo gli acquisti, senza interazione con le vendite, e solo genericamente i tre reparti: difesa, centrocampo, attacco.

La Società può acquistare i seguenti giocatori di cui stima il valore atteso fra 1 anno:

:: in difesa 7 giocatori, siano *g*1, …, *g*7, a un costo *ci*  e con valore atteso *vi* per *i* = 1, …, 7;

:: a centrocampo 9 giocatori, siano *g*8, …, *g*16, a un costo *ci* e con valore atteso *vi* per *i* = 8, …, 16;

:: in attacco 7 giocatori, siano *g*17, …, *g*23, a un costo *ci* e con valore atteso *vi* per *i* = 17, …, 23.

(ad esempio un giocatore giovane avrà un valore atteso fra 1 anno superiore al suo costo attuale)

Per diversi motivi: la Società, per ogni reparto, vuole acquistare da 2 a 4 giocatori; il budget per gli acquisti della Società è pari a *B*; riguardo i giocatori *g*1, *g*3, *g*9, *g*19 la Società o li acquista tutti o nessuno.

Il problema è scegliere quali giocatori acquistare, garantendo i vincoli di reparto, di budget, e dei giocatori *g*1, *g*3, *g*9, *g*19, al fine di massimizzare la somma dei profitti attesi fra 1 anno dei giocatori acquistati (per ogni giocatore il profitto atteso fra 1 anno è dato dalla differenza fra il valore atteso fra 1 anno e il costo attuale).

**2.** Descrivere brevemente il metodo “branch and bound” per la soluzione di problemi di programmazione lineare intera.

**3.** Determinare mediante l’algoritmo di Dijkstra un cammino di costo minimo da *s* a *t* nel seguente grafo orientato dove accanto ad ogni arco è indicato il rispettivo costo.



**4.** Svilupparei seguenti punti:(i)descrivere il problema della “pianificazione dei progetti”; (ii) formulare il problema in termini di programmazione lineare; (iii) risolvere mediante il metodo PERT la seguente istanza del problema:

le attività sono A1, A2, A3, A4, A5;

le rispettive durate sono: 5, 8, 3, 2, 7;

le relazioni di precedenza sono: A1 < A4, A2 < A3, A2 < A4, A3 < A5.

**II appello – Ricerca operativa** 20.06.2014

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare (intera) il seguente problema.

Una Ditta decide di assumere persone da scegliere fra un insieme *C* di 10 candidati per svolgere globalmente un insieme *A* di 5 attività. Tramite colloqui, la Ditta determina il sottoinsieme *Ai* di attività in *A* per le quali il candidato *i* ha abilità, per *i* = 1, …, 10 (o equivalentemente, la Ditta determina il sottoinsieme di candidati *Cj* in *C* che ha abilità per l’attività *j*, per *j* = 1, …, 5). Il costo per assumere il candidato *i* è pari a *ci* , per *i* = 1, …, 10. Il problema è scegliere quali persone assumere fra i 10 candidati, con il vincolo che per ogni attività ci siano almeno 2 persone abili, in modo da minimizzare il costo totale per le assunzioni.

**2.** Sia *P* un problema di Programmazione Lineare Intera. Spiegare: (i) cosa si intende per *rilassamento continuo* (o *lineare*) di *P*; (ii) che relazione c’è tra il valore della soluzione ottima di *P* e il valore della soluzione ottima del rilassamento continuo di *P* (assumendo che *P* sia un problema di minimizzazione); (iii) cosa si intende per *matrici totalmente unimodulari* e qual è l’utilità di riconoscere tali matrici nell’ambito della Programmazione Lineare Intera.

**3.** Determinare mediante l’algoritmo di Ford-Fulkerson un flusso massimo da *s* a *t* nel seguente grafo orientato dove accanto ad ogni arco è indicata la rispettiva capacità.

 

**4.** Svilupparei seguenti punti:(i)descrivere il problema della “localizzazione di impianti”; (ii) formulare il problema in termini di programmazione lineare intera; (iii) determinare una soluzione “greedy” dell’istanza riportata di seguito.

matrice *cij* impianti

 1 2 3 4

 1 4 0 0 1

 2 1 3 4 1

 3 0 1 3 0

clienti 4 2 0 1 2

 5 3 4 0 2

vettore *dj* : 3 1 4 3

**III appello – Ricerca operativa** 11.07.2014

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare il seguente problema.

Una ditta desidera produrre due tipi di pasta, siano Base e Tradizionale, usando tre tipi di grano, siano A, B, C, che sono a disposizione in quantità rispettivamente di 2700, 1400, 300 unità. Il profitto che l’azienda presume di trarre dalla produzione di 1 unità di Base è 3, mentre dalla produzione di 1 unità di Tradizionale è 7. Tali produzioni necessitano di particolari combinazioni dei tre tipi di grano. Per produrre 1 unità di Base, si ha bisogno di: 3 unità di A, 1 unità di B. Per produrre 1 unità di Tradizionale, si ha bisogno di: 2 unità di A, 1 unità di B, 1 unità di C. Il problema è organizzare la produzione (cioè stabilire quante unità di Base e di Tradizionale produrre) in modo di massimizzare il profitto totale.

**2.** Sia *P* il problema di programmazione lineare dell’Esercizio 1. Sviluppare i seguenti punti:

2a) costruire il problema duale, sia *D*, del problema *P*;

2b)spiegare che relazione c’è fra il valore della soluzione ottima del problema *P* e il valore della soluzione ottima del problema *D* [nel caso in cui tali soluzioni ottime esistano];

2c) illustrare l’interpretazione economica dei valori delle variabili del problema *D* all’ottimo.

**3.** Descrivere un qualsiasi problema di natura pratica (anche inventandolo) che può essere formulato in termini di programmazione lineare intera con funzione obiettivo da minimizzare.

**4.** Mediante il metodo di Wagner-Whitin, risolvere il seguente problema.

Un bene deve essere prodotto su un orizzonte temporale composto da 4 periodi. Per ogni periodo *t* = 1,…,4, siano *xt* e *st* le variabili che indicano rispettivamente la quantità prodotta all’inizio del periodo *t* e la giacenza alla fine del periodo *t*. In particolare, all’inizio del periodo 1 non ci sono giacenze in magazzino, e non si vuole che ce ne siano alla fine del periodo 4. La funzione costo di produzione è: *Ct* = *At* *w*(*xt*) + *ctxt*, dove: *w*(*xt*) = 1 se *xt* > 0, e *w*(*xt*) = 0 altrimenti. La funzione costo di stoccaggio è: *Ht* = *htxt*. Per ogni periodo *t* = 1,…,4, sia *dt* la stima delle vendite da effettuare (cioè della domanda da soddisfare) nel periodo *t*. In tabella sono riportati i dati relativi a quanto sopra.

Periodo Domanda A c h

1 40 10 2 1

2 50 10 2 2

3 70 20 3 1

4 40 10 1

Problema: determinare le variabili *xt* e *st* (per ogni *t*) in modo da minimizzare i costi totali e da soddisfare tutte le domande al momento in cui vengono effettuate (cioè, *st* > 0).

**I appello – Ricerca operativa** 29Maggio 2015

**1.** Al fine di spiegare cosa si intende per “interpretazione economica della dualità”:

(i) descrivere un qualsiasi problema di natura pratica in termini di programmazione lineare, sia *P*, tale che sia possibile definire una interpretazione economica del valore delle variabili del problema duale di *P* all’ottimo; (ii) formulare il problema duale di *P*, sia *D*, e spiegare il significato del valore che le variabili del problema *D* assumono all’ottimo.

**2.** Formulare in termini di programmazione lineare intera il seguente problema.

Una Regione con 4 Province, siano *P*1, …, *P*4, finanzia al momento 4 Strutture (di eccellenza) per la Cardiologia, siano *S*1, …, *S*4, uno per Provincia. Si stima che:

:: per ogni Struttura *Si* (per *i* = 1, …, 4): sia possibile ricoverare in un anno un numero *ri* di pazienti dalla Regione e sia da considerare un “costo fisso” annuale pari a *Ci* che rappresenta il costo annuale sostenuto dalla Regione per la sola apertura della Struttura;

:: per ogni Provincia *Pj* (per *j* = 1, …, 4): sia presente un numero *pj* di pazienti (attesi) da ricoverare in un anno presso una Struttura di Cardiologia della Regione;

:: per ogni coppia Struttura *Si* e Provincia *Pj* (per *i* = 1, …, 4, per *j* = 1, …, 4): sia da considerare un “costo variabile” annuale pari a *cij* che rappresenta il costo annuale per ricoverare nella Struttura *Si* un paziente dalla provincia *Pj* [esso è la somma di un costo sostenuto dalla Regione per ricoverare in *Si* un paziente da *Pj* e di un costo sostenuto da un paziente (atteso) da *Pj* per essere ricoverato in *Si*].

Il problema è individuare quali Strutture eventualmente chiudere fra *S*1, …, *S*4 nel contesto di (cioè determinando) una gestione dei ricoveri che garantisca a ogni paziente (atteso) il ricovero presso una Struttura della Regione e che minimizzi la somma dei “costi fissi” e dei “costi variabili”.

**3.** Descrivere brevemente: (i) cosa si intende per “matrice totalmente unimodulare”, (ii) qual è la proprietà principale di tali matrici nel contesto della Programmazione Lineare Intera, (iii) qual è l’utilità di tale proprietà.

**4.** Determinare mediante l’algoritmo di Ford-Fulkerson un flusso massimo da *s* a *t* nel seguente grafo orientato dove accanto ad ogni arco è indicata la rispettiva capacità.



**II appello – Ricerca operativa** 19Giugno 2015

**III appello – Ricerca operativa** 10Luglio 2015

**1.** Sviluppare i seguenti punti:

1. definire cosa si intende per “problema di programmazione lineare”;
2. descrivere un problema qualunque (anche fra quelli studiati o inventato) che può essere formulato come “problema di programmazione lineare” in cui la funzione obiettivo è da minimizzare;
3. descrivere brevemente il “metodo del simplesso” per la risoluzione di un “problema di programmazione lineare”.

**2.** Formulare in termini di programmazione lineare intera il seguente problema.

Un Provveditorato deve decidere le nomine esterne per formare le Commissioni dell’Esame di Stato. Per comodità si assuma che tale decisione sia ristretta a una singola materia. Sono presenti un insieme *D* di docenti e un insieme *S* di Scuole. In particolare:

:: ogni Docente in *D* può essere nominato in al più una Scuola in *S*;

:: ogni Scuola *j* ∈ *S* richiede che vengano nominati in tale Scuolaun numero *bj* di Docenti in *D*;

:: ogni Docente *i* ∈ *D* può essere nominato soltanto in un sottoinsieme *Si* ⊆ *S* di Scuole per motivi di opportunità [ad esempio un Docente non può essere nominato nella Scuola in cui lavora durante l’anno o nelle Scuole considerate troppo vicine a questa]; in altri termini ad ogni Docente *i* ∈ *D* è associato un sottoinsieme *Si* ⊆ *S* di Scuole nelle quali soltanto può essere nominato, ed automaticamente a ogni Scuola *j* ∈ *S* è associato un sottoinsieme *Dj* ⊆ *D* di Docenti i quali soltanto possono essere nominati in tale Scuola*;*

:: per ogni Docente *i* ∈ *D* e per ogni Scuola *j* ∈ *S*, nominare il Docente *i* nella Scuola *j* [nel caso in cui è possibile] comporta un costo *cij*.

Il problema è decidere come effettuare le nomine dei Docenti nelle Scuole, soddisfacendo le richieste delle Scuole, in modo da minimizzare il costo complessivo per tali nomine.

**3.** Svilupparei seguenti punti:(i)descrivere il problema della “localizzazione degli impianti”; (ii) formulare il problema in termini di programmazione lineare intera.

**4.** Risolvere mediante il metodo PERT la seguente istanza del problema della “pianificazione dei progetti”:

le attività sono A1, A2, A3, A4, A5;

le rispettive durate sono: 7, 1, 4, 3, 4;

le relazioni di precedenza sono: A1 < A3, A1 < A4, A2 < A3, A2 < A5.

**IV appello – Ricerca operativa** 11Settembre 2015

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare il seguente problema.

Una Ditta che si occupa della gestione dei rifiuti ha raccolto rifiuti in maniera differenziata.

In dettaglio:

:: i rifiuti sono catalogati in un insieme *R* di categorie, siano 1, 2, …, *|R|* [ad esempio, vetro, carta, indifferenziata, ecc.]: in particolare per ogni categoria *i* ∈ {1, 2, …, |*R*|}laDitta ha raccolto *ri* unità;

:: i possibili smaltimenti di tali rifiuti sono catalogati in un insieme *D* di destinazioni, siano 1, 2, …, *|D|* [ad esempio, riciclaggio, inceneritore, discarica, ecc.]: in particolare la destinazione *j* ∈ {1, 2, …, |*D*|}ha una capacità di smaltimento di al più *dj* unità di rifiuto di qualsiasi categoria [assumiamo le destinazioni e le loro capacità di smaltimento siano definite in modo che tutti i rifiuti raccolti possano essere smaltiti];

:: ogni categoria *i* ∈ *R* può essere smaltita soltanto in un sottoinsieme *Di* ⊆ *D* di destinazioni [ad esempio, il vetro non può essere smaltito in una destinazione relativa al riciclo della carta]; in altri termini ad ogni categoria *i* ∈ *R* è associato un sottoinsieme *Di* ⊆ *D* di destinazioni nelle quali soltanto può essere smaltito, ed automaticamente ad ogni destinazione *j* ∈ *D* è associato un sottoinsieme *Rj* ⊆ *R* di categorie le quali soltanto possono essere smaltite in tale destinazione;

:: per ogni categoria *i* ∈ *R* e per ogni destinazione *j* ∈ *D*, smaltire 1 unità di categoria *i* nella destinazione *j* [nel caso in cui è possibile] comporta sia un impatto ambientale *aij*, sia un costo *cij*.

Il problema è decidere come smaltire tutti i rifiuti raccolti (in *R*) nelle destinazioni (in *D*) in accordo con le capacità di smaltimento delle destinazioni, in modo da minimizzare l’impatto ambientale totale per tale smaltimento, con la condizione che il costo totale per tale smaltimento sia non superiore a una costante data *C*.

[*Nota*: si assuma che le unità dei rifiuti siano divisibili, così che il problema possa essere formulato in termini di programmazione lineare (non intera)].

**2.** Sviluppare i seguenti punti:

1. definire cosa si intende per problema di “programmazione lineare intera”;
2. descrivere un problema qualunque (anche fra quelli studiati o inventato) che può essere formulato come problema di “programmazione lineare intera” in cui la funzione obiettivo è da massimizzare;
3. descrivere brevemente il “metodo branch and bound” per la risoluzione di un problema di “programmazione lineare intera”.

**3.** Svilupparei seguenti punti:(i)descrivere il problema del “cammino di costo minimo”; (ii) costruire una qualsiasi istanza del problema e risolverla con l’algoritmo di Dijkstra.

**4.** Definirecosa si intende per problema di “ottimizzazione combinatoria” e descrivere brevemente la classe di “euristiche di ricerca locale” per determinare una soluzione ammissibile di un tale problema.

**V appello (straordinario) – Ricerca operativa** 27Novembre 2015

**1.** Sviluppare i seguenti punti:

1. definire cosa si intende per “problema di programmazione lineare intera”;
2. descrivere un problema qualunque (anche fra quelli studiati o inventato) che può essere formulato come “problema di programmazione lineare intera” in cui la funzione obiettivo è da minimizzare;
3. descrivere brevemente il “metodo del branch and bound” per la risoluzione di un “problema di programmazione lineare intera”.

**2.** Formulare in termini di programmazione lineare (intera) il seguente problema.

L’Ente che organizza un campionato di calcio deve decidere gli orari delle partite per un certo turno del campionato, in cui si giocano 10 partite, e in cui sono previsti 3 ‘anticipi’ (in tre orari diversi) e 1 ‘posticipo’.

In dettaglio:

:: c’è un insieme *P* = {*p*1, *p*2, …, *p*10} di 10 *partite*, e c’è un insieme *T* = {*t*1, *t*2, …, *t*5} di 5 *orari*;

:: bisogna assegnare: 1 partita all’orario *t*1, 1 partita all’orario *t*2,1 partita all’orario *t*3, 6 partite all’orario *t*4, 1 partita all’orario *t*5;

:: ogni partita deve essere assegnata ad un solo orario;

:: assegnare la partita *pi* all’orario *tj*comporta un profitto stimato pari a *qij* , per *i =* 1, …, 10, per *j =* 1, …, 5 [tale profitto è direttamente legato a pubblicità/sponsor e indirettamente legato all’ ‘audience’].

Il problema è decidere come effettuare tali assegnamenti di partite a orari, soddisfacendo i vincoli di sopra, in modo da massimizzare il profitto complessivo per tali assegnamenti.

**3.** Svilupparei seguenti punti:(i)descrivere il “problema dei trasporti”; (ii) formulare il problema in termini di programmazione lineare (intera); (iii) con riferimento a tale formulazione, spiegare se la matrice dei vincoli è totalmente unimodulare, e qual è la conseguenza di questo fatto.

**4.** Determinare mediante l’algoritmo di Dijkstra un cammino di costo minimo da *s* a *t* nel seguente grafo orientato dove accanto ad ogni arco è indicato il rispettivo costo.



**VI appello – Ricerca operativa** 15Gennaio 2016

**VII appello – Ricerca operativa** 5Febbraio 2016

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare il seguente problema.

Un Fruttivendolo desidera produrre due tipi di preparati mix di verdure, siano M1 e M2, usando tre tipi di verdure, siano A, B, C, che sono a disposizione in quantità rispettivamente di 40, 70, 40 unità. Il profitto che il Fruttivendolo presume di trarre dalla produzione di 1 unità di M1 è 4 Euro, mentre dalla produzione di 1 unità di M2 è 7 Euro. Tali produzioni necessitano di particolari combinazioni dei tre tipi di verdura. Per produrre 1 unità di M1, si ha bisogno di: 3 unità di A, 2 unità di B, 1 unità di C. Per produrre 1 unità di M2, si ha bisogno di: 0 unità di A, 4 unità di B, 3 unità di C. Il problema è organizzare la produzione (cioè stabilire quante unità di M1 e di M2 produrre) in modo di massimizzare il profitto totale.

**2.** Sia *P* il problema di programmazione lineare dell’Esercizio 1. Sviluppare i seguenti punti:

2a) costruire il problema duale, sia *D*, del problema *P*;

2b) spiegare, secondo l’interpretazione economica del duale, che significato hanno i valori delle variabili del problema *D* all’ottimo.

**3.** Svilupparei seguenti punti:(i)descrivere il problema del “cammino di costo minimo”; (ii) formulare tale problema in termini di programmazione lineare (intera).

**4.** Svilupparei seguenti punti:

(i)descrivere il problema della “localizzazione di impianti”;

(ii) considerare la seguente istanza del problema:

matrice *cij*

impianti

 1 2 3

 1 0 4 3

clienti 2 2 0 3

 3 1 0 2

 4 0 4 2

vettore *dj* : 7 5 3

(ii.1) formulare tale istanza in termini di programmazione lineare (intera);

(ii.2) determinare una soluzione “greedy” per tale istanza.

**I appello – Ricerca operativa** 30.05.2016

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare (intera) il seguente problema:

Una Compagnia di Assicurazioni si vede costretta a chiudere alcune sedi in Italia e così a dover proporre una allocazione/ricollocazione per tutte le persone che lavoravano in tutte le sedi (aperte o chiuse). In dettaglio:

:: c’è un insieme *P* di persone, sia *P =* {1, 2, …, |*P*|}, con |*P*| = 33;

:: c’è un insieme *D* di possibili destinazioni, sia *D =* {1, 2, …, |*D*|}, con |*D*| = 7. Le destinazioni 1, …, 5 sono le sedi rimaste aperte in Italia, le destinazioni 6 e 7 sono rispettivamente la cassa integrazione e il pre-pensionamento. In particolare (per diversi motivi): nella destinazione *j* ∈ {1, 2, …, 5} bisogna allocare un numero di persone pari almeno a *aj* e pari al più a *dj*; nelle destinazioni 6 e 7 è possibile allocare un numero di persone rispettivamente pari al più al 20% e al 25% del totale delle persone. Inoltre: se si utilizza la destinazione 6 [cassa integrazione], anche per una sola persona, allora la Compagnia deve sostenere un costo fisso (nell’orizzonte temporale di un anno) stimato pari a *K* (per motivi di immagine);

:: ogni persona *i* ∈ *P* deve essere allocata in una (sola) destinazione; in particolare ogni persona *i* ∈ *P* può essere allocata soltanto in un sottoinsieme *Di* ⊆ *D* di destinazioni [ad esempio una persona può non essere allocabile in una certa sede oppure in pre-pensionamento]; in altri termini ad ogni persona *i* ∈ *P* è associato un sottoinsieme *Di* ⊆ *D* di destinazioni nelle quali soltanto può essere allocata, ed automaticamente ad ogni destinazione *j* ∈ *D* è associato un sottoinsieme *Pj* ⊆ *P* di persone le quali soltanto possono essere allocate in tale destinazione;

:: per ogni persona *i* ∈ *P* e per ogni destinazione *j* ∈ *D*, allocare la persona *i* nella destinazione *j* [nel caso in cui è possibile] la Compagnia deve sostenere un costo *cij* (nell’orizzonte temporale di un anno).

Il problema è decidere come allocare tutte le persone (in *P*) nelle destinazioni (in *D*), in accordo con i vincoli di allocamento delle destinazioni, in modo da minimizzare il costo totale sostenuto dalla Compagnia (nell’orizzonte temporale di un anno).

**2.** Descrivere cosa si intende per: (i) problema di Programmazione Lineare Intera (*PLI*); (ii) *rilassamento continuo* (o *lineare*) di un problema *P* diPLI; (iii) *matrice totalmente unimodulare* (*TUM*), specificando qual è l’utilità di conoscere/studiare le matrici TUM nel contesto dello studio della PLI, e poi mostrando un esempio di un problema reale/verosimile formulabile in termini di PLI in cui compare una matrice TUM.

**3.** Svilupparei seguenti punti:(i)descrivere il problema della “pianificazione dei progetti”; (ii) formulare tale problema in termini di programmazione lineare (intera); (iii) costruire una istanza di tale problema rappresentata di seguito e formularla in termini di programmazione lineare (intera):

le attività sono A1, A2, A3, A4;

le rispettive durate sono: 1, 5, 7, 3;

le relazioni di precedenza sono: A1 < A3, A2 < A3, A2 < A4, A3 < A4.

**II appello – Ricerca operativa** 20.06.2016

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare (intera) il seguente problema:

Una Ditta che si occupa di import/export deve decidere quali beni scegliere da acquistare e così da trasportare mediante un suo TIR.

In dettaglio:

:: c’è un insieme *P* di beni, sia *P =* {1, 2, …, |*P*|};

:: ogni bene *i* ∈ *P* , se scelto, comporta per la Ditta un costo *ci* (per l’acquisto); in particolare la Ditta ha a disposizione un budget limitato pari a *B*;

:: ogni bene *i* ∈ *P*, se scelto, occupa uno spazio *si* (per il trasporto) sul TIR; in particolare il TIR ha a disposizione uno spazio limitato pari a *S*;

:: ogni bene *i* ∈ *P* , se scelto, garantisce alla Ditta un profitto *pi*;

:: i beni 1, 2, 3, devono essere o tutti scelti o tutti non scelti (per diversi motivi: ad esempio tali beni sono riconducibili a uno stesso fornitore che impone questa condizione).

Il problema è decidere quali beni scegliere da acquistare e così da trasportare mediante il TIR, in accordo con i vincoli di sopra, in modo da massimizzare il profitto totale della Ditta.

**2.** Svilupparei seguenti punti:(i)descrivere cosa si intende per problema di Programmazione Lineare (*PL*); (ii) riportare le principali proprietà della PL (cioè i due teoremi e il corollario, in accordo con il programma del corso); (iii) descrivere brevemente l’algoritmo del Simplesso per la soluzione di un problema di PL.

**3.** Svilupparei seguenti punti:(i)descrivere il problema della “cammino di costo minimo”; (ii) costruire una istanza di tale problema – cioè un grafo orientato, in cui sono evidenziati i vertici *s* e *t*, e in cui ad ogni arco è associato un costo – che abbia almeno 5 vertici; (iii) per tale istanza, formulare il problema in termini di programmazione lineare (intera); (iv) per tale istanza, determinare una soluzione ottima del problema mediante l’algoritmo di Dijkstra.

**III appello – Ricerca operativa** 11.07.2016

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare (intera) il seguente problema:

Una Caseificio produce 3 tipi di formaggio, siano F1, F2, F3, combinando due tipi di latte, siano L1, L2.

In dettaglio:

:: per ottenere 1 u. di F1, servono 2 u. di L1 e 3 u. di L2; per ottenere 1 u. di F2, servono 5 u. di L1 e 0 u. di L2; per ottenere 1 u. di F3, servono 4 u. di L1 e 1 u. di L2;

:: la disponibilità di L1 e di L2 è rispettivamente di 2.000 u. e di 1.500 u.;

:: il ricavo per la produzione di 1 u. di F1, di F2, di F3 è rispettivamente di 20, 14, 30;

:: il costo per la produzione di 1 u. di F1, di F2, di F3 è rispettivamente di 12, 7, 10; in particolare, produrre almeno 1 u. di F3 comporta un costo fisso C [per l’acquisto di uno speciale macchinario].

Il problema è determinare quante unità di F1, di F2, di F3 rispettivamente produrre, con le risorse a disposizione, in modo da massimizzare il totale dei guadagni [uguale alla differenza fra il totale dei ricavi e il totale dei costi].

**2.** Spiegare qual è la differenza fra un problema di Programmazione Lineare (*PL*) e un problema di Programmazione Lineare Intera (*PLI*). Inoltre descrivere due situazioni reali/verosimili che possono essere modellate rispettivamente come problemi di PL e di PLI in cui la funzione obiettivo è da minimizzare [esplicitando tali modelli].

**3.** Determinare mediante l’algoritmo di Ford-Fulkerson un flusso massimo da *s* a *t* nel seguente grafo orientato dove accanto ad ogni arco è indicata la rispettiva capacità.



**IV appello – Ricerca operativa** 08.09.2016

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare intera il seguente problema.

Una persona vuole fare una piccola dieta di una settimana avendo a disposizione un budget di 25 Euro. Per semplicità assumiamo che a tal fine la persona possa acquistare solo tre tipi di alimento, cioè Frutta (F), Latte (L), Uova (U), e che ci siano solo tre parametri di riferimento, cioè Grassi (G), Proteine (P), Vitamine (V).

In dettaglio:

:: da 1 u. di F, la persona trae 0 u. di G, 0 u. di P, 7 u. di V;

:: da 1 u. di L, la persona trae 1 u. di G, 1 u. di P, 2 u. di V;

:: da 1 u. di U, la persona trae 3 u. di G, 4 u. di P, 1 u. di V.

Inoltre:

:: il costo di 1 u. di F, di L, di U è rispettivamente 3 , 1 , 0,3;

:: la persona necessita di trarre dalla sua alimentazione almeno 12 u. di P e almeno 30 u. di V.

Ilproblema è decidere la quantità (in termini di u.) da acquistare per ciascun alimento, soddisfacendo il vincolo di budget e la necessità sopra espressa, al fine di minimizzare la quantità di (in termini di u.) di G che la persona trae dalla sua alimentazione.

**2.** Descrivere brevemente il *problema dei trasporti* e formularlo in termini di programmazione lineare (intera). Inoltre considerare la variante del problema in cui ci sono dei “costi fissi”, cioè in cui effettuare un qualsiasi trasporto (non nullo) da una sorgente *i* a una destinazione *j* comporti un costo fisso *Kij* aggiuntivo (ad esempio per un pedaggio), e formulare tale variante del problema in termini di programmazione lineare (intera).

**3.** Descrivere brevemente il*problema di localizzazione di impianti* e formularlo in termini di programmazione lineare (intera). Inoltre determinare una soluzione “greedy” per l’istanza del problema riportata di seguito:

matrice *cij*

impianti

 1 2 3 4

 1 2 0 4 5

clienti 2 3 5 0 3

 3 0 1 4 2

 4 1 0 2 7

vettore *dj* : 3 7 7 2

**V appello – Ricerca operativa** 16.01.2017

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare (intera) il seguente problema:

Un’Agenzia di Collocamento riceve per via telematica sia domande di lavoro [da alcune persone] sia offerte di lavoro [da alcune ditte]. In dettaglio:

:: c’è un insieme *P* di persone, sia *P =* {1, 2, …, |*P*|}, che domanda lavoro;

:: c’è un insieme *D* di ditte, sia *D =* {1, 2, …, |*D*|}, che offre lavoro [ipotizziamo senza perdita di generalità che ogni ditta offra un (solo) lavoro];

:: esistono i seguenti vincoli: ogni persona *i* ∈ *P* può essere allocata in una (sola) ditta, e in ogni ditta *j* ∈ *D* può essere allocata una (sola) persona; in particolare ogni persona *i* ∈ *P* può essere allocata soltanto in un sottoinsieme *Di* ⊆ *D* di ditte [in base al suo curriculum]; in altri termini ad ogni persona *i* ∈ *P* è associato un sottoinsieme *Di* ⊆ *D* di ditte nelle quali soltanto può essere allocata, ed automaticamente ad ogni ditta *j* ∈ *D* è associato un sottoinsieme *Pj* ⊆ *P* di persone le quali soltanto possono essere allocate in tale ditta.

Il problema è allocare più persone (in *P*) possibili nelle ditte (in *D*) in accordo con i vincoli di sopra [cioè determinare il maggior numero possibile di coppie (persona, ditta) in accordo con i vincoli di sopra].

**2.** Svilupparei seguenti punti:(i)descrivere cosa si intende per problema di Programmazione Lineare Intera (*PLI*); (ii) descrivere una situazione reale/verosimile che può essere modellata come problema di PLI in cui la funzione obiettivo è da minimizzare [esplicitando tale modello]; (iii) descrivere brevemente il metodo del Branch and Bound per la soluzione di un problema di PLI.

**3.** Svilupparei seguenti punti:(i)descrivere il problema della “pianificazione dei progetti”; (ii) formulare tale problema in termini di programmazione lineare (intera); (iii) risolvere mediante il metodo PERT la seguente istanza del problema:

le attività sono A1, A2, A3, A4, A5;

le rispettive durate sono: 4, 7, 9, 4, 3;

le relazioni di precedenza sono: A1 < A4, A2 < A3, A2 < A4, A3 < A5, A4 < A5.

**VI appello – Ricerca operativa** 03.02.2017

**1.** Svilupparei seguenti punti:

(i)descrivere cosa si intende per problema di Programmazione Lineare;

(ii) descrivere cosa si intende per “problema duale” di un problema *P* di Programmazione Lineare (ad esempio partendo da un problema *P* in forma canonica);

(iii) enunciare il Teorema della dualità forte;

(iv) fare *brevemente* un esempio sulla “interpretazione economica della dualità”.

**2.** Svilupparei seguenti punti:(i)descrivere il problema del “cammino di costo minimo”; (ii) costruire una istanza qualsiasi del problema;(iii) per tale istanza formulare il problema in termini di programmazione lineare (intera).

**3.** Mediante il metodo di Wagner-Whitin, risolvere il seguente problema.

Un bene deve essere prodotto su un orizzonte temporale composto da 4 periodi. Per ogni periodo *t* = 1,…,4, siano *xt* e *st* le variabili che indicano rispettivamente la quantità prodotta all’inizio del periodo *t* e la giacenza alla fine del periodo *t*. In particolare, all’inizio del periodo 1 non ci sono giacenze in magazzino, e non si vuole che ce ne siano alla fine del periodo 4. La funzione costo di produzione è: *Ct* = *ctxt*. La funzione costo di stoccaggio è: *Ht* = *htxt*. Per ogni periodo *t* = 1,…,4, sia *dt* la stima delle vendite da effettuare (cioè della domanda da soddisfare) nel periodo *t*. In tabella sono riportati i dati relativi a quanto sopra.

Periodo Domanda c h

1 30 50 2

2 20 70 3

3 30 50 4

4 10 40

Problema: determinare le variabili *xt* e *st* (per ogni *t*) in modo da minimizzare i costi totali e da soddisfare tutte le domande al momento in cui vengono effettuate (cioè, *st* > 0).

**I appello – Ricerca operativa** 05.06.2017

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare (intera) i due seguenti problemi:

a) La Regione vuole acquistare nuovi macchinari ospedalieri con un budget pari a *b*. L’insieme dei macchinari candidati è *M =* {1, 2, …, *m*}. Per ogni macchinario *i* ∈ *M* sono noti sia un costo *ci* (costo del macchinario) sia una utilità *si* (numero di pazienti che utilizzeranno quel macchinario). Il problema è scegliere quali macchinari acquistare, con il vincolo di budget, con l’obiettivo di massimizzare l’utilità totale.

b) La Regione vuole far sì ci siano dei Centri per la dialisi in modo che per ogni Comune esista almeno un Centro nel raggio di 20 Km. A tal fine la Regione considera solo i Comuni non ancora ‘coperti’ [cioè che sono distanti più di 20 Km.] dai Centri che già esistono (nelle città principali). In dettaglio:

:: sia *Q* *=* {1, 2, …, *q*} l’insieme dei Comuni non ancora ‘coperti’;

:: per ogni Comune *i* ∈ *Q*, sia *Si* l’insieme dei Comuni in *Q* che sono nel raggio di 20 Km. dal Comune *i* [cioè *Si* è l’insieme dei Comuni che sarebbero ‘coperti’ se un Centro fosse aperto nel Comune *i*].

Il problema è scegliere in quali Comuni (in *Q*) aprire un Centro, con il vincolo che tutti i Comuni (in *Q*) siano ‘coperti’ dai Centri aperti, con l’obiettivo di minimizzare il numero dei Centri aperti.

**2.** Mediante il metodo PERT risolvere la seguente istanza del problema di “pianificazione dei progetti”.

le attività sono A1, A2, A3, A4, A5;

le rispettive durate sono: 2, 4, 7, 2, 3;

le relazioni di precedenza sono: A1 < A3, A1 < A4, A2 < A3, A3 < A5, A4 < A5.

**3.** Mediante il metodo di Wagner-Whitin, risolvere il seguente problema.

Un bene deve essere prodotto su un orizzonte temporale composto da 3 periodi. Per ogni periodo *t* = 1, …, 3, siano *xt* e *st* le variabili che indicano rispettivamente la quantità prodotta all’inizio del periodo *t* e la giacenza alla fine del periodo *t*. In particolare, all’inizio del periodo 1 non ci sono giacenze in magazzino, e non si vuole che ce ne siano alla fine del periodo 3. La funzione costo di produzione è: *Ct* = *At* *w*(*xt*) + *ctxt*, dove: *w*(*xt*) = 1 se *xt* > 0, e *w*(*xt*) = 0 altrimenti. La funzione costo di stoccaggio è: *Ht* = *htxt*. Per ogni periodo *t* = 1, …, 3, sia *dt* la stima delle vendite da effettuare (cioè della domanda da soddisfare) nel periodo *t*. In tabella sono riportati i dati relativi a quanto sopra.

Periodo Domanda A c h

1 40 20 3 0

2 50 10 3 1

3 70 10 2

Problema: determinare le variabili *xt* e *st* (per ogni *t*) in modo da minimizzare i costi totali e da soddisfare tutte le domande al momento in cui vengono effettuate (cioè, *st* > 0).

**II appello – Ricerca operativa** 26.06.2017

**1.** Svilupparei seguenti punti:

a) definire cosa si intende per problema di “programmazione lineare”;

b) descrivere una situazione reale, fra quelle studiate oppure inventata, che può essere modellata come un problema di “programmazione lineare” [esplicitando tale modello] con funzione obiettivo da massimizzare;

c) definire cosa si intende per problema di “programmazione lineare intera”;

d) descrivere una situazione reale, fra quelle studiate oppure inventata, che può essere modellata come un problema di “programmazione lineare intera” [esplicitando tale modello] con funzione obiettivo da minimizzare.

**2.** Svilupparei seguenti punti:(i)descrivere il problema della “cammino di costo minimo”; (ii) formulare il problema in termini di programmazione lineare (intera); (iii) determinare mediante l’algoritmo di Dijkstra un cammino di costo minimo da *s* a *t* nel seguente grafo orientato dove accanto ad ogni arco è indicato il rispettivo costo.



**3.** Svilupparei seguenti punti:

(i)descrivere il problema della “localizzazione di impianti”;

(ii) formulare tale problema in termini di programmazione lineare (intera);

(iii) determinare una soluzione “greedy” per la seguente istanza del problema:

matrice *cij*

impianti

 1 2 3 4

 1 2 3 0 0

 2 0 1 4 1

 3 2 0 5 8

clienti 4 4 1 0 4

 5 0 3 2 4

vettore *dj* : 4 5 3 2

**III appello – Ricerca operativa** 17.07.2017

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare intera il seguente problema.

Una Compagnia deve decidere come impiegare le sue navi da crociera su possibili rotte marittime per la prossima stagione estiva. Sono presenti un insieme *N* di Navi e un insieme *R* di Rotte. In particolare:

:: ogni Nave in *N* può essere abbinata ad al più una Rotta in *R*;

:: ogni Rotta *j* ∈ *R* richiede che vengano abbinate ad essa un certo numero di Navi in *N* che sia compreso fra un minimo di *aj* e un massimo di *bj*;

:: ogni Nave *i* ∈ *N* può essere abbinata soltanto in un sottoinsieme *Ri* ⊆ *R* di Rotte per motivi di natura tecnica; in altri termini ad ogni Nave *i* ∈ *N* è associato a un sottoinsieme *Ri* ⊆ *R* di Rotte nelle quali soltanto può essere abbinata, ed automaticamente a ogni Rotta *j* ∈ *R* è associato un sottoinsieme *Nj* ⊆ *N* di Navi le quali soltanto possono essere abbinate a tale Rotta*;*

:: per ogni Nave *i* ∈ *N* e per ogni Rotta *j* ∈ *R*, abbinare la Nave *i* alla Rotta *j* [nel caso in cui è possibile] comporta un profitto stimato pari a *pij*.

Il problema è decidere come effettuare gli abbinamenti della Navi alle Rotte, soddisfacendo le richieste delle Rotte, in modo da massimizzare il profitto complessivo per tali abbinamenti.

**2.** Svilupparei seguenti punti:(i)descrivere cosa si intende per problema di Programmazione Lineare (*PL*); (ii)descrivere cosa si intende per problema di Programmazione Lineare Intera (*PLI*); (iii) spiegare cosa si intende per *matrici totalmente unimodulari* (TUM) e qual è l’utilità dello studio di tali matrici nel contesto della PLI.

**3.** Svilupparei seguenti punti:(i)descrivere il problema della “pianificazione dei progetti”; (ii) formulare il problema in termini di programmazione lineare (intera); (iii) risolvere mediante il metodo PERT la seguente istanza del problema della “pianificazione dei progetti”:

le attività sono A1, A2, A3, A4, A5;

le rispettive durate sono: 3, 2, 7, 4, 5;

le relazioni di precedenza sono: A1 < A3, A1 < A4, A2 < A3, A2 < A4, A3 < A5.

**IV appello – Ricerca operativa** 4.09.2017

 29.09.2017

**1.** Spiegare cosa si intende per:

a) problema di Programmazione Lineare (PL);

b) problema *duale* di un problema di PL;

c) *interpretazione economica della dualità.*

**2.** Formulare in termini di programmazione lineare (intera) il seguente problema.

Un Professionista deve attivare dei Servizi per il suo ufficio. I Servizi da attivare sono:

(1) fibra per navigare in internet;

(2) carta SIM speciale (cioè con prestazioni speciali);

(3) carta SIM normale (cioè con prestazioni normali);

(4) traffico telefonico illimitato per chiamate nazionali;

(5) traffico telefonico illimitato per chiamate internazionali.

A tal fine riesce a individuare dei Pacchetti (da acquistare presso i gestori di telefonia) ognuno dei quali attiva solo alcuni Servizi. I pacchetti individuati sono:

Pacchetto 1: attiva i Servizi (1), (2), (3), (4)

Pacchetto 2: attiva i Servizi (1), (3), (4), (5)

Pacchetto 3: attiva i Servizi (4), (5)

Pacchetto 4: attiva i Servizi (1), (2), (4), (5)

In particolare ogni Pacchetto *i* (per  *=* 1, …, 4) ha un costo mensile pari a *Ci*.

Il problema è determinare quali Pacchetti acquistare, con il vincolo di attivare tutti i Servizi, al fine di minimizzare il totale dei costi mensili.

**3.** Determinare mediante l’algoritmo di Ford-Fulkerson un flusso massimo da *s* a *t* nel seguente grafo orientato dove accanto ad ogni arco è indicata la rispettiva capacità.



**Esercitazione – Ricerca operativa** 30 Novembre 2017

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare (intera) il seguente problema:

Un’Agenzia Turistica che gestisce l’affitto di baite riceve (riguardo il prossimo Capodanno) alcune *richieste*, siano 1, 2, 3, 4, 5, per certe *località*, siano A, B, C, avendo a disposizione un certo numero di baite per ognuna di tali località. In dettaglio:

:: le richieste sono: Richiesta 1: una baita, con preferenza di località A o B; Richiesta 2: una baita, con preferenza di località B; Richiesta 3: una baita, con preferenza di località A o B; Richiesta 4: una baita, con preferenza di località B o C; Richiesta 5: una baita, con preferenza di località A o C.

:: per le località A, B, C, l’Agenzia ha a disposizione un numero di baite pari rispettivamente a 2, 3, 2;

:: affittare una baita in per le località A, B, C, comporta per l’Agenzia un guadagno rispettivamente pari a 120, 200, 150;

:: ogni richiesta può essere abbinata a una sola baita, e ogni baita può essere abbinata ad una sola richiesta;

Il problema è gestire tali richieste [cioè abbinare ogni richiesta a una baita] in base alle preferenze, in accordo con i vincoli di sopra, al fine di massimizzare il guadagno dell’Agenzia.

**2.** Svilupparei seguenti punti:

(i)descrivere cosa si intende per problema di Programmazione Lineare Intera (*PLI*);

(ii) descrivere cosa si intende per *rilassamento continuo* di un problema di PLI;

(iii) descrivere una istanza generica del *problema dei trasporti*, in cui il bene da trasportare è dato da cisterne (cioè l’unità del bene è indivisibile), e formularla in termini di PLI;

(iv) sia *P* il problema di PLI ottenuto nel punto (iii):per risolvere *P*, è sufficiente considerare il rilassamento continuo di *P* (cioè, è possibile eliminare i vincoli di interezza in *P*) ? [motivare la risposta]

**3.** Determinare mediante l’algoritmo di Dijkstra un cammino di costo minimo da *s* a *t* nel seguente grafo orientato dove accanto ad ogni arco è indicato il rispettivo costo.

 A

**Esercitazione – Ricerca operativa** 30 Novembre 2017

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare (intera) il seguente problema:

Un’Agenzia Turistica che gestisce l’affitto di baite riceve (riguardo il prossimo Capodanno) alcune *richieste*, siano 1, 2, 3, 4, 5, per certe *località*, siano A, B, C, avendo a disposizione un certo numero di baite per ognuna di tali località. In dettaglio:

:: le richieste sono: Richiesta 1: una baita, con preferenza di località A o B; Richiesta 2: una baita, con preferenza di località B; Richiesta 3: una baita, con preferenza di località A o B; Richiesta 4: una baita, con preferenza di località B o C; Richiesta 5: una baita, con preferenza di località A o C.

:: per le località A, B, C, l’Agenzia ha a disposizione un numero di baite pari rispettivamente a 2, 3, 2;

:: affittare una baita in per le località A, B, C, comporta per l’Agenzia un guadagno rispettivamente pari a 12, 20, 15;

:: ogni richiesta può essere abbinata a una sola baita, e ogni baita può essere abbinata ad una sola richiesta;

Il problema è gestire tali richieste [cioè abbinare ogni richiesta a una baita] in base alle preferenze, in accordo con i vincoli di sopra, al fine di massimizzare il guadagno dell’Agenzia.

**2.** Svilupparei seguenti punti:

(i)descrivere cosa si intende per problema di Programmazione Lineare Intera (*PLI*);

(ii) descrivere cosa si intende per *rilassamento continuo* di un problema di PLI;

(iii) descrivere una istanza generica del *problema dei trasporti*, in cui il bene da trasportare è dato da cisterne (cioè l’unità del bene è indivisibile), e formularla in termini di PLI;

(iv) sia *P* il problema di PLI ottenuto nel punto (iii):per risolvere *P*, è sufficiente considerare il rilassamento continuo di *P* (cioè, è possibile eliminare i vincoli di interezza in *P*) ? [motivare la risposta]

**3.** Determinare mediante l’algoritmo di Dijkstra un cammino di costo minimo da *s* a *t* nel seguente grafo orientato dove accanto ad ogni arco è indicato il rispettivo costo.

 B

**I appello – Ricerca operativa** 08.01.2018

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare (intera) il seguente problema.

Due Soci che si stanno per separare vorrebbero dividersi tutti i beni [solidi] della loro Società, possibilmente in modo più equo possibile, così da impiegare i contanti il meno possibile in questa divisione.

Sia *B* = {1, ..., *n*} l'insieme di tali beni. Allora i Soci fanno stimare tutti tali beni, così che ad ogni bene *i* ∈ *B* è associato un valore *vi* , cioè il valore del bene *i*.

Il problema è determinare una bi-partizione dell'insieme *B* in due sottoinsiemi siano *B*1 e *B*2 , con *B*1 ∩ *B*2 = ∅ e *B*1 ∪ *B*2 = *B*, dove *B*1 e *B*2 sono i sottoinsiemi di *B* che spetteranno ai due Soci rispettivamente, in modo più equo possibile, cioè in modo da minimizzare la differenza [in valore assoluto] fra la somma dei valori dei beni in *B*1 e la somma dei valori dei beni in *B*2.

**2.** Sviluppare i seguenti punti:

2a) definire cosa si intende per problema di Programmazione Lineare (PL);

2b) descrivere una situazione reale/verosimile che può essere modellata in termini di problema di PL, e poi descrivere tale modello.

2c) dato un problema di PL (ad esempio in forma canonica), sia *P*, definire cosa si intende per *problema duale* di *P*, sia *D*;

2d) con riferimento al punto (2c), spiegare che relazione c’è fra il valore della soluzione ottima del problema *P* e il valore della soluzione ottima del problema *D* nel caso in cui tali soluzioni ottime esistano, cioè spiegare se tali valori sono fra loro uno maggiore dell'altro oppure sono uguali [motivando la risposta con risultati teorici].

**3.** Sviluppare i seguenti punti: (i) descrivere il problema del “cammino di costo minimo”; (ii) costruire una istanza qualsiasi del problema, in modo che il grafo corrispondente abbia almeno cinque nodi e sette archi; (iii) per tale istanza, risolvere il problema [all'ottimo] mediante l'algoritmo di Dijkstra.

**II appello – Ricerca operativa** 12.01.2018

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare (intera) il seguente problema.

Una Ditta che produce sigarette (per comodità diciamo di un solo tipo) ha due Manifatture dalle quali rifornisce tutti i Centri di smistamento. In dettaglio:

:: l'insieme delle Manifatture è *M =* {1, 2}, l'insieme dei Centri è *D =* {1, 2, ..., *m*};

:: ogni Manifattura *i*, per *i* ∈ {1, 2}, ha in giacenza *di* Kg. di sigarette;

:: ogni Centro *j* , per *j* ∈ {1, …, *m*}, richiede [in questo mese] *rj* Kg. di sigarette;

:: il costo per il trasporto di 1 Kg. dalla Manifattura *i* (per *i* ∈ {1, 2}) al Centro *j* (per *j* ∈ {1, …, *m*}) è stimato pari a *cij* ; inoltre il trasporto [di una qualsiasi quantità non nulla di sigarette] dalla Manifattura 1 al Centro *j* (per *j* ∈ {1, …, *m*}) comporta un costo fisso pari a *K* (per diversi motivi, ad esempio la Manifattura 1 sta all'estero e ci sono dei dazi).

Il problema è pianificare i trasporti dalle Manifatture ai Centri, in accordo con le disponibilità e le richieste, in modo da minimizzare il costo totale.

**2.** Sviluppare i seguenti punti: (i) descrivere il problema della “pianificazione dei progetti”; (ii) formulare il problema in termini di programmazione lineare; (iii) risolvere mediante il metodo PERT la seguente istanza del problema:

le attività sono A1, A2, A3, A4, A5;

le rispettive durate sono: 7, 8, 5, 4, 3;

le relazioni di precedenza sono: A1 < A3, A1 < A4, A2 < A3, A3 < A5, A4 < A5.

**3.** Mediante il metodo di Wagner-Whitin, risolvere il seguente problema.

Un bene deve essere prodotto su un orizzonte temporale composto da 4 periodi. Per ogni periodo *t* = 1,…,4, siano *xt* e *st* le variabili che indicano rispettivamente la quantità prodotta all’inizio del periodo *t* e la giacenza alla fine del periodo *t*. In particolare, all’inizio del periodo 1 non ci sono giacenze in magazzino, e non si vuole che ce ne siano alla fine del periodo 4. Per ogni periodo *t* = 1,…,4: la funzione costo di produzione è: *Ct* = *ctxt* ; la funzione costo di stoccaggio è: *Ht* = *htxt*. Per ogni periodo *t* = 1,…,4, sia *dt* la stima delle vendite da effettuare (cioè della domanda da soddisfare) nel periodo *t*.

In tabella sono riportati i dati relativi a quanto sopra.

Periodo Domanda *c* *h*

1 80 7 1

2 70 5 2

3 40 4 3

4 40 3

Problema: determinare le variabili *xt* e *st* (per ogni *t*) in modo da minimizzare i costi totali e da soddisfare tutte le domande al momento in cui vengono effettuate (cioè, *st* > 0).

**III appello – Ricerca operativa** 05.02.2018

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare (intera) il seguente problema.

Una persona vuole andare per via aerea da Pescara (aeroporto) a Brasilia (aeroporto). Dato che non c’è un volo diretto, la persona per il suo scopo studia alcune rotte aeree, che prevedono scali intermedi. Per semplicità assumiamo che tali rotte siano rappresentate tramite il grafo sottostante dove:

*s* = Pescara; *a* = Milano; *b* = Barcellona; *c* = Lisbona; *d* = San Paolo; *t* = Brasilia,

gli archi (orientati) fra coppie di nodi rappresentano l’esistenza di un volo fra i due nodi,

i numeri associati agli archi rappresentano rispettivamente i costi dei voli corrispondenti.

Il problema è determinare una rotta di costo minimo fra Pescara e Brasilia (dove il costo di una rotta è dato dalla somma dei costi dei voli che la compongono) cioè determinare un cammino di costo minimo da *s* a *t* nel grafo sottostante.



**2.** Svilupparei seguenti punti:

(i)descrivere cosa si intende per problema di Programmazione Lineare Intera (*PLI*);

(ii) descrive brevemente il metodo del *branch and bound* per risolvere un problema di PLI;

(iii) sia *Z* un problema di PLI in cui la funzione obiettivo è da minimizzare e sia *z* il valore della soluzione ottima di *Z*; sia *Z’* il problema di PL ottenuto da *Z* eliminando i vincoli di interezza e sia *z’* il valore della soluzione ottima di *Z’*; che relazione c’è fra *z* e *z’* ? [cioè quale fra *z* < *z’* e *z* > *z’* è vera; motivare la risposta].

**3.** Svilupparei seguenti punti:(i)descrivere il problema della “pianificazione dei progetti”; (ii) risolvere mediante il metodo PERT la seguente istanza del problema della “pianificazione dei progetti”:

le attività sono A1, A2, A3, A4, A5;

le rispettive durate sono: 4, 1, 3, 9, 3;

le relazioni di precedenza sono: A1 < A4, A1 < A5, A2 < A3, A2 < A4, A3 < A5.

**IV appello – Ricerca operativa** 25.05.2018

 15.06.2018

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare (intera) il seguente problema.

L’Unione Europea (UE) ha a disposizione dei budget per diversi settori da assegnare (per tali settori) ai paesi della UE. In dettaglio:

:: esiste un insieme *S* = {1, 2, …, *|S|*} di *settori* [ad esempio, agricoltura, turismo, ecc.]: per ogni settore *i* ∈ {1, 2, …, |*S*|}laUE ha a disposizione un budget di *si* Euro;

:: esiste un insieme *P* = {1, 2, …, *|P|*} di *paesi* della UE [ad esempio, Albania, Austria, ecc.]: la UE ha deciso tramite certi indicatori che, per ogni paese *j* ∈ {1, 2, …, |*P*|},la somma degli Euro assegnati in totale [cioè per tutti i settori] al paese *j* deve essere compresa fra certi valori *mj* (minimo) e *Mj* (massino);

:: per ogni coppia (*i*, *j*) ∈ *S* × *P* [cioè per ogni coppia settore/paese] è stato calcolato un coefficiente di utilità *uij* che stima l’utilità di assegnare 1 Euro per il settore *i* al paese *j*;

:: per ogni coppia (*i*, *j*) ∈ *S* × *P* [cioè per ogni coppia settore/paese], la UE, nel caso assegnasse degli Euro per il settore *i* al paese *j*, allora ne deve assegnare almeno *Lij* (cioè, se la UE assegna Euro *xij* > 0 per il settore *i* al paese *j*, allora *xij* > *Lij*) per motivi di spese fisse minime.

Il problema è decidere le quantità di Euro da assegnare per il settore *j* al paese *i*, per ogni coppia (*i*, *j*) ∈ *S* × *P*, con i vincoli sopra indicati, in modo da massimizzare il totale delle utilità.

**2.** Svilupparei seguenti punti:(i)descrivere cosa si intende per problema di Programmazione Lineare (*PL*); (ii) descrivere brevemente una situazione verosimile (anche fra quelle studiate) che può essere modellata come un problema di PL con la funzione obiettivo da massimizzare; (iii) descrivere brevemente l’algoritmo del Simplesso per la soluzione di un problema di PL.

**3.** Determinare mediante l’algoritmo di Ford-Fulkerson un flusso massimo da *s* a *t* nel seguente grafo orientato dove accanto ad ogni arco è indicata la rispettiva capacità.



**Esercitazione - Ricerca operativa** 21.12.2018

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare (intera) il seguente problema.

Una Casa di cura deve assumere per tutto il periodo natalizio alcune persone [per coprire alcune assenze del personale dovute alle ferie], da scegliere fra un insieme *C* di candidati, per svolgere un insieme *A* di attività di tipo part-time. Tramite colloqui la Casa stabilisce che ogni candidato è abile per ogni attività.

Inoltre:

:: a ogni attività deve essere assegnato un candidato [assunto];

:: ogni candidato *i* ∈ *C*, in caso di assunzione, sarà assegnato a 1 oppure a 2 attività in *A*;

:: per ogni candidato *i* ∈ *C*, in caso di assunzione, la Casa dovrà sostenere un costo fisso *Ki* per il contratto; in particolare, il costo fisso per tale contratto di assunzione sarà unico, indipendentemente dal fatto che il candidato sia assegnato a 1 oppure a 2 attività in *A*;

:: per ogni candidato *i* ∈ *C* e per ogni attività *j* ∈ *A*, se il candidato *i* [assunto] è assegnato all’attività *j*, allora la Casa dovrà sostenere un costo *cij* per lo stipendio e per i contributi (tali costi possono dipendere dal candidato per diversi motivi legati al candidato, ad esempio, questioni burocratiche per la nazionalità, richiesta di vitto e alloggio, grado di specializzazione, ecc.).

Il problema è scegliere quali candidati in *C* assumere [e in particolare quali attività assegnare a ognuno dei candidati assunti], con i vincoli di sopra, in modo da minimizzare il costo totale per le assunzioni, per gli stipendi e per i contributi.

**2.** Descrivere *due* situazioni reali/verosimili (anche fra quelle studiate) che possono essere modellate come un problema di “riempimento”; poi formulare tali situazioni in termini di programmazione lineare intera.

**3.** Svilupparei seguenti punti:

(i)descrivere il problema della “pianificazione dei progetti”;

(ii) formulare il problema in termini di programmazione lineare;

(iii) definire una qualsiasi istanza del problema, con 5 attività, ognuna con durata non nulla, e con 5 relazioni di precedenza; poi risolvere tale istanza mediante il metodo PERT.

**I appello – Ricerca operativa** 07.06.2019

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare (intera) il seguente problema.

UnAlbergo in una localitàturistica deve decidere come gestire gli acquisti e le scorte della legna per la stagione invernale, che per schematizzare è composta di quattro periodi, siano 1, 2, 3, 4, i quali indicano, con approssimazione, Dicembre, Gennaio, Febbraio, Marzo. In dettaglio:

:: per ogni periodo *t* = 1,…,4: siano *xt* e *st* le variabili che indicano rispettivamente la quantità di legna acquistata all’inizio del periodo *t* e la giacenza alla fine del periodo *t*. In particolare, all’inizio del periodo 1 non ci sono giacenze in Albergo, e non si vuole che ce ne siano alla fine del periodo 4;

:: per ogni periodo *t* = 1,…,4: la funzione costo di acquisto è: *Ct* = *ctxt* ; la funzione costo di stoccaggio è: *Ht* = *htxt*; tali costi variano da periodo a periodo, sia per motivi legati al peso della legna (che varia con l’umidità), sia per motivi legati alla difficoltà dello stoccaggio (che è maggiore nei periodi più affollati);

:: per ogni periodo *t* = 1,…,4: sia *dt* la stima della quantità di legna necessaria nel periodo *t*, cioè *dt* è la “domanda” di legna nel periodo *t*.

In tabella sono riportati i dati relativi a quanto sopra:

Periodo Domanda *ct* *ht*

1 100 7 3

2 80 5 2

3 70 5 1

4 40 4

Problema: determinare le variabili *xt* [e quindi le variabili *st*] per ogni periodo *t* = 1,…,4, in modo da minimizzare i costi totali e da soddisfare tutte le domande al momento in cui vengono effettuate.

**2.** Risolvere il problema dell’Esercizio 1 [che è un problema di “programmazione della produzione”] mediante l’Algoritmo di Wagner-Whitin.

**3.** Descrivere una situazione reale/verosimile (anche fra quelle studiate) che può essere modellate come un problema di “matching”; poi formulare tale situazione in termini di programmazione lineare intera.

**II appello – Ricerca operativa** 13.09.2019

**1.** Sviluppare i seguenti punti:

a) definire cosa si intende per problema di Programmazione Lineare Intera (PLI);

b) descrivere una situazione reale/verosimile che può essere modellata in termini di problema di PLI, con funzione obiettiva da massimizzare, e poi descrivere tale modello.

**2.** Sviluppare i seguenti punti: (i) descrivere il problema della “localizzazione di impianti”; (ii) formulare tale problema in termini di Programmazione Lineare Intera; (iii) descrivere brevemente come funziona l’algoritmo greedy per determinare una soluzione ammissibile di tale problema.

**3.** Determinare mediante l’algoritmo di Ford-Fulkerson un flusso massimo da *s* a *t* nel seguente grafo orientato dove accanto ad ogni arco è indicata la rispettiva capacità.



**Esercitazione – Ricerca operativa** 10.01.2020

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare il seguente problema sia *P* [cfr. L. De Giovanni e L. Brentegani <https://www.math.unipd.it/~luigi/courses/ricop/m01.modPL.01.modelli.pdf>)].

Un Coltivatore ha a disposizione:

:: 7 ettari di terreno dove coltivare due prodotti, siano A e B;

:: 20 kg di semi di A; 10 Kg di semi di B;

:: 140 metri cubi (mc) di fertilizzante.

Si stima che *per un ettaro* (in un anno):

:: coltivare A: richieda 2 Kg. di semi di A e 20 mc di fertilizzante, con profitto di 2000 Euro;

:: coltivare B: richieda 3 Kg. di semi di A e 15 mc di fertilizzante, con profitto di 2500 Euro.

Il problema è stabilire quanto terreno destinare (in un anno) alla coltivazione di A e di B rispettivamente, in modo da massimizzare il profitto totale, tenendo conto dei dati di sopra.

**2.** Svilupparei seguenti punti:

(i) formulare il problema duale, sia *D*, del problema *P*;

(ii) spiegare che relazione c’è fra il valore della soluzione ottima del problema *P* [che è un numero finito] e il valore della soluzione ottima del problema *D*;

(iii) supponiamo che il Coltivatore abbia già risolto all’ottimo il problema *P* e che nel frattempo abbia ricevuto una proposta di dare in affitto (per un anno) una certa quantità di terreno: che informazione può avere il Coltivatore dalla soluzione ottima del problema *D* al fine di stabilire un prezzo di affitto conveniente [rispetto al destinare tale certa quantità di terreno alla coltivazione in accordo con la soluzione ottima di *P*] ?

**3.** Descrivere brevemente un problema di ottimizzazione (in termini informali), tale che esso ammetta una formulazione in termini di programmazione lineare intera in cui è usata la tecnica della “grande M”, e introdurre poi tale formulazione.

**4.** Svilupparei seguenti punti:

(i)descrivere il problema della “pianificazione dei progetti”;

(ii) formulare tale problema in termini di programmazione lineare;

(iii) risolvere mediante il metodo PERT la seguente istanza di tale problema:

le attività sono A1, A2, A3, A4, A5;

le rispettive durate sono: 7, 4, 8, 2, 5;

le relazioni di precedenza sono: A1 < A3, A1 < A4, A2 < A3, A2 < A4, A4 < A5.

**I appello – Ricerca operativa** 31.01.2020

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare (intera) il seguente problema.

Una Multinazionale sta pianificando i trasporti di [un certo] bene da alcune Sedi ad alcuni Outlet.

In dettaglio:

:: c’è un insieme *N* di Sedi; ogni Sede *i* ∈ *N*, ha a disposizione *di* unità di bene; inoltre se la Sede *i* è una Sede attiva, cioè una Sede da cui viene trasportata una qualsiasi quantità di bene (maggiore di zero), allora la Multinazionale dovrà pagare un costo fisso pari a *Ci*;

:: c’è un insieme *M* di Outlet; ogni Outlet *j* ∈ *M* richiede *rj* unità di bene;

:: per trasportare 1 unità di bene dalla Sede *i* ∈ *N* all’ Outlet *j* ∈ *M* la Multinazionale dovrà pagare un costo pari a *cij* (per *i* ∈ *N* e *j* ∈ *M*).

Il problema è pianificare i trasporti, con i vincoli di sopra, con l’obiettivo di minimizzare il totale dei costi.

**2.** Sviluppare i seguenti punti:(i) definire cosa si intende per “problema di Programmazione Lineare (PL)”; (ii) prima descrivere una situazione verosimile (anche fra quelle studiate) che può essere formulata in termini di PL, e poi descrivere tale formulazione; (iii) descrivere brevemente i principali risultati (nel programma essi sono: due teoremi e un corollario) relativi alla geometria della PL; (iv) descrivere brevemente come funziona il “metodo del simplesso” per la soluzione di un problema di PL.

**3.** Sviluppare i seguenti punti: (i) descrivere il problema del “cammino di costo minimo”; (ii) formulare tale problema in termini di Programmazione Lineare Intera; (iii) determinare mediante l’algoritmo di Dijkstra un cammino di costo minimo da *s* a *t* nel seguente grafo orientato dove accanto ad ogni arco è indicato il rispettivo costo.



**II appello – Ricerca operativa** 05.06.2020

**1.** Formulare in termini di programmazione lineare (intera) il seguente problema.

Una Multinazionale sta pianificando i trasporti di [un certo] bene da alcune Sedi ad alcuni Outlet.

In dettaglio:

:: c’è un insieme *N* di Sedi; ogni Sede *i* ∈ *N*, ha a disposizione *di* unità di bene; inoltre se la Sede *i* sarà una Sede attiva, cioè una Sede da cui verrà trasportata una qualsiasi quantità di bene (maggiore di zero), allora la Multinazionale dovrà pagare un costo fisso pari a *Ci*;

:: c’è un insieme *M* di Outlet; ogni Outlet *j* ∈ *M* richiede *rj* unità di bene;

:: per trasportare 1 unità di bene dalla Sede *i* ∈ *N* all’ Outlet *j* ∈ *M* la Multinazionale dovrà pagare un costo pari a *cij* (per *i* ∈ *N* e *j* ∈ *M*).

Il problema è pianificare i trasporti, con i vincoli di sopra, con l’obiettivo di minimizzare il totale dei costi.

**2.** Sviluppare i seguenti punti:(i) definire cosa si intende per “problema di Programmazione Lineare (PL)”; (ii) prima descrivere una situazione verosimile (anche fra quelle studiate) che può essere formulata in termini di PL, e poi descrivere tale formulazione; (iii) descrivere brevemente i principali risultati (nel programma essi sono: due teoremi e un corollario) relativi alla geometria della PL; (iv) descrivere brevemente come funziona il “metodo del simplesso” per la soluzione di un problema di PL.

**3.** Sviluppare i seguenti punti: (i) descrivere il problema del “cammino di costo minimo”; (ii) formulare tale problema in termini di Programmazione Lineare Intera; (iii) determinare mediante l’algoritmo di Dijkstra un cammino di costo minimo da *s* a *t* nel seguente grafo orientato dove accanto ad ogni arco è indicato il rispettivo costo.

