# Esempi di modelli di programmazione lineare (intera)

Una possibile descrizione di una possibile utilità della Ricerca Operativa è lo schema:

|  |
| --- |
| problema di ottimizzazione (informale) → modello matematico (formale) → risoluzione |

che sintetizza quanto segue:

• si parte da un problema di ottimizzazione descritto in termini informali;

• poi si arriva possibilmente a un modello matematico per tale problema; tale modello matematico si ottiene grazie all’abilità e all’esperienza umana;

• infine si arriva possibilmente alla risoluzione, del modello matematico, che consiste nel calcolare una “soluzione ottima” del problema; tale risoluzione si ottiene grazie a software specifici.

In questo corso focalizzeremo principalmente il primo passaggio dello schema, cioè il passaggio dalla descrizione informale di un problema alla formalizzazione di un modello matematico, indicato come problema di Programmazione Matematica con riferimento al libro di M. Fischetti.

Un problema di *Programmazione Matematica* consiste nel calcolare

min { *f*(*x*) : *x* ∈ *X*}

dove:

*X* ⊆ *n* (*n* ∈ ) un insieme detto *insieme delle soluzioni ammissibili* e

*f* : *X* → è una funzione reale detta *funzione obiettivo*.

Nota: il “min” può essere sostituito con il “max” cambiando il segno della funzione.

Risolvere un problema di Programmazione Matematica significa calcolare una *soluzione ottima* del problema cioè una soluzione *x\** ∈ *X* tale che *f*(*x\**) < *f*(*x*) per ogni *x* ∈ *X*.

Un problema di Programmazione Matematica è detto di *Programmazione Lineare* se:

*X* è l’insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni e/o disequazioni lineari;

*f* è una funzione lineare.

Esempio:

max 12*x*1 *+* 7*x*2

3 *x*1 *+* 2 *x*2< 20

5 *x*1 *+* 3 *x*2 < 50

*x*1, *x*2 > 0

Un problema di Programmazione Matematica è detto di *Programmazione Lineare Intera* se:

*X* = *X’* ∩ *n* dove *X’* ⊆ *n* (*n* ∈ ) è l’insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni e/o disequazioni lineari;

*f* è una funzione lineare.

Esempio:

max 12*x*1 *+* 7*x*2

3 *x*1 *+* 2 *x*2< 20

5 *x*1 *+* 3 *x*2< 50

*x*1, *x*2 > 0

*x*1, *x*2 interi

In altri termini un problema di Programmazione Lineare Intera può essere visto come una variante di un problema di Programmazione Lineare attraverso l’aggiunta di “vincoli di interezza” per le variabili − oppure solo per alcune variabili nel qual caso si parla di Programmazione Lineare Intera Mista.

La Programmazione Lineare (Intera), pur costituendo un aspetto basilare/parziale della Programmazione Matematica, sembra essere utile per modellare una larga fascia di problemi di ottimizzazione di natura reale.

Allora di seguito vedremo alcuni esempi del primo passaggio dello schema, nel caso in cui il modello matematico è un problema di Programmazione Lineare (Intera).

A tal fine in genere si procede:

(i) definendo le *variabili decisionali* del problema;

(ii) definendo di conseguenza la *funzione obiettivo* e i *vincoli* (cioè le equazioni e/o disequazioni lineari e gli eventuali vincoli di interezza) del problema.

**A. Esempi base**

*I seguenti sette esempi sono introdotti come riferimento (tipo costellazioni) ricordando che il primo passaggio dello schema si ottiene grazie all’abilità e all’esperienza umana.*

**A1.** *Componendo risorse*

Una ditta produce due tipi di prodotto, A e B, componendo e lavorando opportunamente tre risorse, R, S e T. In dettaglio:

per produrre 1 unità di A servono: 2 u. di R, 3 u. di S, 1 u. di T;

per produrre 1 unità di B servono: 0 u. di R, 1 u. di S, 3 u. di T.

Il ricavo unitario dalla vendita di A e B è rispettivamente 15 e 20.

Il costo unitario delle risorse R, S e T è rispettivamente 2, 1, 3.

1a – *massimizzare ricavi, con risorse date*

Si hanno rispettivamente 100, 70, 80 unità di R, S, T. Il problema è determinare le quantità di A e B da produrre in modo da massimizzare il ricavo totale.

Variabili decisionali: *x*A, *x*B (unità rispettivamente di A e B da produrre).

Modello: max 15 *x*A + 20 *x*B

2 *x*A  < 100 (disponibilità R)

3 *x*A + 1 *x*B < 70 (disponibilità S)

1 *x*A + 3 *x*B < 80 (disponibilità T)

*x*A, *x*B > 0

*x*A, *x*B interi (eventualmente)

1b – *minimizzare costi, con produzione data*

Bisogna produrre rispettivamente 50 e 70 unità di A e B. Il problema è determinare le quantità di R, S, T da acquistare in modo da minimizzare il costo totale. Tale problema si risolve direttamente mediante moltiplicazioni (le quantità sono: 2 · 50 + 0 · 70; 3 · 50 + 1 · 70; 1 · 50 + 3 · 70), cioè ha una soluzione “forzata”, non c’è da modellare.

**A2.** *Decomponendo risorse*

Una ditta produce due tipi di prodotto, A e B, decomponendo e lavorando opportunamente tre risorse, R, S e T. In dettaglio:

da 1 unità di R si ricavano: 2 u. di A, 3 u. di B;

da 1 unità di S si ricavano: 7 u. di A, 2 u. di B;

da 1 unità di T si ricavano: 4 u. di A, 0 u. di B.

Il ricavo unitario dalla vendita di A e B è rispettivamente 30 e 25.

Il costo unitario delle risorse R, S e T è rispettivamente 20, 40, 30.

2a – *massimizzare ricavi, con risorse date*

Si hanno rispettivamente 40, 80, 50 unità di R, S, T. Il problema è determinare le quantità di A e B da produrre in modo da massimizzare il ricavo totale.

Tale problema si risolve direttamente mediante moltiplicazioni (le quantità sono: 2 · 40 + 7 · 80 + 4 · 50; 3 · 40 + 2 · 80 + 0 · 50), cioè ha una soluzione “forzata”, non c’è da modellare.

2b – *minimizzare costi, con produzione data*

Bisogna produrre rispettivamente 80 e 100 unità di A e B. Il problema è determinare le quantità di R, S, T da acquistare in modo da minimizzare il costo totale.

Variabili decisionali: *x*R, *x*S, *x*T (unità rispettivamente di R, S, T da acquistare)

Modello: min 20 *x*R + 40 *x*S + 30 *x*T

2 *x*R + 7 *x*S + 4 *x*T > 80 (produzione di A)

3 *x*R + 2 *x*S + 0 *x*T > 100 (produzione di B)

*x*R, *x*S, *x*T > 0

*x*R, *x*S, *x*T  interi (eventualmente)

**A3.** *Assegnamento*

Bisogna eseguire *n* lavori avendo a disposizione *n* macchine. In particolare: ogni macchina esegue un solo lavoro, ogni lavoro è eseguito da una sola macchina. Per eseguire il lavoro *i*, la macchina *j* richiede un costo *cij*. Il problema è assegnare a ciascuna macchina un lavoro al fine di minimizzare il costo totale.

Variabili decisionali: *xij* per *i* = 1, …, *n* e *j* = 1, …, *n*;

*xij* avrà valore 1 se il lavoro *i* è assegnato alla macchina *j*;

*xij* avrà valore 0 se il lavoro *i* non è assegnato alla macchina *j*.

Modello: min 

= 1 per *j* = 1, …, *n*

(ogni macchina esegue un solo lavoro)

= 1 per *i* = 1, …, *n*

(ogni lavoro è eseguito da una sola macchina)

*xij* > 0 per *i* = 1, …, *n* e *j* = 1, …, *n*;

*xij* < 1 per *i* = 1, …, *n* e *j* = 1, …, *n*;

*xij* intero per *i* = 1, …, *n* e *j* = 1, …, *n*.

**A4.** *Matching*

Un insieme *N* di *n* donne e un insieme *M* di *m* uomini si recano presso un’agenzia matrimoniale. Mediante interviste, si stabilisce che presumibilmente ogni donna *i* è compatibile con un certo sottoinsieme *Mi* di *M* e che di conseguenza ogni uomo *j* è compatibile con un certo sottoinsieme *Nj* di *N*. Il problema è accoppiare il maggior numero possibile di persone.

### Sia *F* l’insieme delle coppie (*i*, *j*) *compatibili*, cioè, *F =* {(*i*, *j*) : *i* ∈ *Nj* e *j* ∈ *Mi*}

Variabili decisionali: *xij* per ogni coppia (*i*, *j*) ∈ *F*.

*xij* avrà valore 1 se la donna *i* è accoppiata all’uomo *j*;

*xij* avrà valore 0 se la donna *i* non è accoppiata all’uomo *j*.

Modello: max 

< 1 per *i* = 1, …, *n*

(ogni donna è accoppiata al più a un uomo)

< 1 per *j* = 1, …, *m*

(ogni uomo è accoppiato al più a una donna)

*xij* > 0 per ogni (*i*, *j*) ∈ *F*;

*xij* < 1 per ogni (*i*, *j*) ∈ *F*;

*xij* intero per ogni (*i*, *j*) ∈ *F*.

**A5.** *Riempimento* (*Packing*)

Un’azienda ha a disposizione un budget *b* per finanziare alcuni progetti. Essa può scegliere fra *n* progetti. Ognuno di tali progetti ha un costo *ai*, per *i* = 1, …, *n*. D’altro canto ognuno di tali progetti garantisce dopo un anno un profitto *pi*, per *i* = 1, …, *n*. Non è possibile finanziare un progetto solo in parte. Il problema è scegliere quali progetti finanziare in modo da massimizzare il profitto totale dopo un anno.

Variabili decisionali: *xi* per *i* = 1, …, *n*;

*xi* avrà valore 1 se il progetto *i* è scelto;

*xi* avrà valore 0 se il progetto *i* non è scelto.

Modello: max *p*1*x*1 + *p*2*x*2 + … + *pnxn*

*a*1*x*1 + *a*2*x*2 + … + *anxn* < *b*

*xi* > 0 per *i* = 1, …, *n*;

*xi* < 1 per *i* = 1, …, *n*;

*xi* intero per *i* = 1, …, *n*.

**A6.** *Copertura* (*Covering*)

In una scuola-lingue si insegnano *m* lingue. La scuola vuole convocare degli interpreti esterni in modo che per ognuna delle lingue insegnate sia convocato almeno un interprete qualificato. E’ possibile scegliere fra un insieme *N* di *n* di interpreti, ognuno dei quali è qualificato solo per alcune lingue. In altri termini, per ogni lingua *j* sia *Nj* il sottoinsieme di *N* degli interpreti qualificati per la lingua *j*. Il problema è convocare il minor numero possibile di interpreti.

Variabili decisionali: *xi* per *i* = 1, …, *n*;

*xi* avrà valore 1 se l’interprete *i* è scelto;

*xi* avrà valore 0 se l’interprete *i* non è scelto.

Modello: min 

> 1 per *j* = 1, …, *m*

(per ogni lingua esiste almeno un interprete)

*xi* > 0 per *i* = 1, …, *n*;

*xi* < 1 per *i* = 1, …, *n*;

*xi* intero per *i* = 1, …, *n*.

**A7.** *Trasporti*

Ci sono *s* località sorgente e *t* località destinazione. Ogni località sorgente *i* ∈ {1, …, *s*} ha a disposizione *di* > 0 unità di un certo tipo di merce, e ogni destinazione *j* ∈ {1, …, *t*} richiede almeno *rj* > 0 unità della stessa merce. Per ogni coppia (*i*, *j*), per *i* ∈ {1, …, *s*} e *j* ∈ {1, …, *t*}, sono inoltre stabiliti il costo unitario di trasporto *cij* e la quantità massima trasportabile *qij*. Il problema è pianificare i trasporti in modo da minimizzare il costo totale.

Variabili decisionali: *xij* per *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

*xij* indica la quantità trasportata dalla sorgente *i* alla destinazione *j*.

Modello: min 

< *di* per *i* = 1, …, *s* (vincoli di disponibilità)

> *rj* per *j* = 1, …, *t* (vincoli di richiesta)

*xij* < *qij* per *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

(vincoli di capacità)

*xij* > 0 per *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

*xij* intero per *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*. (eventualmente)

# B. Esercizi (sugli esempi base)

*Formulare ognuno dei seguenti sette problemi in termini di programmazione lineare (intera). Ognuno di tali problemi è riconducibile a uno dei sette esempi base introdotti prima.*

**1.** Un libero professionista ha a disposizione ogni settimana 10 ore che pensa di dedicare all'allargamento della propria attività. In particolare, c'è la possibilità di prestare consulenza a cinque nuovi clienti, A, B, C, D, E. Ognuno di essi richiede una quantità di tempo lavorativo settimanale, come di seguito: *t*A = 4, *t*B = 5, *t*C = 4, *t*D = 3, *t*E = 1. Quindi comunque non potrebbe prestare consulenza per tutti loro. In base al tipo di consulenza da svolgere, ad ognuno può chiedere una parcella settimanale che comporta un ricavo come di seguito: *p*A = 70, *p*B = 30, *p*C = 70, *p*D = 40, *p*E = 30.

Il problema è scegliere i clienti a cui prestare servizio in modo da massimizzare il ricavo totale.

**2.** Una ditta decide di intraprendere 4 attività. A tale scopo, sono a disposizione 4 agenzie già operanti. Per diversi motivi, ogni agenzia può gestire al più una sola di queste attività, e ogni attività non può essere gestita da più di una agenzia. Infine, si stima a priori che assegnare ad un’agenzia *i* un’attività *j* garantisca un profitto *pij*. Il problema è assegnare ad ogni agenzia una attività in modo da massimizzare il profitto totale.

Variante: Con le ipotesi sopra indicate, si supponga che una delle agenzie debba essere chiusa per certi motivi. Il problema è scegliere quali attività intraprendere (dato che ora se ne possono intraprendere solo tre) in modo da massimizzare il profitto totale.

**3.** Una persona vuole fare una dieta. In particolare deve assumere due tipi di sostanze, cioè proteine e vitamine, che può ricavare comprando tre tipi di alimenti, cioè frutta, latte, uova. In dettaglio:

1 unità di frutta contiene: 0 u. di proteine, 7 u. di vitamine;

1 unità di latte contiene: 2 u. di proteine, 3 u. di vitamine;

1 unità di uova contiene: 5 u. di proteine, 1 u. di vitamine.

Il costo unitario della frutta, del latte e delle uova è rispettivamente di 10, 20, 10.

La dieta richiede di assumere almeno 15 unità di proteine e 25 unità di vitamine.

Il problema è determinare le quantità di frutta, latte, uova da acquistare in modo da minimizzare il costo totale.

**4.** Un’azienda vinicola desidera produrre due tipi di vino: uno da tavola, uno da dessert. Il profitto che l’azienda trae dalla produzione di una unità di vino da tavola è 3, mentre dalla produzione di una unità di vino da dessert è 7. Tale produzione necessita di una particolare combinazione di due tipi di uva: diciamo di tipo A e di tipo B rispettivamente. Per produrre 1 unità di vino da tavola, si ha bisogno di 3 unità di uva di tipo A, e di 2 unità di uva di tipo B. Per produrre 1 unità di vino da dessert, si ha bisogno di 1 unità di uva di tipo A, e di 4 unità di uva di tipo B. Infine, l’azienda ha a disposizione 1000 unità di uva di tipo A e 400 unità di uva di tipo B.

Il problema è determinare le quantità di vino da tavola e da dessert da produrre in modo da massimizzare il profitto totale.

**5.** Una ditta che tratta sale marino ha 2 depositi, siano A e B, che riforniscono 4 suoi negozi. La disponibilità di sale di ogni deposito è pari rispettivamente a *d*A = 190 e *d*B = 370 unità. La richiesta di sale da parte di ogni negozio è pari rispettivamente a *r*1 = 130, *r*2 = 140, *r*3 = 100, *r*4 = 70 unità. Il costo unitario *cij* di trasporto dal deposito *i* al negozio *j* è pari a: *c*A1 = 2, *c*A2 = 3, *c*A3 = 3, *c*A4 = 1, *c*B1 = 3, *c*B2 = 2, *c*B3 = 1, *c*B4 = 2. (Opzionale: Inoltre, per motivi logistici, il deposito A non può rifornire ogni singolo negozio con più di 100 unità, mentre il deposito B non può rifornire ogni singolo negozio con più di 150 unità). Il problema è pianificare i rifornimenti dei negozi in modo da minimizzare il costo totale.

**6.** Un’agenzia vuole aprire delle filiali in una certa regione, che ha cinque province, siano 1, 2, 3, 4, 5. Per ogni provincia *i* ∈ {1, …, 5} c’è la possibilità di aprire una filiale *Fi* nel capoluogo della provincia *i*. In base alle caratteristiche di tali eventuali filiali e del territorio, si stima che:

la eventuale filiale *F*1 servirebbe solo le province 1, 3;

la eventuale filiale *F*2 servirebbe solo le province 2, 3;

la eventuale filiale *F*3 servirebbe solo la provincia 3;

la eventuale filiale *F*4 servirebbe solo le province 2, 4;

la eventuale filiale *F*5 servirebbe solo le province 2, 3, 5.

Il problema è determinare quali filiali aprire, garantendo che ogni provincia sia servita, in modo da minimizzare il totale delle filiali aperte (cioè in modo da aprirne il meno possibile);

Variante: si assuma che aprire la filiale *Fi* comporti un costo *ci* (*i* = 1, …, 5): determinare quali filiali aprire, garantendo che ogni provincia sia servita, in modo da minimizzare il costo totale.

**7.** In un'agenzia di viaggio si presentano 5 clienti. Le offerte dell'agenzia riguardano un insieme di 3 località di villeggiatura. Ogni cliente gradirebbe recarsi in vacanza solo in un certo sottoinsieme delle località: il cliente 1 solo nella località 3; il cliente 2 solo nelle località 1, 3; il cliente 3 solo nella località 1; il cliente 4 solo nelle località 1, 3; il cliente 5 solo nelle località 1, 2. Per ogni località c’è a disposizione solo 1 posto.

Il problema è accontentare il maggior numero possibile di clienti.

Variante 1: Con le ipotesi sopra indicate, si supponga che per ogni località *j* ci siano a disposizione solo *bj* posti: nello specifico, per la località 1 ci sono 4 posti, per la località 2 ci sono 2 posti, per la località 3 di sono 2 posti. Il problema è accontentare il maggior numero possibile di clienti.

Variante 2: Con le ipotesi sopra indicate, si supponga che mandare un cliente in una località *j* renda all’agenzia un profitto *pj*: nello specifico, la località 1 rende un profitto 150, la località 2 rende un profitto 250, la località 3 rende un profitto 100. Un problema alternativo da risolvere può essere il seguente: massimizzare il profitto dell'agenzia.

**C. Cinque esempi specifici**

*Di seguito sono riportati, in termini di programmazione lineare (intera), i modelli di cinque problemi specifici che saranno ripresi nella seconda parte del programma del corso.*

**C1.** *Cammino di costo minimo*

Sia *G =* (*V*, *A*) un grafo orientato e siano *s* e *t* due vertici di *G*. Ad ogni arco (*i*, *j*) ∈ *A* è associato un costo *qij* > 0. Il costo di un cammino da *s* a *t* è dato dalla somma dei costi degli archi che formano il cammino.

Determinare un cammino da *s* a *t* di costo minimo.

## Soluzione

Variabili decisionali: *xij* per ogni arco (*i*, *j*) ∈ *A*;

*xij* avrà valore 1 se l’arco (*i*, *j*) sta nel cammino;

*xij* avrà valore 0 se l’arco (*i*, *j*) non sta nel cammino.

Modello: min 

 = 1

 = 0 per ogni vertice *i* *≠ s*, *t* di *G*

*xij* > 0 per ogni (*i*, *j*) ∈ *A*;

*xij* < 1 per ogni (*i*, *j*) ∈ *A*;

*xij* intero per ogni (*i*, *j*) ∈ *A*.

**C2.** *Pianificazione di progetti*

Un *progetto* è un insieme di *n* attività *Ai*, per *i* ∈ {1, …, *n*}, ciascuna con una durata *di* > 0 nota. Fra alcune attività sono specificate relazioni di precedenza *Ai* < *Aj* ad indicare che l’istante di completamento dell’attività *Ai* deve precedere l’istante di inizio dell’attività *Aj*.

Pianificare le attività in modo da minimizzare il tempo di completamento del progetto.

**Soluzione**

Variabili decisionali: *ti*- e *ti*+ per *i* = 1, …, *n*;

*ti*- indica l’istante in cui l’attività *Ai* ha inizio;

*ti*+ indica l’istante in cui l’attività *Ai* ha termine;

si introduce anche una variabile ausiliaria *y* che avrà valore *y* = max{*ti*+: *i* = 1, …, *n*}

Modello: min *y*

*ti*+ *> ti*- + *di* per *i* = 1, …, *n*;

*ti*+ *< tj*- per ogni relazione di precedenza *Ai* < *Aj*

*ti*- *>* 0 per *i* = 1, …, *n*;

*ti*+ *< y* per *i* = 1, …, *n*.

**C3.** *Massimo flusso*

Sia *G =* (*V*, *A*) un grafo orientato e siano *s* e *t* due vertici di *G*. Ad ogni arco (*i*, *j*) ∈ *A* è associata una capacità *bij* > 0. Un flusso da *s* a *t* è un’assegnazione di valori *xij* > 0 per ogni arco (*i*, *j*) ∈ *A* tale che:  = 0 per ogni vertice *i* *≠ s*, *t* di *G* (cioè per ogni vertice *i* *≠ s*, *t* di *G*, la somma di ciò che entra è pari alla somma di ciò che esce); e *xij <* *bij* per ogni arco (*i*, *j*) ∈ *A*. Il valore di un flusso da *s* a *t* è .

Determinare un flusso da *s* a *t* di valore massimo.

**Soluzione**

Variabili decisionali: *xij* per ogni arco (*i*, *j*) ∈ *A*;

*xij* indica l’assegnazione di flusso per l’arco (*i*, *j*).

Modello: max 

= 0 per ogni vertice *i* *≠ s*, *t* di *G*

*xij* < *bij* per ogni (*i*, *j*) ∈ *A*;

*xij* > 0 per ogni (*i*, *j*) ∈ *A*;

*xij* intero per ogni (*i*, *j*) ∈ *A*. (eventualmente)

**C4.** *Programmazione della produzione*

Un’azienda deve produrre un bene per soddisfare un piano di vendita di 4 mesi che stabilisce le vendite da effettuare alla fine di ogni mese (di una certa quantità di bene). La capacità produttiva varia da mese a mese, così come il costo unitario di produzione e il costo unitario di giacenza alla fine di ogni mese nel magazzino di cui l’azienda può servirsi. Non ci sono giacenze in magazzino all’inizio, né si desidera averne alla fine dei 4 mesi.

Mese vendite da effettuare capacità prod. costo prod. costo giacenza

1 20 unità 40 unità 34 2

2 30 unità 50 unità 36 3

3 50 unità 30 unità 32 2

4 40 unità 50 unità 38

Determinare le quantità di bene da produrre in ogni mese in modo da minimizzare il costo totale.

**Soluzione**

Variabili decisionali: *xi* per *i* = 1, 2, 3, 4;

*xi* indica la quantità di prodotto da produrre nel mese *i*.

Modello: min 34*x*1 + 36*x*2 + 32*x*3 + 38*x*4 + 2(*x*1 - 20) + 3(*x*1 + *x*2 - 50) +

+ 2(*x*1 + *x*2 + *x*3 - 100)

*x*1 *<* 40

*x*2 *<* 50

*x*3 *<* 30

*x*4 *<* 50

*x*1 *>* 20

*x*1+ *x*2 *>* 50

*x*1+ *x*2 + *x*3 *>* 100

*x*1+ *x*2 + *x*3 *+ x*4 *=* 140

*xi* > 0 per *i* = 1, 2, 3, 4;

*xi* intero per *i* = 1, 2, 3, 4. (eventualmente)

**C5.** *Localizzazione di impianti*

Bisogna attivare un certo numero di impianti, da scegliere fra *m* potenziali impianti, che dovranno rifornire *n* clienti. Attivare il potenziale impianto *j* costa *fj*. Ogni impianto si intende abbia capacità di rifornimento illimitata. Ogni cliente sarà collegato ad un unico impianto; in particolare collegare un cliente *i* ad un impianto *j* comporta un costo *cij*.

Scegliere quali impianti attivare in modo da minimizzare i costi complessivi di attivazione e di collegamento ai clienti.

**Soluzione**

Variabili decisionali: *xij* per *i* = 1, …, *n*, e *j* = 1, …, *m*; *yj* per *j* = 1, …, *m*;

*xij* avrà valore 1 se il cliente *i* è collegato all’impianto *j*;

*xij* avrà valore 0 se il cliente *i* non è collegato all’impianto *j*;

*yj* avrà valore 1 se l’impianto *j* è attivato;

*yj* avrà valore 0 se l’impianto *j* non è attivato.

Modello: min 

= 1 per *i* *=* 1, …, *n*;

(ogni cliente è collegato ad un unico impianto)

*xij* < *yj* per *i* = 1, …, *n*, e *j* = 1, …, *m*;

(ogni impianto si attiva se c’è almeno un cliente collegato)

*xij* > 0 per *i* = 1, …, *n*, e *j* = 1, …, *m*;

*xij* < 1 per *i* = 1, …, *n*, e *j* = 1, …, *m*;

*xij* intero per *i* = 1, …, *n*, e *j* = 1, …, *m*;

*yj* > 0 per *j* = 1, …, *m*;

*yj* < 1 per *j* = 1, …, *m*;

*yj* intero per *j* = 1, …, *m*.

**D. Esempi “con la grande M”**

**D1.** *Prima variante a “problema dei trasporti”:* ***costi fissi****.*

Nel problema dei trasporti la funzione costo per il trasporto di merce da sorgente *i* a deposito *j* è *cijxij*. Si consideri la variante in cui tale funzione sia *Fij* + *cijxij* dove *Fij* > 0 rappresenta un costo fisso (un costo di avviamento), tale che *Fij* > 0 se *xij* > 0 (cioè se il trasporto fra *i* e *j* avviene) e *Fij* = 0 se *xij* = 0 (cioè se il trasporto fra *i* e *j* non avviene).

#### Soluzione

Si introducono nuove variabili decisionali: *yij* per *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

*yij* avrà valore 1 se si trasporta merce da sorgente *i* a destinazione *j* (cioè se *xij* > 0)

*yij* avrà valore 0 se non si trasporta merce da sorgente *i* a destinazione *j* (cioè se *xij* = 0)

Modello: min +  [variazione in funzione obiettivo]

< *di* per *i* = 1, …, *s*  (vincoli di disponibilità)

> *rj* per *j* = 1, …, *t* (vincoli di richiesta)

*xij* > 0 per *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

*xij* intero per *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*. (eventualmente)

[aggiunta di vincoli]

*xij* < *M* *yij* per *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

*yij* > 0 per *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

*yij* < 1 per *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

*yij* intero per *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*.

Commento sul vincolo *xij* < *M* *yij* :

*M* è un numero molto grande (più grande di ogni possibile termine della formulazione);

se *xij >* 0, allora *xij* < *M* *yij* implica *yij* = 1(quindi il costo fisso nella f. obiettivo è attivato);

se *xij =* 0, allora *xij* < *M* *yij* è sempre soddisfatto, non crea problemi (si osservi che essendo il termine *Fij* positivo, la f. obiettivo determinerà *yij =* 0).

**D2.** *Seconda variante a “problema dei trasporti”:* ***lotti minimi****.*

Nel problema dei trasporti ogni quantità effettivamente trasportata *xij* (cioè per cui *xij* > 0) non è vincolata ad assumere almeno un certo valore. Si consideri la variante in cui ogni quantità effettivamente trasportata *xij* (cioè per cui *xij* > 0), debba essere maggiore o uguale a un valore *Lij*, che rappresenta il lotto minimo da trasportare in caso di effettivo trasporto.

#### Soluzione

Si introducono nuove variabili decisionali: *yij* per *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

*yij* avrà valore 1 se si trasporta merce da sorgente *i* a destinazione *j* (cioè se *xij* > 0)

*yij* avrà valore 0 se non si trasporta merce da sorgente *i* a destinazione *j* (cioè se *xij* = 0)

Modello: min 

< *di* per *i* = 1, …, *s* (vincoli di disponibilità)

> *rj* per *j* = 1, …, *t* (vincoli di richiesta)

*xij* > 0 per *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

*xij* intero per *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*. (eventualmente)

[aggiunta di vincoli]

*xij* < *M* *yij* per *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

*xij* > *Lij* *yij* per *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

*yij* > 0 per *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

*yij* < 1 per *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*;

*yij* intero per *i* = 1, …, *s* e *j* = 1, …, *t*.

Commento sui vincoli *xij* < *M* *yij*  e *xij* > *Lij* *yij* :

*M* è un numero molto grande (più grande di ogni possibile termine della formulazione);

se *xij >* 0, allora *xij* < *M* *yij* implica *yij* = 1 e di conseguenza *xij* > *Lij* *yij* diventa *xij* > *Lij*;

se *xij =* 0, allora nessun problema è creato (si osservi che 0 > *Lij* *yij* implica *yij* = 0, mentre 0 < *M* *yij* è sempre soddisfatto).

**D3.** *Schedulazione su un processore (con deadlines e release times):* ***vincoli disgiuntivi****.*

Bisogna far eseguire *n* lavori ad un processore, che ne può eseguire uno alla volta.

Ogni lavoro *i*, per *i* ∈ {1, …, *n*}, è caratterizzato da:

*pi* = tempo di processamento;

*ri* = istante prima del quale il lavoro *i* non può iniziare (*release time*);

*di* = istante entro il quale il lavoro *i* deve essere completato (*deadline*).

Problema: assegnare al processore una sequenza dei lavori, rispettando i release times e i deadlines, in modo da minimizzare la somma degli istanti di completamento delle lavorazioni.

#### Soluzione

Variabili decisionali: *Ci* per *i =* 1, …, *n*; *xij* per *i* = 1, …, *n* e *j* = 1, …, *n* (≠ *i*);

*Ci* = istante di completamento del lavoro *i*;

*xij* avrà valore 1 se il lavoro *i* è eseguito prima del lavoro *j*

*xij* avrà valore 0 se il lavoro *i* non è eseguito prima del lavoro *j*

min 

*Ci* > *ri* + *pi* per *i* = 1, …, *n*

*Ci* < *di* per *i* = 1, …, *n*

*Ci* < *Cj* – *pj + M* (1 – *xij*) per *i* = 1, …, *n* e *j* = 1, …, *n* (≠ *i*)

*Cj* < *Ci* – *pi + M xij* per *i* = 1, …, *n* e *j* = 1, …, *n* (≠ *i*)

*xij* > 0 per *i* = 1, …, *n* e *j* = 1, …, *n* (≠ *i*)

*xij* < 1 per *i* = 1, …, *n* e *j* = 1, …, *n* (≠ *i*)

*xij* interoper *i* = 1, …, *n* e *j* = 1, …, *n* (≠ *i*)

Commento sui due vincoli *Ci* < *Cj* – *pj + M* (1 – *xij*) e *Cj* < *Ci* – *pi + M xij* :

*M* è un numero molto grande (più grande di ogni possibile termine della formulazione);

se *xij =* 1 (cioè *i* precede *j*), allora si ha *Ci* < *Cj* – *pj* (che è un vincolo sensato/utile per il problema)e *Cj* < *Ci* – *pi + M* (che diventa un vincolo sempre soddisfatto);

se *xij =* 0 (cioè *i* è preceduto da *j*), allora si ha *Ci* < *Cj* – *pi + M* (che diventa un vincolo sempre soddisfatto) e *Cj* < *Ci* – *pi* (che è un vincolo sensato/utile per il problema).

**E. Altri esempi**

**E1.** *Produzione su una macchina*

Una macchina M che lavora non più di 45 ore alla settimana può produrre 3 tipi di prodotto, *P*1, *P*2, *P*3. Per ciascun tipo di prodotto sono noti: il ricavo unitario, la produzione effettuata da M in 1 ora, la produzione massima effettuabile da M in una settimana (come di seguito).

ricavo unitario produzione in 1 ora produzione max settimanale

*P*1 4 50 pezzi 1000 pezzi

*P*2  12 25 pezzi 500 pezzi

*P*33 75 pezzi 1500 pezzi

Determinare le quantità di *P*1, *P*2, *P*3 da produrre in una settimana in modo da massimizzare il ricavo totale.

**E2.** *Produzione in due stabilimenti*

Una casa automobilistica dispone di 2 stabilimenti dove vengono prodotti 4 tipi di automobili. La capacità produttiva dei 2 stabilimenti è rispettivamente pari a 8000 e 12000 automobili (si intende che, riguardo la capacità produttiva, per ogni stabilimento è indifferente produrre una automobile di un certo tipo oppure di un altro), mentre la quantità da produrre per ogni tipo di automobile è rispettivamente pari a 5000, 4800, 3800, 6400 unità. Produrre nello stabilimento *i* una automobile di tipo *j* garantisce un profitto *pij*: tali valori *pij* sono riportati nella tabella di seguito.

automobili

1 2 3 4

stabilimenti 1 2 3 4 1

2 2 2 6 2

Determinare le quantità di automobili da produrre in ogni stabilimento in modo da massimizzare il profitto totale.

**E3.** *Scelta dei processi*

Una raffineria ha a disposizione due procedimenti di raffinazione. Nel procedimento A, 1 u. di greggio libico e 2 u. di greggio nigeriano producono 5 u. di benzina e 2 u. di gasolio. Nel procedimento B, 4 u. di greggio libico e 2 u. di greggio nigeriano producono 3 u. di benzina e 8 u. di gasolio. Le disponibilità di greggio sono: 100 u. di greggio libico e 150 u. di greggio nigeriano. Le vendite previste (cioè le quantità minime da produrre) sono: 200 u. di benzina e 75 u. di gasolio; i profitti unitari sono *p*B e *p*G rispettivamente. Il problema della raffineria è stabilire quante volte usare ognuno dei processi A e B in modo da massimizzare il profitto totale.

(suggerimento: definire variabili decisionali *x*1 e *x*2 che indicano rispettivamente quante volte usare ognuno dei processi A e B)

**E4.** *Pubblicità*

Un’agenzia pubblicitaria ha annunciato di essere in grado di investire in modo ottimo il denaro dei suoi clienti mediante la programmazione lineare. L’approccio consiste nell’identificare le varie “audience” che interessano al cliente quali i single, le coppie sposate ecc. Per ogni audience *i*, il cliente desidera un livello di esposizione *Ei* ( = numero di persone appartenenti all’audience *i* che vengono raggiunte). Per ogni mezzo pubblicitario *j* (periodici, radio, TV, ecc.) e per ogni audience *i* si definisce un coefficiente *aij* che indica il numero di persone appartenenti alla *i-*esima audience che vendono raggiunte quando si spende 1 Euro nel *j*-esimo mezzo pubblicitario. Assumendo che le audience siano 3 e i mezzi pubblicitari 5, in che modo l’agenzia usa la programmazione lineare?

(suggerimento: definire variabili decisionali *xj* = somma destinata al mezzo pubblicitario *j*).

**Soluzioni**

**E1.** Variabili decisionali: *xi* per *i* = 1, 2, 3;

*xi* indica la quantità di prodotto *Pi* da produrre (in una settimana).

Modello: max 4*x*1 + 12*x*2 + 3*x*3

*x*1 *<* 1000

*x*2 *<* 500

*x*3 *<* 1500

(1/50) *x*1 + (1/25) *x*2 +(1/75) *x*3 *<* 45

*xi* > 0 per *i* = 1, 2, 3;

*xi* intero per *i* = 1, 2, 3.

**E2.** Variabili decisionali: *xij* per *i* = 1, 2, e *j* = 1, 2, 3, 4;

*xij* indica la quantità prodotta nello stabilimento *i* di automobili di tipo *j*.

Modello: max 2*x*11 + 3*x*12 + 4*x*13 + 1*x*14 + 2*x*21 + 2*x*22 + 6*x*23 + 2*x*24

*x*11 + *x*12 *+ x*13 + *x*14 *<* 8000

*x*21 + *x*22 *+ x*23 + *x*24 *<* 12000

*x*11 + *x*21  *>* 5000

*x*12 + *x*22  *>* 4800

*x*13 + *x*23 *>* 3800

*x*14 + *x*24 *>* 6400

*xij* > 0 per *i* = 1, 2, e *j* = 1, 2, 3, 4;

*xij* intero per *i* = 1, 2, e *j* = 1, 2, 3, 4. (eventualmente)

**E3.** max *p*B (5*x*1 + 3*x*2) + *p*G (2*x*1 + 8*x*2)

*x*1 + 4*x*2 < 100

2*x*1 + 2*x*2 < 150

5*x*1 + 3*x*2 > 200

2*x*1 + 8*x*2 > 75

*x*1, *x*2 > 0

**E4.** min 

> *Ei* *i* = 1, …, 3

*xj* > 0 *j* = 1, …, 5

Appendice: esempi in ambito sanitario

In letteratura esistono molti articoli sulle possibili applicazioni della Ricerca Operativa allo studio di problemi in ambito sanitario; in particolare sembra che l’utilità di tali possibili applicazioni, che sembrano comunque da adattare a realtà specifiche, sia quella di fornire un supporto alle decisioni.

<http://www.choir.utwente.nl/en/orchestra/>

<http://orahs.di.unito.it/>

Di seguito riportiamo alcune possibili applicazioni che usano la Programmazione Lineare (Intera).

1. Turni in ospedale (cfr. libro M. Fischetti; inoltre per diversi aspetti cfr. [a2] e [a8])

Bisogna definire i turni degli infermieri. Ogni giorno è necessaria la presenza di un certo numero di infermieri. In particolare il turno di un infermiere dura cinque giorni consecutivi di lavoro seguiti da due giorni consecutivi di riposo. Il problema è minimizzare il numero di infermieri coinvolti.

Parametri:

:: sia *D =* {*d*1, *d*2, …, *d*7} l’insieme dei giorni della settimana;

:: per *i =* 1, …, 7,sia *ri* la richiesta stimata di infermieri per il giorno *i*;

:: i turni sono del tipo: cinque giorni lavorativi consecutivi, seguiti da due giorni di riposo.

Variabili decisionali:

*xi* per  *i =* 1, …, *n*;

*xi =* numero di infermieri che inizieranno il turno nel giorno *i*;

Modello:

min 

*x*1 + *x*2 + … + *x*5 > *r*5

*x*2 + *x*3 + … + *x*6 > *r*6

*x*3 + *x*4 + … + *x*7 > *r*7

*x*4 + *x*5 + … + *x*1 > *r*1

*x*5 + *x*6 + … + *x*2 > *r*2

*x*6 + *x*7 + … + *x*3 > *r*3

*x*7 + *x*1 + … + *x*4 > *r*4

*xi* > 0 ;

*xi* intero

2. Sala operatoria (cfr. [a9] slide 22-28; inoltre per diversi aspetti cfr. [a1] e [a6])

Nella sala operatoria di un reparto di Ortopedia devono essere eseguite delle operazioni. La durata giornaliera della disponibilità della sala operatoria è nota. Le durate delle operazioni sono note mediante dati storici. Il problema è determinare una sequenza delle operazioni da eseguire con l’obiettivo di minimizzare il numero di giorni in cui la sala operatoria è utilizzata.

Parametri:

:: sia *P =* {*p*1, *p*2, …, *pn*} l’insieme delle operazioni da effettuare;

:: per *i =* 1, …, *n*,sia *zi* la durata stimata (in ore) per l’operazione *i*;

:: sia *D =* {*d*1, *d*2, …, *dm*} l’insieme dei giorni in un orizzonte temporale di *m* giorni;

:: per  *j =* 1, …, *m*,sia *Kj* il tempo (in ore) in cui è possibile utilizzare la sala operatoria nel giorno *j*.

Variabili decisionali:

*xij* per  *i =* 1, …, *n*, e per *j =* 1, …, *m*;

*xij =* 1 se l’operazione *i* è effettuata nel giorno *j*;

*xij* = 0 altrimenti;

*yj* per *j =* 1, …, *m*;

*yj =* 1 se la sala operatoria è utilizzata nel giorno *j*;

*yj* = 0 altrimenti;

Modello:

min 

= 1 per *i* = 1, …, *n*

< *Kj* per *j* = 1, …, *m*

 < *M yj* per *i* = 1, …, *n*  (dove *M* è uno scalare molto grande)

*xij* ∈ {0, 1} per *i* = 1, …, *n* e per *j* = 1, …, *m*

*yj* ∈ {0, 1} per *j* = 1, …, *m*

3. Allocazione di pazienti in reparti (per diversi aspetti cfr. [a8] )

Il problema è allocare il maggior numero possibile di persone, fra quelle che chiedono di essere ricoverate in reparti, tenendo conto che ogni reparto ha a disposizione solo un certo numero di posti e che ogni persona puòessere ricoverata solo in certi reparti.

Parametri:

:: sia *P =* {*p*1, *p*2, …, *pn*} l’insieme delle persone che deve essere ricoverata in ospedale;

:: sia *R =* {*r*1, *r*2, …, *rm*} l’insieme dei reparti dell’ospedale;

:: per *j =* 1, …, *m*,sia *dj* la disponibilità di posti nel reparto *j*;

:: sia *F =* {(*i*, *j*): la persona *i* può essere ricoverata nel reparto *j*}

(cioè *F* è l’insieme delle coppie persona/reparto compatibili, considerando il fatto che ogni persona può essere ricoverata solo in alcuni reparti, per diversi motivi ad esempio per evitare un contagio);

Variabili decisionali:

*xij* per ogni (*i*, *j*) ∈ *F*;

*xij* = 1 se la persona *i* è assegnata al reparto *j*;

*xij* = 0 se la persona *i* non è assegnata al reparto *j*.

Modello: max 

< 1 per ogni *i* = 1, …, *n*

< *dj* per ogni *j* = 1, …, *m*

*xij* ∈ {0, 1} per ogni (*i*, *j*) ∈ *F*;

4. Localizzazione di CUP o di Guardie Mediche (cfr. libro M. Fischetti)

Il problema è stabilire in quali quartieri di una grande città istallare dei CUP, con il vincolo che ogni utente possa raggiungere un CUP in un tempo non superiore a un tempo fissato, con l’obiettivo di istallarne il minor numero possibile.

Lo stesso problema può essere posto con riferimento a comuni di una regione invece che a quartieri di una grande città e con riferimento alle Guardie Mediche invece che ai CUP.

Parametri:

:: sia *Q =* {*q*1, *q*2, …, *qn*} l’insieme dei quartieri di una grande città;

:: per ogni coppia (*i*, *j*), con *i*, *j =* 1, …, *n*, sia *tij* il tempo medio che occorre per andare dal quartiere *i* al quartiere *j*;

:: sia *T* il tempo massimo tollerato;

:: per *i =* 1, …, *n*, sia *Ri* = {*j* ∈ *Q*: *tij* < *T*}, cioè *Ri* è l’insieme dei quartieri raggiungibili dal quartiere *i* in un tempo < *T*.

Variabili decisionali:

*xi* per *i =* 1, …, *n*;

*xi* = 1 se nel quartiere *i* è istallato un CUP;

*xi* = 0 altrimenti.

Modello:

min 

> 1 per *i* = 1, …, *n*

*xi* ∈ {0, 1} per *i* = 1, …, *n*

5. Acquisto di macchinari

Il problema è acquistare nuovi macchinari ospedalieri, con un budget fissato, con l’obiettivo di massimizzare l’utilità dei macchinari acquistati (dove l’*utilità* di un macchinario può essere intesa come il numero delle persone che, secondo una stima, beneficeranno di quel macchinario in un certo orizzonte temporale).

*Esempio*

Parametri:

:: sia *M =* {*m*1, *m*2, …, *mp*} l’insieme dei macchinari eventualmente da acquistare;

:: sia *b* il budget a disposizione per tali acquisti;

:: per *i =* 1, …, *p*: sia *ci* il *costo* del macchinario *i*, e sia *ui* l’*utiltà* del macchinario *i* (intesa come il numero delle persone che, secondo una stima, beneficeranno di quel macchinario in un certo orizzonte temporale).

Variabili decisionali:

*xi* per *i =* 1, …, *n*;

*xi* = 1 se il macchinario *i* è acquistato;

*xi* = 0 altrimenti.

Modello:

max 

< *b* per *i* = 1, …, *n*

*xi* ∈ {0, 1} per *i* = 1, …, *n*

6. Ridefinizione della rete ospedaliera (tagli di risorse)

Il problema è ridefinire i reparti della rete ospedaliera di un Regione a seguito di tagli di risorse.

Per semplicità, fissiamo un solo tipo di reparto, ad esempio il tipo di reparto di Ortopedia.

Parametri:

:: *R* = {*R*1, …, *Rn*} = insieme dei reparti di Ortopedia della Regione, cioè per *i* = 1, …, *n*;

:: *D* = {*D*1, …, *Dm*} = insieme di distretti [indicativi] in cui è divisa la Regione;

:: *ri* = numero massimo di pazienti che si stima sia possibile ricoverare nel reparto *Ri* (per *i* = 1, …, *n*) in un certo orizzonte temporale;

:: *dj* = numero di pazienti (attesi) che si stima siano da ricoverare in uno fra i reparti in *R* dal distretto *Dj* (per *j* = 1, …, *m*) in un certo orizzonte temporale;

:: *Ci* = “costo fisso” = costo stimato per la sola apertura del reparto *Ri* (per *i* = 1, …, *n*) in un certo orizzonte temporale;

:: *cij* = “costo marginale” = costo stimato per ricoverare nel reparto *Ri* (per *i* = 1, …, *n*) un paziente del distretto *Dj* (per *j* = 1, …, *m*) [tale costo può essere ad esempio inteso come *ci* + *qij*dove: *ci* è il costo stimato sostenuto dalla Regione per ricoverare nel reparto *Ri* un generico paziente, e *qij* è il costo stimato sostenuto dal paziente del distretto *Dj*per essere ricoverato nel reparto *Ri*]

Problema: individuare quali reparti eventualmente chiudere fra *R*1, …, *Rn* nel contesto di una gestione dei ricoveri che garantisca a ogni paziente (atteso) il ricovero presso uno fra i reparti in *R* e che minimizzi la somma dei “costi fissi” e dei “costi marginali”.

Variabili decisionali:

*xij* per ogni *i* = 1, …, *n* e *j* = 1, …, *m*

*yi* per *i* = 1, …, *n*

dove:

*xij* = numero di pazienti (attesi) ricoverati nel reparto *Ri* (per *i* = 1, …, *n*) dal distretto *Dj* (per *j* = 1, …, *m*)

*yi* = 1 se il reparto *Ri* è da non chiudere

*yi* = 0 se il reparto *Ri* è da chiudere

Modello:

min  + 

> *di* per *i* = 1, …, *n*

< *rj* per *j* = 1, …, *m*

 < *M* *yi* per *i* = 1, …, *n* (dove *M* è uno scalare molto grande)

*xij* > 0 per *i* = 1, …, *n* e per *j* = 1, …, *m*

*yi* ∈ {0, 1} per *i* = 1, …, *n*

7. Altro

Alcune altre possibili applicazioni sono le seguenti:

:: Gestione della risorsa sangue [a4],

:: Trattamenti di radioterapia [a3], [a5],

:: Gestione delle scorte (ad esempio di farmaci) [a10].

Ricordiamo infine che i modelli di Programmazione Lineare (Intera) sono molto adattabili a modifiche/varianti delle situazioni modellate.

**Riferimenti**

[a1] J.T. Blake, J. Donald, Mount Sinai hospital uses integer programming to allocate operating room time, *Interfaces*, 32 (2002), pp. 63-73

[a2] B. Cheang, H. Li, A. Lim, and B. Rodrigues, Nurse rostering problems-a bibiographic survey, European Journal of Operational Research, **151**, 447-460 (2003).

[a3] D. Conforti, F. Guerriero, R. Guido, **Non-block scheduling with priority for radiotherapy treatments,** *European Journal of Operational Research*, 201 (1) (2010), pp. 289-296

[a4] V. De Angelis, N. Ricciardi, and G. Storchi, Optimizing blood assignment in a donation - transfusion system, *International Transactions in Operational Research*, August 2001

[a5] M. Ehrgott, R. Johnston, Optimisation of beam directions in intensity modulated radiation therapy planning, *OR Spectr* 25 (2003) 251–264

[a6] A. Guinet, S. Chaabane, Operating theatre planning, *International Journal of Production Economics*, 85 (2003), pp. 69-81

[a7] A. Mazier, X. Xie, M. Sarazin, Real-Time Patients Assignment: a Method for Improving Emergency Department Flow. In: Proceedings of the IEEE workshop on Health Care Management. Venetia (Italia), 2010

[a8]B. Satheeshkumar, S. Nareshkumar and S. Kumaraghuru, Linear programming applied to nurses shifting problems, *International journal of science and research*, 3 (2014) 171–173

[a9] [www.unive.it/persone/pesenti](http://www.unive.it/persone/pesenti)

[a10] <https://www.vkok.ee/logontrain/wp.../Riga-3-july-2014.pdf>