

Scritto del 13 giugno 2019
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

1. Sia $\{S_t\}_{t \geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes, ossia soluzione della EDS

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0,$$

con $\mu, \sigma > 0$ costanti. Si indichi con $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente.

(i) Individuare l'unica misura martingala Q e scrivere la dinamica di S_t rispetto a Q .

(ii) Determinare il prezzo $v(t, x)$ (al tempo $t \in [0, T]$ se $S_t = x$) del derivato di payoff finale $F(S_T) = S_T^2 - \log(S_T)$.

(iii) Calcolare il delta del portafoglio di coperture al tempo t se $S_t = x$, la strategia di copertura prevede vendite allo scoperto? Calcolare per quali valori di S_0 , al tempo $t = 0$, il delta è negativo.

(iv) Verificare che $v(t, x)$ risolve l'equazione di valutazione di Black & Scholes.

(v) **Facoltativo:** Applicare la formula di Ito per determinare la dinamica del processo $Y_t = S_t^2 - \log(S_t)$ rispetto alla misura Q .

2. Si consideri un mercato finanziario con due titoli rischiosi i cui prezzi $\{S_t^1\}_{t \geq 0}$ e $\{S_t^2\}_{t \geq 0}$ sono soluzioni delle equazioni differenziali stocastiche:

$$\begin{aligned} dS_t^1 &= S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^1) \quad S_0^1 > 0 \\ dS_t^2 &= S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_2 dW_t^2), \quad S_0^2 > 0. \end{aligned}$$

con $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ e $\{W_t^i\}_{t \geq 0}, i = 1, 2$, moti browniani correlati $E[W_t^1 W_t^2] = \rho t$, $\rho \in [0, 1]$. Sia $r > 0$ tasso d'interesse istantaneo privo di rischio.

(i) Mostrare che il mercato finanziario è completo. Per $\rho = 1$ il mercato rimane completo?

Suggerimento: scrivere $W_t^2 = \rho W_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} B_t$, con B_t moto browniano indipendente da W_t^1 .

(ii) Mostrare che esiste ed è unica la misura martingala Q tale che

$$\begin{aligned} dS_t^1 &= S_t^1(r dt + \sigma_1 dW_t^{1,Q}) \quad S_0^1 > 0 \\ dS_t^2 &= S_t^2(r dt + \sigma_2 dW_t^{2,Q}), \quad S_0^2 > 0 \end{aligned}$$

con $W_t^{1,Q}$ e $W_t^{2,Q}$ moti browniani correlati rispetto a Q , $E[W_t^{1,Q} W_t^{2,Q}] = \rho t$.

(iii) Calcolare il prezzo $v(t, x_1, x_2)$ di un derivato al tempo t se $S_t^1 = x_1$ e $S_t^2 = x_2$ di payoff finale $\log(S_T^1) \log(S_T^2)$:

$$v(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)} E^Q[\log(S_T^1) \log(S_T^2) | S_t^1 = x_1, S_t^2 = x_2].$$

Suggerimento: Assumere $E^Q[(W_T^{1,Q} - W_t^{1,Q})(W_T^{2,Q} - W_t^{2,Q})] = \rho(T-t)$

(iv) **Facoltativo:** Dimostrare se due moti browniani sono tali che $E[W_t^1 W_t^2] = \rho t \forall t$, allora $E[(W_T^1 - W_t^1)(W_T^2 - W_t^2)] = \rho(T-t) \forall t < T$.

3. Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente. Il valore di mercato al $t = 6$ mesi di un free-defaultable ZCB di maturità $T = 12$ mesi e valore nominale 100 euro è pari a 98 euro.

i) Sia il prezzo $p(t, T)$ al $t = 6$ mesi di un DZCB di maturità $T = 12$ mesi e di valore nominale 100 euro è pari a 88 euro. Determinare l'intensità di default λ dell'istituzione finanziaria.

ii) Determinare il prezzo $p_{RT}(t, T)$ con $t = 6$ mesi e $T = 12$ mesi di un DZCB di valore nominale 100 euro e recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta = 0,75$.

iii) Sia il prezzo al $t = 6$ mesi di un DZCB (senza recovery) emesso da un'altra istituzione finanziaria di maturità $T = 12$ mesi e di valore nominale 100 euro pari a 80 euro. Determinare lo spread tra le due istituzioni.

① $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ $S_0 > 0$

Q è una misura martingale se $S_t e^{-rt}$ è una Q-mg, ossia
 $\forall S < t \quad \mathbb{E}^Q(S_t e^{-rt} | \mathcal{F}_t) = S_t e^{-rt}$

Rispetto alla misura Q la dinamica di S_t :

$$dS_t = S_t(\pi dt + \sigma dW_t^Q)$$

da qui segue che $S_t(\pi dt + \sigma dW_t^Q) = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \Rightarrow dW_t^Q = \frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t$

Per il teorema di Girsanov esiste una sola misura equivalente Q:

$$dW_t^Q = \frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t$$

$\frac{\mu - r}{\sigma}$ è l'unico prezzo di mercato del rischio del titolo

Ciò) Per la valutazione neutrale al rischio

$$V(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[S_T^2 - \text{eq}(S_T) | S_t = x]$$

L'equazione $dS_t = S_t(\pi dt + \sigma dW_t)$ ha come unica soluzione $S_t = S_0 e^{(\pi - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$

$$\Rightarrow S_T = S_t e^{(\pi - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q)}$$

$$S_T^2 = S_t^2 e^{2(\pi - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + 2\sigma(W_T^Q - W_t^Q)}$$

$$\text{eq}(S_T) = (\pi - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q) + \text{eq} S_t$$

$$V(t, x) = e^{-r(T-t)} \int x^2 e^{2(\pi - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \mathbb{E}^Q[e^{2\sigma(W_T^Q - W_t^Q)}] \dots - (\pi - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) - \text{eq}_x x$$

$$- \sigma \mathbb{E}^Q[W_T^Q - W_t^Q] \dots$$

Essendo $W_t^Q \sim N(0, t) \Rightarrow E^Q(W_T^Q - W_t^Q) = 0$

$$E[e^{2\sigma(W_T^Q - W_t^Q)}] = E[e^{2\sigma\sqrt{T-t}N}] = e^{\frac{4\sigma^2(T-t)}{2}} = e^{2\sigma^2(T-t)}$$

$$W_T^Q - W_t^Q \sim \sqrt{T-t} N \quad \text{con } N \sim N(0, 1)$$

$$\Rightarrow v(t, x) = x^2 e^{\pi(T-t)} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} e^{2\sigma^2(T-t)} = e^{-\pi(T-t)} \left\{ \left(\pi - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + 2\sigma^2 x \right\}$$

$$v(t, x) = x^2 e^{(\pi + \sigma^2)(T-t)} - e^{-\pi(T-t)} \left\{ \left(\pi - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + 2\sigma^2 x \right\}$$

(iii) $\delta(t, x) = \frac{\partial v}{\partial x} = 2x e^{(\pi + \sigma^2)(T-t)} - \frac{e^{-\pi(T-t)}}{x}$

poiché $\delta(t, x)$ può assumere anche valori negativi, il portafoglio di copertura prevede anche posizioni allo scoperto:

$$2x e^{(\pi + \sigma^2)(T-t)} - \frac{e^{-\pi(T-t)}}{x} < 0 \quad 2x^2 e^{(\pi + \sigma^2)(T-t)} < e^{-\pi(T-t)}$$

al tempo $t=0$ si ha una posizione allo scoperto

$$S_0 < \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-(\pi + \frac{\sigma^2}{2})T} \quad \text{e} \quad \delta(0, S_0) = 2S_0 e^{(\pi + \sigma^2)T} - \frac{1}{S_0} e^{-\pi T} < 0$$

$$x^2 < \frac{1}{2} e^{-(\pi + \sigma^2)(T-t)} \quad 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-(\pi + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}$$

(iv) $\left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + \pi x \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \pi v = 0 \right.$

$$\left. v(T, x) = x^2 - 2\sigma^2 x \quad \text{vedi Riccio}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -(\pi + \sigma^2) v_1 - \left[\pi e^{-\pi(T-t)} \left(\pi - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) T + e^{-\pi(T-t)} \left(-\left(\pi - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) \right]$$

$$v_2 = e^{-\pi(T-t)} \left[\left(\pi - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + 2\sigma^2 x \right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x e^{(\pi + \sigma^2)(T-t)} - \frac{e^{-\pi(T-t)}}{x} \Rightarrow \pi x \frac{\partial v}{\partial x} = 2\pi x v_1 - \pi e^{-\pi(T-t)}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2 e^{(\pi + \sigma^2)(T-t)} + \frac{e^{-\pi(T-t)}}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \sigma^2 v_1 + \frac{1}{2} \sigma^2 e^{-\pi(T-t)}$$

$$-(\pi + \sigma^2) V_1 - \pi \cancel{V_2} + (r - \frac{\sigma^2}{2}) e^{-r(T-t)} + \sigma^2 V_1 + \frac{1}{2} \sigma^2 e^{-r(T-t)} - \pi (V_1 - V_2) =$$

$$\wedge \quad 2\pi V_1 - \pi e^{-r(T-t)}$$

$$-(r + \sigma^2) V_1 + \sigma^2 V_1 + 2\pi V_1 - r V_1 = 0$$

Verificare

$$-r V_2 + (r - \frac{\sigma^2}{2}) e^{-r(T-t)} - \pi e^{-r(T-t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 e^{-r(T-t)} + r V_2 = 0$$

Facoltativa: Formula di Itô

$$c) \quad f(x) = x^3 - e q x \quad f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2} \quad f''(x) = 6x + \frac{1}{2}$$

$$df(S_t) = \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 f''(S_t) dt + \underbrace{f'(S_t)}_{S_t(2r + \sigma dW_t^Q)} dS_t$$

$$df(S_t) = \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \left(2 + \frac{1}{S_t^2} \right) dt + \left(2S_t - \frac{1}{S_t} \right) S_t (r + \sigma dW_t^Q)$$

$$df(S_t) = (\sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2} \sigma^2) dt + 2S_t^2 (r + \sigma dW_t^Q) - (r + \sigma dW_t^Q)$$

$$df(S_t) = \left[S_t^2 (\sigma^2 + 2r) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] dt + 2S_t^2 \sigma dW_t^Q - \sigma dW_t^Q$$

$$df(S_t) = S_t^2 \left[(\sigma^2 + 2r) dt + 2\sigma dW_t^Q \right] - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t - \sigma dW_t^Q$$

②

$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1 (\mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^1) \\ dS_t^2 = S_t^2 (\mu_2 dt + \sigma_2 dW_t^2) \end{cases}$$

$$E(W_t^1 W_t^2) = \rho t$$

$$\rho \in (-1, 1)$$

$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1 (\mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^1) \\ dS_t^2 = S_t^2 (\mu_2 dt + \sigma_2 \rho dW_t^1 + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} dB_t) \end{cases}$$

B_t e W_t^1 indipendenti

matrice varianze

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2 \rho & \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}$$

Le misure martingale si trovano determinando le soluzioni del sistema

$$\underline{\sigma} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{pmatrix}$$

Se $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \neq 0$ e $\rho \neq \pm 1$ dunque $0 \leq \rho < 1$ e $\det \sigma \neq 0$ e quindi $\exists!$ la

^{unica} soluzione del sistema. Per il secondo teorema fondamentale degli Asset Pricing un mercato si dice completo (ogni derivato S^1, S^2) può essere replicato da una strategia autofinanziante) $\Leftrightarrow \exists!$ Q misura martingala.

Ne consegue che il mercato è completo, l'unica misura Q è indistinta dal vettore dei prezzi di mercato del rischio:

$$\begin{cases} \sigma_1 \theta_1 = \mu_1 - r \\ \sigma_2 \rho \theta_1 + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \theta_2 = \mu_2 - r \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \\ \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \theta_2 = \mu_2 - r - \sigma_2 \rho \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \\ \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_t^{1,Q} = W_t^1 + \theta_1 t \\ B_t^{1,Q} = B_t + \theta_2 t \end{cases}$$

e la misura Q è completamente indistinta dal teorema di Girsanov

Osserviamo che $\rho=1$ se sistema diventa

$$\begin{cases} \sigma_1 \theta_1 = \mu_1 - r \\ \sigma_2 \theta_1 = \mu_2 - r \end{cases}$$

$$\theta_1 = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1}$$

ed esiste una misura martingale

$$\text{se } \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2}$$

Se $\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \neq \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2}$ se mercato risale incompleto in quanto non esiste Q (è un mercato di perenne arbitraggio)

(ii) Per $\rho \in (0,1)$ se mercato è completo, $\exists!$ Q e rispetto a $\mathcal{W}_t^{1Q}$ e $\mathcal{W}_t^{2Q}$ la dinamica dei prezzi è data da

$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1 (r dt + \sigma_1 d\mathcal{W}_t^{1Q}) \\ dS_t^2 = S_t^2 \left(\mu_2 dt + \sigma_2 \rho (d\mathcal{W}_t^{1Q} - \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} dt) + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} [dB_t^Q - \left(\frac{1}{\sigma_1 \rho^2} \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} - \frac{\rho}{\sigma_1 \rho^2} \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \right) dt] \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow dS_t^2 = S_t^2 \left\{ r dt + \sigma_2 \rho d\mathcal{W}_t^{1Q} - \cancel{\rho \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} dt} + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} dB_t^Q + \cancel{\sigma_2 \rho \frac{\mu_2 - r}{\sigma_1} dt} \right\}$$

$$dS_t^2 = S_t^2 \left\{ r dt + \sigma_2 \underbrace{\left(\rho d\mathcal{W}_t^{1Q} + \sqrt{1 - \rho^2} dB_t^Q \right)}_{d\mathcal{W}_t^{2Q}} \right\}$$

essendo $\mathcal{W}_t^1$ e B_t indipendenti rispetto a P , $\mathcal{W}_t^{1Q}$ e B_t^Q sono indipendenti rispetto a Q e segue che $\mathcal{W}_t^{1Q}$ e $\mathcal{W}_t^{2Q}$ sono correlati e $E^Q(\mathcal{W}_t^{1Q} \mathcal{W}_t^{2Q}) = \rho t$

$$(iii) \quad \forall (t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)} E^Q [\text{Eq } S_t^1 \cdot \text{Eq } S_t^2 \mid S_t^1 = x_1, S_t^2 = x_2]$$

$$S_t^1 = S_t^1 e^{(r - \sigma_1^2/2)(T-t) + \sigma_1 (\mathcal{W}_t^{1Q} - \mathcal{W}_t^{1Q})}$$

$$S_t^2 = S_t^2 e^{(r - \sigma_2^2/2)(T-t) + \sigma_2 (\mathcal{W}_t^{2Q} - \mathcal{W}_t^{2Q})}$$

$$\text{Eq } S_t^1 = \text{Eq } S_t^1 + (r - \sigma_1^2/2)(T-t) + \sigma_1 (\mathcal{W}_t^{1Q} - \mathcal{W}_t^{1Q})$$

$$\sigma_T^2 S_T^2 = \sigma_T^2 S_t^2 + (r - \frac{\sigma_2^2}{2})(T-t) + \sigma_2 (\omega_t^{2Q} - \omega_t^{2Q})$$

$$\mathbb{E}^Q[\sigma_T^2 S_T^2 | S_t^1 = x_1, S_t^2 = x_2] = \mathbb{E}^Q[\sigma_T^2 (\sigma_T x_1 + (r - \frac{\sigma_2^2}{2})(T-t) + \sigma_1 (\omega_t^{1Q} - \omega_t^{1Q})) (\sigma_T x_2 + (r - \frac{\sigma_2^2}{2})(T-t) + \sigma_2 (\omega_t^{2Q} - \omega_t^{2Q}))]$$

$$= \sigma_T x_1 \cdot \sigma_T x_2 + \sigma_T x_1 (r - \frac{\sigma_2^2}{2})(T-t) + \sigma_T x_2 (r - \frac{\sigma_2^2}{2})(T-t) + (r - \frac{\sigma_2^2}{2})(r - \frac{\sigma_2^2}{2})(T-t)^2 +$$

$$+ (\sigma_T x_1 + (r - \frac{\sigma_2^2}{2})(T-t)) \mathbb{E}^Q[\sigma_2 (\omega_t^{2Q} - \omega_t^{2Q})] + (\sigma_T x_2 + (r - \frac{\sigma_2^2}{2})(T-t)) \mathbb{E}^Q[\sigma_1 (\omega_t^{1Q} - \omega_t^{1Q})]$$

$$+ \sigma_1 \cdot \sigma_2 \underbrace{\mathbb{E}^Q[(\omega_t^{1Q} - \omega_t^{1Q})(\omega_t^{2Q} - \omega_t^{2Q})]}_{\text{covariance}}]$$

$$v(t, x_1, x_2) = \sigma_T x_1 \cdot \sigma_T x_2 + \sigma_T x_1 (r - \frac{\sigma_2^2}{2})(T-t) + \sigma_T x_2 (r - \frac{\sigma_2^2}{2})(T-t) + (r - \frac{\sigma_2^2}{2})(r - \frac{\sigma_2^2}{2})(T-t)^2 + \rho \sigma_1 \sigma_2 (T-t)$$

Proposição:

Observamos de $\mathbb{E}(\omega_t^1 \omega_t^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\omega_t^1 \omega_t^2 | \mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}(\omega_t^1 \mathbb{E}(\omega_t^2 | \mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}(\omega_t^1 \omega_t^2) = \rho t$

prop. de media condicional

$\omega_t^1, \omega_t^2 \in \text{uma mg}$

$$\mathbb{E}((\omega_t^1 - \omega_t^1)(\omega_t^2 - \omega_t^2)) = \underbrace{\mathbb{E}(\omega_t^1 \omega_t^2)}_{\rho t} + \underbrace{\mathbb{E}(\omega_t^1 \omega_t^2)}_{\rho t} - \underbrace{\mathbb{E}(\omega_t^1 \omega_t^2)}_{\rho t} - \underbrace{\mathbb{E}(\omega_t^1 \omega_t^2)}_{\rho t} = \rho(T-t)$$

$$\textcircled{3} \quad \tau \sim \exp(\lambda) \quad P_0(t, T) = 100 e^{-r \frac{T-t}{2}} = 98 \text{ €}$$

$$T-t = 6 \text{ mesi} = 100 e^{-r(T-t)} e^{-\lambda(T-t)}$$

$$(ii) \quad P_t(t, T) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q [100 \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} | \tau > t] = e^{-r(T-t)} 100 \underbrace{Q(\tau > T | \tau > t)}$$

$$P(t, T) = 100 e^{-r(T-t)} e^{-\lambda(T-t)} = P_0(t, T) e^{-\lambda(T-t)}$$

$$\frac{P(t, T)}{P_0(t, T)} = e^{-\lambda(T-t)} \quad \lambda = -\frac{1}{T-t} \log\left(\frac{P(t, T)}{P_0(t, T)}\right) = -\frac{1}{T-t} \log\left(\frac{98}{98}\right) = 0.2153$$

$$(iii) \quad P_{RT}(t, T) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q [100 \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + \underbrace{100(1-\delta)}_{0.75} \mathbb{1}_{\{\tau < T\}} | \tau > t]$$

$$= 100 e^{-r(T-t)} e^{-\lambda(T-t)} + 75 e^{-r(T-t)} \cdot \underbrace{Q(\tau < T | \tau > t)}_{1 - Q(\tau > T | \tau > t)} = 1 - e^{-\lambda(T-t)}$$

$$= 75 e^{-r(T-t)} + (100 - 75) e^{-r(T-t)} e^{-\lambda(T-t)}$$

$$P_{RT}(t, T) = 75 e^{-r(T-t)} + 25 e^{-(r+\lambda)(T-t)}$$

$$\text{poiché } P_0(t, T) = 100 e^{-r(T-t)} = 98 \Rightarrow e^{-r(T-t)} = \frac{98}{100}$$

$$\text{quindi } P(t, T) = 100 e^{-(r+\lambda)(T-t)} = 88 \Rightarrow e^{-(r+\lambda)(T-t)} = \frac{88}{100}$$

$$P_{RT}(t, T) = 75 \cdot \frac{98}{100} + 25 \cdot \frac{88}{100} = 95.5 \text{ €}$$

ciii) lo spread tra le due istituzioni è rappresentato dalla differenza dei loro rendimenti (geometrici)

$$P_1(t, T) = P_0 e^{(\lambda_1^T - \lambda_1)(T-t)} = 88$$

$$P_2(t, T) = P_0(t, T) e^{-\lambda_2(T-t)} = 80$$

$$\frac{P_1(t, T)}{P_2(t, T)} = \frac{e^{-\lambda_1(T-t)}}{e^{-\lambda_2(T-t)}} = e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)(T-t)}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = - \frac{1}{T-t} \ln \left(\frac{P_1(t, T)}{P_2(t, T)} \right) = - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{88}{80} \right) = -0.19$$

$$\Rightarrow \lambda_2 - \lambda_1 = 0.19 = 19\% \text{ spread}$$

Questo significa che l'intensità di default dopo secondo istituzione è pari a $0.19 + 0.2153 = 0.4$