## Modello strutturale di Merton (1974)

[ primo modello semplificato per il rischio di credito e per la valutazione di titoli sensibili al default

si basa sul presupposto che per una società l'insolvenza si manifesta quando il valore delle attività risulta inferiore al valore delle passività.

Rischio di insolvenza di un emittente di uno ZCB che rappresenta tutto il capitale di debito dell'impresa.

Si suppone che il valore dell'attività della società $\{V_t\}_{t\geq 0}$ (valore di mercato dell'attivo della società) segua un moto browniano geometrico della forma:

$$dV_t = V_t(\mu_V dt + \sigma_V dW_t) \qquad \mu_V \in \mathbb{R},\ \sigma_V > 0$$

$\mu_V$ rendimento atteso ~~delle azioni~~ della società dell'attivo

$\sigma_V$ volatilità

$B$ = valore nominale del debito alla maturità

Nel modello di Merton il default può avvenire solo alla maturità $T$

[ sono stati sviluppati anche modelli in cui il default possa avvenire anche ad un tempo precedente:

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : V_t \leq B\}\ )$$
]

al tempo $T$:

1) se $V_T > B$ il valore della società > valore delle passività  $S_t$ = equity

in questo caso il detentore dello ZCB riceve $B$  $B_t$ = debt

e gli azionisti $V_T - B = S_T$ (valore residuo)

2) se $V_T \leq B$ la società non può assolvere alle sue obbligazioni

in questo caso si ha il default: gli azionisti né pagano né ricevono nulla $S_T = 0$

e il debito $B_T = V_T$

$$\Rightarrow \quad S_T = \max(V_T - B, 0) = (V_T - B)_+ \quad \rightarrow \text{payoff di una call}$$

$$B_T = \min(V_T, B) = \begin{cases} V_T & \text{se } V_T \le B \\ B & \text{se } V_T > B \end{cases} = B - \underbrace{(B - V_T)_+}_{\text{payoff di una put}}$$

In questo modello la probabilità di default può essere calcolata:

$$P(V_T \le B) = P\left(V_0 e^{(\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T + \sigma_V W_T} \le B\right) = P\left((\mu_V - \tfrac{1}{2}\sigma_V^2)T + \sigma_V W_T \le \ln\left(\frac{B}{V_0}\right)\right) =$$

$$W_T \sim \sqrt{T} N \qquad N \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$= P\left(N \le \frac{\ln(B/V_0) - (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sqrt{T}\,\sigma_V}\right)$$

• Valutazione ~~[illegible]~~ dell'"equity" e del "debt" della società

Se abbiamo un derivato di payoff finale $h(V_T)$ come l'equity $S_t$ o il debt $B_t$ il suo valore/prezzo di non arbitraggio si può calcolare con la misura neutrale al rischio $Q$:
$$dV_t = V_t(r\,dt + \sigma_V\, dW_t)$$

$$\Rightarrow \quad f(t, V_t) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^Q\left(h(V_T) \mid \mathcal{F}_t\right)$$

Valutazione dell' "equity"

$$\Rightarrow \quad S_t = C_{BS}(t, V_t; r, \sigma_V, B, T) = V_t\, \Phi(d_1) - B e^{-r(T-t)}\, \Phi(d_2)$$

formula di B&S per la call

$$d_1 = \frac{\ln(V_T/B) + (r + \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t)}{\sigma_V \sqrt{T-t}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Valutazione del "debt" (ossia dello ZCB emesso dalla società)

$$B_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{Q}\left( B - (B-V)_+ \mid \mathcal{F}_t \right) = e^{-r(T-t)}B - \underbrace{P_{BS}(t, V_t; r, \sigma_V, B, T)}_{B e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - V_t\Phi(-d_1)}$$

$$\Rightarrow \quad B_t = V_t\Phi(-d_1) + B e^{-r(T-t)}\big(\underbrace{1 - \Phi(-d_2)}_{\Phi(d_2)}\big)$$

$$B_t = V_t\Phi(-d_1) + B e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

Osserviamo che $S_t = V_t - B_t$. [ $B_t$ si poteva ricavare anche così: $B_t = V_t - S_t$ ]

- Calcoliamo la volatilità dell'equity $S_t$

$$S_t = C_{BS}(t, V_t) \qquad \text{applichiamo Itô} \qquad dV_t = V_t(\mu_V\, dt + \sigma_V\, dW_t)$$

$$dS_t = \left\{ \frac{\partial C_{BS}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_V^2 V_t^2 \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial x^2} \right\} dt + \frac{\partial C_{BS}}{\partial x}\, dV_t \Rightarrow$$

$$dS_t = \left\{ \frac{\partial C_{BS}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_V^2 V_t^2 \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial x^2} + \frac{\partial C_{BS}}{\partial x} V_t \mu_V \right\} dt + \frac{\partial C_{BS}}{\partial x}\sigma_V V_t \, dW_t = S_t(\mu_S\, dt + \sigma_S\, dW_t)$$

$$\text{ove} \quad \sigma_S(t, V_t) = \sigma_V \frac{V_t}{S_t}\frac{\partial C_{BS}}{\partial x} = \sigma_V \frac{V_t \frac{\partial C_{BS}}{\partial x}}{C_{BS}} \longrightarrow \text{elasticity delle call}$$

$$\frac{V_t \frac{\partial C_{BS}}{\partial x}}{C_{BS}} = \frac{V_t\Phi(d_1)}{V_t\Phi(d_1) - B e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_S(t, V_t) \geq \sigma_V$$

volatilità dell'equity è maggiore della volatilità dell'attivo della società

- **Probabilità di default rispetto a P e a Q:**

$$p = \mathbb{P}(V_T \leq B) = \Phi\left(\frac{\ln(B/V_0) - (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sqrt{T}\,\sigma_V}\right)$$

$$q = \mathbb{Q}(V_T \leq B) = \Phi\left(\frac{\ln(B/V_0) - (r - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sqrt{T}\,\sigma_V}\right) = \Phi\left(\overbrace{\frac{\ln(B/V_0) - (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sqrt{T}\,\sigma_V}}^{\Phi^{-1}(p)} + \frac{\mu_V - r}{\sigma_V}\sqrt{T}\right)$$

$$q = \Phi\left(\Phi^{-1}(p) + \underbrace{\frac{\mu_V - r}{\sigma_V}}_{\text{premio dal rischio della società}}\sqrt{T}\right)$$

- **Credit spread**: misura la differenza di rendimento tra il DZCB e il ZCB privo di rischio

payoff al tempo T è $\frac{1}{B} B_T \Rightarrow P_1(t,T) = \frac{1}{B} B_t$

$P_1(t,T)$

$$P_0(t,T) = e^{-r(T-t)}$$

$$P_1(t,T) = \frac{V_t}{B}\Phi(-d_1) + \frac{B}{B}e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

$$r = -\frac{1}{T-t}\ln P_0(t,T)$$

e analogamente il rendimento del DZCB $\quad -\frac{1}{T-t}\ln P_1(t,T)$

$$\Rightarrow c(t,T) = -\frac{1}{T-t}\left(\ln P_1(t,T) - \ln P_0(t,T)\right) = -\frac{1}{T-t}\ln\frac{P_1(t,T)}{P_0(t,T)}$$

$$c(t,T) = \frac{-1}{T-t} \ln\left( \Phi(d_2) + \frac{V_t}{B\,p_0(t,T)} \Phi(-d_1) \right)$$

# Prezzaggio di Bond and CDS in Hazard rate Models

Pag. 391 [Quantitative Risk Models] McNeil - Frey - Embrecht

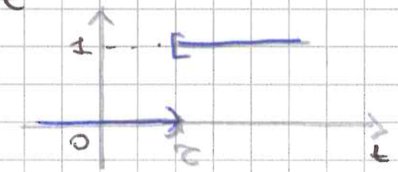
- si descrive il tempo di default tramile l'hazard function

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\qquad \tau$ v.a. $\mathcal{F}$-mis. con valori in $[0,\infty)$

$F(t) = P(\tau \le t)$ $\qquad \bar{F}(t) = 1 - P(\tau \le t) = P(\tau > t)$ prob. di sopravvivenza

assumiamo $F(0) = 0$ e $\bar{F}(t) > 0 \ \forall t$

$Y_t = \mathbb{1}_{\{\tau \le t\}}$ processo di default




traiettoria di $Y_t$

Modellizziamo $\bar{F}(t) = e^{-\int_0^t \gamma_s ds}$ $\qquad \{\gamma_t\}$ hazard rate : misura istantanea del rischio di default

infatti $P(\tau \le t + h \mid \tau > t) = \frac{P(t < \tau \le t+h)}{P(\tau > t)} = \frac{F(t+h) - F(t)}{\bar{F}(t)}$

$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} P(\tau \le t+h \mid \tau > t) = \frac{1}{\bar{F}(t)} \lim_{h \to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{F'(t)}{\bar{F}(t)} = \gamma_t$ in quanto

$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \gamma_s ds}$ $\qquad F'(t) = - e^{-\int_0^t \gamma_s ds} \frac{d}{dt}\left(-\int_0^t \gamma_s ds\right) = \gamma_t e^{-\int_0^t \gamma_s ds} = \gamma_t \bar{F}(t)$

Nel caso in cui $\gamma_t = \lambda$ costante $\qquad \tau \sim \exp(\lambda)$ $\qquad P(\tau > t) = e^{-\lambda t} = \bar{F}(t)$

assumiamo che l'informazione disponibile sia quella fornita dal processo $\{Y_t\}$, ossia gli investitori ~~osservano~~ ~~ad~~ ogni istante se il default avviene o no.

$$\mathcal{H}_t = \sigma\{Y_u \,;\, u \le t\}$$

$(Y_t = 0) = (\tau > t)$ non è avvenuto il default al tempo $t$

$(Y_t = 1) = (\tau \le t)$ il default è avvenuto prima o al tempo $t$

**Lemma 10.5**

Ogni v.c. $H$ $\mathcal{H}_t$-misurabile è della forma $H = h(\tau)\mathbb{1}_{(\tau \le t)} + c\,\mathbb{1}_{(\tau > t)}$

Dim.

$\mathcal{H}_t$ è generata da $Y_u$, $u \le t$ e quindi dagli eventi $\{Y_u = 1\} = \{\tau \le u\}$ $u \le t$

e da $\{Y_t = 0\} = \{\tau > t\}$

$$\mathcal{H}_t = \sigma\{\mathbb{1}_{\{\tau > t\}},\ \min(\tau, t)\}$$

$\tau\mathbb{1}_{(\tau \le t)} + t\mathbb{1}_{(\tau > t)}$

$\exists\, g : [0,t] \to \{0,1\}$

$$\Rightarrow \quad H = g(\tau \wedge t, \mathbb{1}_{(\tau > t)}) = h(\tau)\mathbb{1}_{(\tau \le t)} + c\,\mathbb{1}_{(\tau > t)}$$

se definiamo $h(u) = g(u, 0)$ $u \le t$ e $c = g(t, 1)$

**Lemma 10.6**

$$\mathbb{E}(X\,\mathbb{1}_{(\tau > t)} \mid \mathcal{H}_t) = \mathbb{1}_{(\tau > t)} \frac{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(\tau > t)} X)}{P(\tau > t)}$$

Dim. $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{(\tau>t)} | \mathcal{H}_t)$ è una v.a. $\mathcal{H}_t$-misurabile

e se $\tau \leq t$ vale zero $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{(\tau>t)} | \mathcal{H}_t) \mathbb{1}_{(\tau\leq t)} = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{(\tau\leq t)} \mathbb{1}_{(\tau>t)}) = 0$

$\Rightarrow \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{(\tau>t)} | \mathcal{H}_t) = \mathbb{1}_{(\tau>t)} \mathbb{E}(X | \mathcal{H}_t) = \mathbb{1}_{(\tau>t)} \cdot c$

$\Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{(\tau>t)} | \mathcal{H}_t)) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{(\tau>t)}) = c\, P(\tau>t) \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{(\tau>t)})}{P(\tau>t)}$

$\Rightarrow \quad c \cdot \mathbb{1}_{(\tau>t)} = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{(\tau>t)} | \mathcal{H}_t] \mathbb{1}_{(\tau>t)} = \mathbb{1}_{(\tau>t)} \frac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{(\tau>t)})}{P(\tau>t)}$ ◻

In particolare $P(\tau>T | \mathcal{H}_t) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(\tau>T)} \mathbb{1}_{(\tau>t)} | \mathcal{H}_t] = \mathbb{1}_{(\tau>t)} \frac{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(\tau>t)} \mathbb{1}_{(\tau>T)})}{P(\tau>t)}$

$= \mathbb{1}_{(\tau>t)} \frac{P(\tau>T)}{P(\tau>t)} = \mathbb{1}_{(\tau>t)} \frac{e^{-\int_0^T \gamma_s ds}}{e^{-\int_0^t \gamma_s ds}} = \mathbb{1}_{(\tau>t)} e^{-\int_t^T \gamma_s ds}$

$$\Rightarrow \boxed{P(\tau>T | \mathcal{H}_t) = \mathbb{1}_{(\tau>t)} e^{-\int_t^T \gamma_s ds}} \quad (*)$$

Proposizione* $\quad M_t = Y_t - \int_0^t \gamma_s \mathbb{1}_{\{\tau>s\}} ds$ è una $\{\mathcal{H}_t\}$-mg

dim. Dobbiamo mostrare che $\mathbb{E}(M_t - M_s | \mathcal{H}_s) = 0 \quad \forall t \geq s$

ossia che $\mathbb{E}(Y_t - Y_s | \mathcal{H}_s) = \mathbb{E}(\int_s^t \gamma_u \mathbb{1}_{\{\tau>u\}} du | \mathcal{H}_s)$

$$Y_t - Y_s = \mathbb{1}_{(\tau \le t)} - \mathbb{1}_{(\tau \le s)} = \mathbb{1}_{(s < \tau \le t)} = \mathbb{1}_{(\tau > s)} \mathbb{1}_{(\tau \le t)}$$

$$\mathbb{E}(Y_t - Y_s \mid \cancel{\mathcal{X}_s}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(\tau>s)} \mathbb{1}_{(\tau \le t)} \mid \mathcal{X}_s) = \mathbb{1}_{(\tau>s)} \underbrace{P(\tau \le t \mid \mathcal{X}_s)}_{1 - \mathbb{1}_{(\tau>s)} e^{-\int_s^t \gamma_u du}}$$

$$= \mathbb{1}_{(\tau>s)} \left(1 - e^{-\int_s^t \gamma_u du}\right)$$

Ora osserviamo che $\mathbb{E}\left(\int_s^t \gamma_u \mathbb{1}_{\{\tau>u\}} du \mid \mathcal{X}_s\right) = \int_s^t \gamma_u \underbrace{P(\tau > u \mid \mathcal{X}_s)}_{\mathbb{1}_{(\tau>s)} e^{-\int_s^u \gamma_r dr}} du$

$$= \mathbb{1}_{(\tau>s)} \int_s^t \underbrace{\gamma_u e^{-\int_s^u \gamma_r dr}}_{-\frac{d}{du}\left(e^{-\int_s^u \gamma_r dr}\right)} du =$$

$$= -\mathbb{1}_{(\tau>s)} \left( e^{-\int_s^u \gamma_r dr} \right)\Big|_s^t = -\mathbb{1}_{(\tau>s)} \left( e^{-\int_s^t \gamma_r dr} - 1 \right)$$

$\square$

- Supponiamo di essere in uno spazio di probabilità con $\mathbb{Q}$ misura neutrale al rischio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$

Assumiamo che $\tau$ sia una v.a. a valori in $(0,+\infty)$ con hazard rate $\gamma^{\mathbb{Q}}(t)$

e sia $\mathcal{H}_t = \sigma\{Y_u ;\ u \leq t\}$ ove $Y_t = \mathbb{1}_{(\tau \leq t)}$

Un DZCB (defaultable zero coupon bond) paga 1 unità alla maturità T se non c'è stato default, ossia se $\tau > T$. Secondo la valutazione neutrale al rischio il prezzo è:

$$P_1(t,T) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left( \mathbb{1}_{(\tau > T)} \mid \mathcal{H}_t \right) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{per la formula } (*) \text{ di p. 8}}}{=} \mathbb{1}_{(\tau > t)}\, e^{-\int_t^T (r + \gamma_s^{\mathbb{Q}})\, ds}$$

Remark
Supponiamo $\exists\, \mathbb{Q}$: $P_1(t,T)\, e^{-rt}$ $\mathbb{Q}$-mg
$$\Downarrow$$
$$P_1(t,T)\, e^{-rt} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{(\tau > T)}\, e^{-rT} \mid \ldots]$$

osserviamo che $P_1(T,T) = \mathbb{1}_{\{\tau > T\}}$

mentre il prezzo di uno ZCB (default-free)

$$P_0(t,T) = e^{-r(T-t)} = e^{-\int_t^T r\, ds}$$

$\Rightarrow$ $P_1(t,T)$ può essere visto come il prezzo di un default-free ZCB con un tasso d'interesse modificato pari a $R_t = r + \gamma_t^{\mathbb{Q}} > r$

OSSERVAZIONE:

$$P_1(t,T) = \mathbb{1}_{(\tau > t)}\, P_0(t,T)\, e^{-\int_t^T \gamma_s^{\mathbb{Q}}\, ds} \qquad \frac{P_1(t,T)}{P_0(t,T)} = \mathbb{1}_{(\tau > t)}\, e^{-\int_t^T \gamma_s^{\mathbb{Q}}\, ds}$$

Se $\gamma_s^{\mathbb{Q}} = \gamma^{\mathbb{Q}}$ per $t < \tau$ dai prezzi di mercato $P_1(t,T)$ e $P_0(t,T)$ si ottengono delle stime per l'intensità di default rispetto alla misura $\mathbb{Q}$

$$-\gamma^{\mathbb{Q}}(T-t) = \log\left(\frac{P_1(t,T)}{P_0(t,T)}\right) \Rightarrow \boxed{\gamma^{\mathbb{Q}} = \frac{1}{T-t} \log\left(\frac{P_0(t,T)}{P_1(t,T)}\right) \quad \text{credit spread}}$$

- ~~Recovery of Treasury~~ (RT) (il recovery è pagato al tempo T)

il possessore del bond riceve $(1-\delta_\tau)$ unità del default free ZCB $p_0(t,T)$ at time $\tau$

con $\delta_\tau \in [0,1]$ ($\delta_\tau$ modellizza la percentuale di perdita).

~~alla maturità T il possessore riceve~~ $\boxed{\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + (1-\delta_\tau)\mathbb{1}_{(\tau \le T)}}$

$$p_{RT}(t,T) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau>T\}} + (1-\delta)\mathbb{1}_{(\tau\le T)} \mid \mathcal{H}_t\right]$$

- Recovery of Face Value (RF)

~~il possessore riceve un recovery payment~~ $\boxed{(1-\delta_\tau) \text{ al tempo di default}}$ e $\boxed{\mathbb{1}_{\{\tau>T\}} \text{ al tempo T}}$

$$p_{RF}(t,T) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{\{\tau>T\}} \mid \mathcal{H}_t] + (1-\delta)\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(\tau-t)}\mathbb{1}_{\{t<\tau\le T\}} \mid \mathcal{H}_t\right]$$

Sia $\delta_\tau = \delta$ deterministico (deterministic loss given default)

Nel caso RT : $\mathbb{1}_{\{\tau>T\}} + (1-\delta)\mathbb{1}_{(\tau\le T)}$ payoff finale

osserviamo che $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(1-\delta)\mathbb{1}_{(\tau\le T)} \mid \mathcal{H}_t] = (1-\delta) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(1-\delta)\mathbb{1}_{(\tau>T)} \mid \mathcal{H}_t]$

$\mathbb{1}_{(\tau\le T)} = 1 - \mathbb{1}_{(\tau>T)}$

$$= (1-\delta) - (1-\delta)\mathbb{Q}(\tau>T \mid \mathcal{H}_t) = (1-\delta) - (1-\delta)\mathbb{1}_{(\tau>t)}e^{-\int_t^T \gamma_s^{\mathbb{Q}}ds}$$

$$p(t,T) = e^{-r(T-t)}\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{(\tau>T)} \mid \mathcal{H}_t]}_{\mathbb{1}_{(\tau>t)}e^{-\int_t^T \gamma_s^{\mathbb{Q}}ds}} + e^{-r(T-t)}(1-\delta) - (1-\delta)\mathbb{1}_{(\tau>t)}e^{-\int_t^T (r+\gamma_s^{\mathbb{Q}})ds}$$

$$p_{RT}(t,T) = (1-\delta)e^{-r(T-t)} + \delta\, p_1(t,T)$$

$$\boxed{p_{RT}(t,T) = (1-\delta)e^{-r(T-t)} + \delta\,\mathbb{1}_{(\tau>t)}e^{-\int_t^T (r+\gamma_s^{\mathbb{Q}})ds}}$$

Prezzo DZCB con recovery of Treasury

~~Oss $p_{RT}(T,T) = 1-\delta + \delta\mathbb{1}_{(\tau>T)}$~~

Nel caso RF: è necessario calcolare $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left( (1-\delta)\, \mathbb{1}_{(t<\tau\leq T)}\, e^{-\int_t^{\tau} r\, ds} \mid \mathcal{H}_t \right)$

$(1-\delta)$ deve essere scontato dal tempo $\tau$ al tempo $t$

Lemma 10.9

$$\boxed{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left( \mathbb{1}_{(t<\tau\leq T)}\, e^{-\int_t^{\tau} r\, ds} \mid \mathcal{H}_t \right) = \mathbb{1}_{(\tau>t)} \int_t^T \gamma_s^{\mathbb{Q}}\, e^{-\int_t^s (r+\gamma_u^{\mathbb{Q}})\, du}\, ds}$$

dim.

Dal Lemma 10.6 $\quad$ Sia $X = \mathbb{1}_{(\tau\leq T)}\, e^{-\int_t^{\tau} r\, ds}$

si ha che $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left( \mathbb{1}_{(t<\tau\leq T)}\, e^{-\int_t^{\tau} r\, ds} \mid \mathcal{H}_t \right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left( \mathbb{1}_{(\tau>t)} X \mid \mathcal{H}_t \right) = \mathbb{1}_{(\tau>t)} \dfrac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left( \mathbb{1}_{(\tau>t)} X \right)}{\mathbb{Q}(\tau>t)} =$

$$= \mathbb{1}_{(\tau>t)} \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left( \mathbb{1}_{(t<\tau\leq T)}\, e^{-\int_t^{\tau} r\, ds} \right)}{e^{-\int_0^t \gamma_s^{\mathbb{Q}}\, ds}}$$

Dobbiamo calcolare la media $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(h(\tau)) = \int_0^{+\infty} h(s)\, f_\tau(s)\, ds \qquad f_\tau(s)$ densità della v.a. $\tau$

$$f_\tau(s) = \gamma_s^{\mathbb{Q}}\, e^{-\int_0^s \gamma_u^{\mathbb{Q}}\, du} = F_\tau'(s) = \frac{D}{Ds}\left( 1 - e^{-\int_0^s \gamma_u^{\mathbb{Q}}\, du} \right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left( \mathbb{1}_{(t<\tau\leq T)}\, e^{-\int_t^{\tau} r\, ds} \mid \mathcal{H}_t \right) = \mathbb{1}_{(\tau>t)}\, e^{\int_0^t \gamma_z^{\mathbb{Q}}\, dz} \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{(t<s\leq T)}\, e^{-\int_t^s r\, du} \cdot \gamma_s^{\mathbb{Q}}\, e^{-\int_0^s \gamma_u^{\mathbb{Q}}\, du} \cdot ds =$$

$$= \mathbb{1}_{(\tau>t)} \int_t^T \gamma_s^Q \, e^{-\int_t^s (r+\gamma_u^Q)du} \qquad \square$$

Otteniamo così che il prezzo di un DZCB con recovery of Face Value è dato da

$$\boxed{\begin{aligned} P_{FV}(t,T) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[\mathbb{1}_{(\tau>t)} \mid \mathcal{F}_t] + \mathbb{E}^Q[(1-\delta)\mathbb{1}_{(t<\tau\le T)} e^{-\int_t^\tau r\,ds} \mid \mathcal{F}_t] = \\ &= \mathbb{1}_{(\tau>t)} e^{-\int_t^T (r+\gamma_u^Q)du} + \mathbb{1}_{(\tau>t)}(1-\delta)\int_t^T \gamma_s^Q \, e^{-\int_t^s (r+\gamma_u^Q)du} ds \end{aligned}}$$

~~OSS:~~ $\cancel{\int_t^T \gamma_s^Q e^{-\int_t^s \gamma_u^Q du} ds = \int_t^T -\frac{d}{ds}\left(e^{-\int_t^s \gamma_u^Q du}\right) ds}$

$\cancel{= - e^{-\int_t^s \gamma_u^Q du}\Big|_t^T = - e^{-\int_t^T \gamma_u^Q du} + 1}$

~~Nel caso tasso d'interesse r costante~~

$\cancel{P_{FV}(t,T) = \mathbb{1}_{(\tau>t)} e^{-}}$

Caso hazard rate costante

OSS: $\gamma_t^Q = \gamma^Q$ costante $(\tau \sim exp(\gamma^Q))$

$$\int_t^T \gamma^Q e^{-(r+\gamma^Q)(s-t)} ds = -\frac{\gamma^Q}{r+\gamma^Q} e^{-(r+\gamma^Q)(s-t)}\Big|_t^T$$

$$= \frac{\gamma^Q}{r+\gamma^Q}\left(1 - e^{-(r+\gamma^Q)(T-t)}\right)$$

$$P_{FV}(t,T) = \mathbb{1}_{(\tau>t)}\left[P_0(t,T)e^{-\gamma^Q(T-t)} + \frac{\gamma^Q}{r+\gamma^Q}(1-\delta)\left(1 - P_0(t,T)e^{-\gamma^Q(T-t)}\right)\right]$$

$$P_{FV}(t,T) = \mathbb{1}_{(\tau>t)} P_0(t,T) e^{-\gamma^Q(T-t)}\left\{1 - \frac{(1-\delta)\gamma^Q}{r+\gamma^Q}\right\} + \frac{\gamma^Q}{r+\gamma^Q}(1-\delta)\mathbb{1}_{(\tau>t)}$$

Stima della probabilità di default rispetto alla misura neutrale al rischio a partire dal prezzo $P_{RT}(t,T)$:

$$Q(\tau \le T) = 1 - e^{-\int_0^T \gamma_s^Q ds} \qquad \Rightarrow \qquad e^{-\int_0^T \gamma_s^Q ds} = 1 - Q(\tau \le T)$$

Sappiamo che se al tempo $t$ non c'è stato default, ossia sull'evento $\{\tau > t\}$:

$$P_{RT}(t,T) = (1-\delta)\, e^{-r(T-t)} + \delta\, e^{-\int_t^T (r + \gamma_s^Q) ds} = P_0(t,T)\left[(1-\delta) + \delta\, e^{-\int_t^T \gamma_s^Q ds}\right]$$

in particolare al tempo $t=0$

$$\frac{P_{RT}(0,T)}{P_0(0,T)} = (1-\delta) + \delta\, e^{-\int_0^T \gamma_s^Q ds} = (1-\delta) + \delta(1 - Q(\tau \le T)) = 1 - \delta\, Q(\tau \le T)$$

$$\delta\, Q(\tau \le T) = 1 - \frac{P_{RT}(0,T)}{P_0(0,T)}$$

$$\boxed{Q(\tau \le T) = \frac{1}{\delta}\left[\frac{P_0(0,T) - P_{RT}(0,T)}{P_0(0,T)}\right]}$$

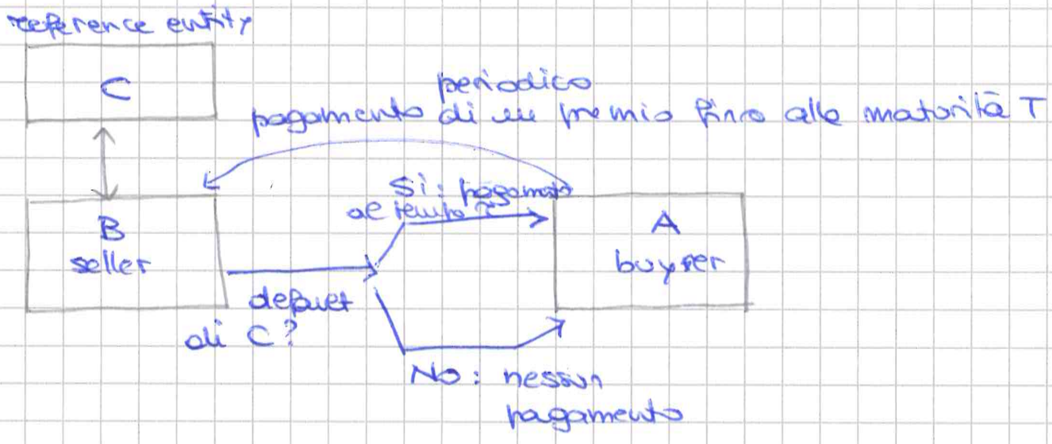
## I credit default swaps

(Over the Counter)

Sono derivati creditizi principalmente negoziati per la copertura del rischio di credito, negoziati fuori borsa.

I principali protagonisti nel mercato dei derivati creditizi sono banche, assicurazioni e istituti d'investimento. I CDS sono un contratto tra due parti: il "protection seller" (B) e il "protection buyer" (A).

I pay-offs ~~sono~~ dipendono dal default di una unità di riferimento C




$\tau$ = tempo di default della reference entity

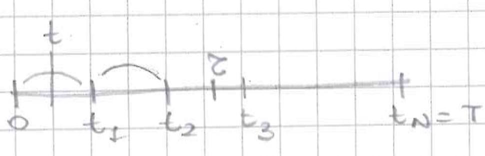
Il detentore di ~~Chi~~ un CDS acquista protezione contro le perdite in caso di fallimento dell'entità di riferimento C, di solito i detentori posseggono titoli dell'entità C.

Non è previsto un pagamento iniziale, chi acquista un CDS si assume l'obbligo di effettuare dei pagamenti periodici in cambio di una somma se avviene il default prima della maturità T.

Sono strumenti largamente utilizzati nel "risk-management". Il mercato dei CDS è molto liquido.

Sono spesso utilizzati per calibrare modelli per il pricing di portafogli di derivati creditizi più complessi.

# CDS pricing




Assumiamo il valore nozionale pari ad 1.

Il pagamento del premio avviene ai tempi $0 < t_1 < \quad < t_N = T$.

Indichiamo con $\tau$ il tempo di default dell'entità di riferimento $C$. Se $\tau > t_k$ il protection buyer paga la somma $x^*(t_k - t_{k-1})$ al tempo $t_k$, ove $x^*$ è lo "swap spread".

Se $\tau < t_N = T$ il protection buyer paga al tempo di default $\tau$ la somma $\delta$ al buyer.

Indichiamo con $\gamma^Q(t)$ l'hazard rate di $\tau$ rispetto ad una generica misura neutrale al rischio $Q$, e con $x$ lo spread.

$$V_t^{prem}(x;\gamma^Q) = \mathbb{E}^Q\Big[\sum_{k:\,t_k>t} e^{-r(t_k-t)} \underbrace{x(t_k-t_{k-1})}_{\text{pagato al tempo}} \mathbb{1}_{(t_k<\tau)} \,\Big|\, \mathcal{H}_t\Big] =$$

flusso di premi pagato da chi acquista protezione

$$= x \sum_{k:\,t_k>t} \underbrace{e^{-r(t_k-t)}}_{p_0(t,t_k)} (t_k - t_{k-1}) \underbrace{Q(\tau > t_k \mid \mathcal{H}_t)}_{\mathbb{1}_{\{\tau>t\}} e^{-\int_t^{t_k}\gamma^Q(s)ds}} = x \sum_{k:\,t_k>t} p_0(t,t_k)(t_k-t_{k-1})\, e^{-\int_t^{t_k}\gamma^Q(s)ds}\, \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}$$

Valutiamo il pagamento al default

$$V_t^{def}(\gamma^Q) = \mathbb{E}^Q\Big[e^{-r(\tau-t)}\,\delta\,\mathbb{1}_{\{t<\tau\le t_N\}} \,\Big|\, \mathcal{H}_t\Big] =$$

$\delta$ loss given default

$$= \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\,\delta \int_t^{t_N} \gamma^Q(s)\, e^{-\int_t^s (r+\gamma^Q(u))du}\, ds$$

Lo "fair CDS spread" è calcolato in modo tale che $V_t^{prem}(x_t^*;\gamma^Q) = V_t^{def}(\gamma^Q)$

$$\Rightarrow \quad x_t^* = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \frac{\delta \int_t^T \gamma^Q(s)\, e^{-\int_t^s (r+\gamma^Q(u))du}\, ds}{\sum_{k:\, t_k>t} (t_k - t_{k-1})\, e^{-\int_t^{t_k}(r+\gamma^Q(u))du}}$$

al momento dell'emissione si prende $x = x_0^*$ e questo rende il valore del CDS pari a zero, al variare del tempo il suo valore diventa diverso da zero ed è dato da

$$\boxed{P_{CDS}(t,T) = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} \left[ - \sum_{k:\, t_k>t} e^{-\int_t^{t_k}(r+\gamma^Q(u))du}\, x\,(t_k - t_{k-1}) + \delta \int_t^T \gamma^Q(s)\, e^{-\int_t^s (r+\gamma^Q(u))du}\, ds \right]}$$

Valore di mercato del CDS

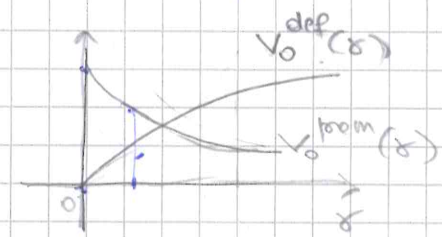
## Calibrazione

Supponiamo di conoscere gli spreads di uno o più CDS negoziati sul mercato, scritti sulla stessa entità fallimentare. Da questa informazione possiamo determinare il hazard rate $\gamma^Q$, che d'ora in avanti supponiamo costante. Questo valore viene chiamato risk-neutral hazard rate implicito.

$\bar{\gamma}^Q$ deve risolvere l'equazione: $\quad V_0^{prem}(x_0^*, \bar{\gamma}^Q) = V_0^{def}(\bar{\gamma}^Q) \quad$ per $t=0$

$$x_0^* \sum_{k=1}^{N} P_0(0,t_k)(t_k - t_{k-1})\, e^{-\bar{\gamma}^Q \cdot t_k} = \delta\, \bar{\gamma}^Q \int_0^{t_N} e^{-(r+\bar{\gamma}^Q)s}\, ds$$

$$x_0^* \sum_{k=1}^{N} (t_k - t_{k-1})\, e^{-(r+\bar{\gamma}^Q)\cdot t_k} = \delta \frac{\bar{\gamma}^Q}{r+\bar{\gamma}^Q} \left(1 - e^{-(r+\bar{\gamma}^Q)t_N}\right)$$




$\exists!\ \gamma^Q$ in quanto $V_0^{prem}$ è una funzione decrescente di $\bar{\gamma}^Q$

mentre $V_0^{def}$ è una funzione crescente di $\bar{\gamma}^Q$

$$V_0^{def}(0) = 0 < V_0^{prem}(x^*, 0) = x_0^* \sum_{k=1}^{N} (t_k - t_{k-1})\, e^{-r t_k}$$

Consideriamo la funzione $f(\gamma) = \delta \dfrac{\gamma}{r+\gamma} \left(1 - e^{-(r+\gamma)T}\right)$

$f(0) = 0 \qquad \lim_{\gamma \to +\infty} f(\gamma) = \delta \lim_{\gamma \to +\infty} \underbrace{\dfrac{1}{\frac{r}{\gamma} + 1}}_{\to 1} \left(1 - \underbrace{e^{-(r+\gamma)T}}_{\to 0}\right) = \delta$

osserviamo che $g(\gamma) = \dfrac{\gamma}{r+\gamma}$ è una funzione crescente in $\gamma$

$g'(\gamma) = \dfrac{r+\gamma-\gamma}{(r+\gamma)^2} = \dfrac{r}{(r+\gamma)^2} > 0 \qquad \left(1 - e^{-(r+\gamma)T}\right)$ è una f. crescente in $\gamma$

$\Rightarrow$ $f$ è anch'essa una f. crescente in $\gamma$ (perché prodotto di f. crescenti)

---

- Caso in cui $t_k - t_{k-1} = \Delta t$ per $N=1$ $\qquad x_0^* \cdot \Delta t \, e^{-(r+\bar{\gamma}^Q)\Delta t} = \delta \, \bar{\gamma}^Q \int_0^{\Delta t} e^{-(r+\bar{\gamma}^Q)s} \, ds$

e per $\Delta t$ piccolo $\qquad \Delta t \, e^{-(r+\bar{\gamma}^Q)\Delta t} \sim \int_0^{\Delta t} e^{-(r+\bar{\gamma}^Q)s} \, ds$

$\Rightarrow \quad x_0^* \sim \delta \cdot \bar{\gamma}^Q \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{\gamma}^Q \sim x_0^*/\delta}$ rapporto tra il "fair swap spread" e il tasso di "loss given default"

(Questa approssimazione è spesso usata in pratica)

- Inoltre se $\bar{\gamma}^Q$ è piccola $\quad e^{-\bar{\gamma}^Q} \sim 1 - \bar{\gamma}^Q$

$\Rightarrow Q(\tau \leq 1) = 1 - e^{-\bar{\gamma}^Q} \sim \bar{\gamma}^Q \sim x_0^*/\delta$ $\qquad$ questa quantità fornisce un "proxy" della probabilità di default

prob. di default entro 1 anno

(pagato ad ogni istante $u<\tau$)

Di solito si modellizzano i pagamenti del buyer tramite un running spread premium $K>0$ e si valuta il prezzo di un CDS con valutazione neutrale al rischio:

$$P_{CDS}(t,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[ -K\int_t^T e^{-r(u-t)}\mathbb{1}_{(u<\tau)}\,du + \delta\, e^{-r(\tau-t)}\mathbb{1}_{(t<\tau\le T)} \;\Big|\; \mathcal{H}_t\right]$$

Sappiamo che $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[ e^{-r(\tau-t)}\mathbb{1}_{(t<\tau\le T)} \mid \mathcal{H}_t\right] = \mathbb{1}_{(t<\tau)}\int_t^T \gamma_s^{\mathbb{Q}}\, e^{-\int_t^s (r+\gamma^{\mathbb{Q}}(u))\,du}\, ds$

ora calcoliamo

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T e^{-r(u-t)}\mathbb{1}_{(u<\tau)}\,du \;\Big|\; \mathcal{H}_t\right] = \int_t^T e^{-r(u-t)}\underbrace{\mathbb{Q}(\tau>u \mid \mathcal{H}_t)}_{e^{-\int_t^u \gamma^{\mathbb{Q}}(s)ds}\,\mathbb{1}_{(\tau>t)}}\,du = \int_t^T e^{-\int_t^u (r+\gamma^{\mathbb{Q}}(s))\,ds}\,du$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{CDS}(t,T) = \mathbb{1}_{(\tau>t)}\int_t^T \left[\delta\,\gamma^{\mathbb{Q}}(s) - K\right] e^{-\int_t^s (r+\gamma^{\mathbb{Q}}(u))\,du}\, ds}$$

Se si assume $\gamma^{\mathbb{Q}}(s) = \gamma^{\mathbb{Q}}$ costante e
se si vuole determinare $K^*$ t.c. $P_{CDS}(t,T)=0 \Rightarrow \delta\,\gamma^{\mathbb{Q}} = K^*$

Noto il "fair running spread premium" $K^*$ possiamo determinare l'hazard rate implicito

$$\bar{\gamma}^{\mathbb{Q}} = K^*/\delta$$

## Derivati creditizi

Questi si compongono dei seguenti elementi. Indichiamo con $\{\mathcal{G}_t\}$ filtrazione che rappresenta l'informazione nel mercato, tale da soddisfare che $\mathcal{H}_t \subseteq \mathcal{G}_t$.

(1) Survival claim: un pagamento futuro $X$

$X$ v.c. $\mathcal{G}_T$ - misurabile

pagamento che avviene (promised payment) alla data $T$ se $\tau > T$

(2) Risky dividend stream:

flusso di pagamenti fino al tempo di default, al tasso istantaneo $Y_t$

$Y_t$ processo $\mathcal{G}_t$ - adattato

(3) Payment-at-default claim: della forma $Z_\tau \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}$

$Z_t$ processo $\mathcal{G}_t$ - adattato

Questo pagamento avviene al tempo $\tau$ se $\tau \leq T$.

Per esempio i DZCB senza recovery prevedono una componente di tipo (1) con $X = 1$

è " con recovery of face value ~~treasury~~ " " (3) con $Z_t = 1-\delta$

e " δ ~~è~~ loss given default

I CDS hanno una componente di tipo (2): flusso di premi $Y_t = -K$ (che paga il buyer al seller)

e di tipo (3): con $Z_t = 1-\delta$ (che paga il seller al buyer)

- Defaultable options (Vulnerable options)

Consideriamo una call o una put di prezzo di esercizio $K$ e maturità $T$ su una azione "default-free" con il "writer" soggetto a default.
Se il "writer" fa default al tempo $\tau < T$, il detentore riceverà la percentuale $(1-\delta)$ del valore intrinseco dell'opzione al tempo $\tau$.

La defaultable call può essere vista come la combinazione di
1) survival claim con $X = (S_T - K)_+$

e

3) payment-at-default claim con $Z_t = (1-\delta)(S_t - K)^+$

Il payoff è dato da $(S_T - K)_+ \mathbb{1}_{(\tau > T)} + (1-\delta)(S_\tau - K)^+ \mathbb{1}_{(\tau \le T)}$

Supponiamo che il prezzo del sottostante sia descritto da un moto browniano geometrico, modello di Black & Scholes:

$$dS_t = S_t \left( r\, dt + \sigma\, dW_t^{Q} \right), \quad S_0 > 0$$

$\sigma > 0$ (volatilità)

$r$ indica il tasso d'interesse privo di rischio che assumiamo costante

Prezzo di una "vulnerable call"

$$\boxed{c_V(t) = e^{-rT}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[ (S_T-K)_+ \, \mathbb{1}_{(\tau>T)} \mid \mathcal{G}_t \right] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[ e^{-r(\tau-t)} (1-\delta)(S_\tau-K)^+ \, \mathbb{1}_{(t<\tau\le T)} \mid \mathcal{G}_t \right]}$$

dove $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}^S_t \vee \mathcal{H}_t$ (più grande $\sigma$-algebra contenente le informazioni sul prezzo $\{S_r ; r\le t\}$ e su $\{Y_r ; r \le t\}$ ove $Y_r = \mathbb{1}_{\{\tau \le r\}}$ )

- Il caso di recovery nullo; essendo $S_T$ e $\tau$ v.a. indipendenti:

$$c_1(t) = e^{-rT}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[ (S_T-K)_+ \, \mathbb{1}_{(\tau>T)} \mid \mathcal{G}_t \right] = e^{-rT}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[ (S_T-K)_+ \mid \mathcal{F}^S_t \right] \underbrace{\mathbb{Q}(\tau>T \mid \mathcal{H}_t)}_{\mathbb{1}_{(\tau>t)}\, e^{-\int_t^T \gamma^{\mathbb{Q}}(s)\,ds}}$$

$$\boxed{c_1(t) = c_{BS}(t)\, e^{-\int_t^T \gamma^{\mathbb{Q}}(s)\,ds}\, \mathbb{1}_{(\tau>t)}}$$

ove $c_{BS}(t)$ prezzo della call nel modello Black & Scholes al tempo $t$

$c_{BS}(t) = c_{BS}(t, T, K, r, \sigma, S_0)$

Osserviamo che $c_1(t) < c_{BS}(t)$ (il prezzo di una call vulnerabile è inferiore a quello di una call)

• In caso di "recovery" dobbiamo calcolare $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[ e^{-r(\tau-t)} (S_\tau - K)^+ \mathbb{1}_{(t<\tau\le T)} \mid \mathcal{G}_t \right]$

**PROP.** $$\boxed{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[ e^{-r(\tau-t)} (S_\tau - K)^+ \mathbb{1}_{(t<\tau\le T)} \mid \mathcal{G}_t \right] = \mathbb{1}_{(\tau>t)} \int_t^T \underbrace{c_{BS}(t,u,r,\sigma,S_t)}_{\text{valore della call al tempo t e maturità } u} \gamma^{\mathbb{Q}}(u)\, e^{-\int_t^u \gamma^{\mathbb{Q}}(s)\,ds}\, du}$$

**Dim.**

Semplifichiamo la dimostrazione calcolando il valore per $t=0$, ossia

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[ e^{-r\tau} (S_\tau - K)^+ \mathbb{1}_{(\tau\le T)} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[ (S_\tau-K)^+ e^{-r\tau} \mathbb{1}_{(\tau \le T)} \mid \tau \right] \right] =$$ grazie all'indipendenza tra $\{S_t\}$ e $\tau$

$$= \int_0^T \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_t-K)^+]\, e^{-rt} f_\tau(t)\, dt$$ $\qquad f_\tau(t) = \gamma^{\mathbb{Q}}(t)\, e^{-\int_0^t \gamma^{\mathbb{Q}}(u)\,du}$ densità della v.a. $\tau$

$$= \int_0^T c_{BS}(0,t,r,\sigma,S_0)\, \gamma^{\mathbb{Q}}(t)\, e^{-\int_0^t \gamma^{\mathbb{Q}}(s)\,ds}\, dt$$ $\square$

Si ottiene la seguente formula:

$$\boxed{c_r(t) = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} \left[ c_{BS}(t,T,r,\sigma,S_0)\, e^{-\int_t^T \gamma^{\mathbb{Q}}(s)\,ds} + (1-\delta) \int_t^T c_{BS}(t,u,r,\sigma,S_t)\, \gamma^{\mathbb{Q}}(u)\, e^{-\int_t^u \gamma^{\mathbb{Q}}(s)\,ds}\, du \right]}$$

Questi calcoli ci permettono anche di calcolare il Credit Value adjustment per una call; nel caso di recovery nullo $(\delta=1)$.

$$CVA_t = c_{BS}(t) - c_r(t) = c_{BS}(t) - c_{BS}(t)\, e^{-\int_t^T \gamma^{\mathbb{Q}}(s)\,ds}\, \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}$$

al tempo $t$ se $t<\tau$

$$\Rightarrow \quad CVA_t = c_{BS}(t)\left(1 - e^{-\int_t^T \gamma^{\mathbb{Q}}(s)\,ds}\right) = c_{BS}(t)\, \mathbb{Q}(\tau \le T \mid \tau > t)$$

Infatti: $\quad Q(\tau \leq T \mid \tau > t) = \dfrac{Q(t < \tau \leq T)}{Q(\tau > t)} = \dfrac{\left(1 - e^{-\int_0^T \gamma^Q(s)ds}\right) - \left(1 - e^{-\int_0^t \gamma^Q(s)ds}\right)}{e^{-\int_0^t \gamma^Q(s)ds}}$

$$\Rightarrow Q(\tau \leq T \mid \tau > t) = \frac{e^{-\int_0^t \gamma^Q(s)ds} - e^{-\int_0^T \gamma^Q(s)ds}}{e^{-\int_0^t \gamma^Q(s)ds}} = 1 - e^{-\int_t^T \gamma^Q(s)ds}$$

Nel caso di recovery, per $t=0$: $\quad CVA_0 = \overbrace{E^Q[\Pi(0,T)]}^{C_{BS}(0,T)} - \overbrace{E^Q[\Pi^{real}(0,T)]}^{C_v(0,T)}$

$$C_v(0) = C_{BS}(0,T)e^{-\int_0^T \gamma^Q(s)ds} + (1-\delta)\int_0^T C_{BS}(0,t)\,\gamma^Q(t)\,e^{-\int_0^t \gamma^Q(s)ds}$$

$$CVA_0 = C_{BS}(0,T)\left(1 - e^{-\int_0^T \gamma^Q(s)ds}\right) - (1-\delta)\int_0^T C_{BS}(0,t)\,\gamma^Q(t)\,e^{-\int_0^t \gamma^Q(s)ds}\,dt$$

[Quantitative Risk Models McNeil-Frey-Embrechts]
(cap. 17, p. 603)

## Rischio di Controparte

Una notevole proporzione di derivati sono negoziati fuori borsa (OTC) ne consegue che il rischio di controparte sia un aspetto molto importante da valutare.
Questo rischio fa riferimento alla possibilità, per esempio, che il "seller" di un CDS possa fallire prima della maturità e prima dell'entità di riferimento o per qualsiasi derivato/opzione che chi ha emesso il derivato possa fallire prima della scadenza.
Molte istituzioni applicano strategie di mitigazione attenuazione del rischio allo scopo di ridurre la loro esposizione al rischio di controparte.
In particolare, molte transazioni di derivati OTC sono "collateralizzate", ossia aggiungono come ~~un~~ vincolo uno specifico titolo (collaterale) che può essere venduto in danno del debitore se questi non esegue la propria obbligazione.
Per esempio, se il valore del CDS (per il "buyer") è positivo è previsto che il "seller" trasferisca un titolo (collaterale) al "buyer". Ne consegue che se il "seller" fallisce prima dell'entità di riferimento ed il valore del CDS al tempo $\tau_s$ (di default del seller) $V_{\tau_s}$ è positivo il "buyer" può vendere il collaterale e ridurre quindi le perdite dovute al "default" della sua controparte (il "seller"); l'eccesso tra il valore del collaterale e le perdite ritorneranno al "seller".

"Value adjustment" per un CDS non collateralizzato (non garantito)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| R | entità di riferimento | $\tau_R$ | tempo di default | $\delta^R$ | loss given default |
| S | seller | $\tau_S$ | " | $\delta^S$ | " |
| B | buyer | $\tau_B$ | " | $\delta^B$ | " |

$T_1 = \min\{\tau_R, \tau_S, \tau_B\}$ $\quad \xi$ v.a. che ci dice ~~quale~~ l'entità che ha fatto "default" per prima

$\xi \in \{R, S, B\}$

Indichiamo con $V_t$ il valore del CDS al tempo $t$ (per il "buyer")

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left( \pi(t,T) \mid \mathcal{H}_t \right)$$

$\pi(t,T)$ flusso di pagamenti (scontati) nell'intervallo $(t,T]$:

$$\pi(t,T) = - \sum_{k:\, t_k > t} e^{-r(t_k - t)} x\,(t_k - t_{k-1})\, \mathbb{1}_{\{\tau^R > t_k\}} + \delta^R e^{-r(\tau^R - t)} \mathbb{1}_{\{t < \tau^R \le T\}}$$

Se teniamo conto del possibile fallimento del "seller" avremo un flusso $\pi^{real}(t,T)$ diverso da $\pi(t,T)$.

In questo caso il CVA, "credit value adjustment" è definito da:

$$\boxed{CVA_t = \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left( \pi(t,T) \mid \mathcal{H}_t \right)}_{\substack{\text{valore del CDS}\\ \text{senza tener conto del rischio}\\ \text{di controparte}}} - \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left( \pi^{real}(t,T) \mid \mathcal{H}_t \right)}_{\substack{\text{valore del CDS}\\ \text{tenendo conto di questo rischio}}}}$$

La analisi che stiamo conducendo è "unilaterale", si parlerà di analisi "bilaterale" se teniamo conto anche del possibile fallimento del "buyer".

Assumiamo il punto di vista del "buyer":

- Se $T_1 > T$ o $T_1 \le T$ e $\zeta = R$ $\Rightarrow \pi(t,T) = \pi^{real}(t,T)$
  sia S che B non hanno fatto default

- Se $T_1 < T$ e $\zeta = S$ il "protection seller" fa default per primo e prima della maturità T

Se $V_{T_1} > 0$ B riceve da S $(1-\delta^S) V_{T_1}$

Se $V_{T_1} < 0$ B paga ad S $|V_{T_1}|$

Usiamo la notazione $\begin{cases} x^- = -\min\{x,0\} = -x \mathbb{1}_{\{x<0\}} = |x| \mathbb{1}_{\{x<0\}} \\ x_+ = \max\{x,0\}. \end{cases}$ Sull'evento $\{T_1 < T\} \cap \{\zeta = S\}$ il flusso di pagamenti è il seguente:

$$\boxed{\pi^{real}(t,T) = \pi(t,T_1) + e^{-r(T_1-t)} \Big[ (1-\delta^S) \underbrace{V^+_{T_1}}_{V_{T_1}\mathbb{1}_{\{V_{T_1}>0\}}} - \underbrace{V^-_{T_1}}_{|V_{T_1}| \mathbb{1}_{\{V_{T_1}<0\}}} \Big] \mathbb{1}_{\{T_1<T\}} \mathbb{1}_{\{\zeta}}$$

Remark

$\{\mathcal{G}_t\}$ è una filtrazione generica, che rappresenta l'informazione fino al tempo t.

Se non ci sono altri fattori stocastici che influenzano il mercato $\mathcal{G}_t = \mathcal{H}^R_t \vee \mathcal{H}^S_t \vee \mathcal{H}^B_t$

ossia $\mathcal{G}_t = \sigma\{\Upsilon^R_s, \Upsilon^S_s, \Upsilon^B_s ; s \le t\}$

PROPOSIZIONE (Calcolo del CVA)

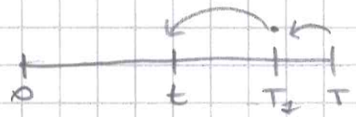
Per $t < T_1$ $\qquad \boxed{CVA_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[ \mathbb{1}_{\{T_1 \le T\}} \mathbb{1}_{\{\xi = S\}} e^{-r(T_1 - t)} \delta^S V^+_{T_1} \mid \mathcal{G}_t \right]}$

(Riflette le potenziali perdite subite da B dovute al "default" prematuro di S)

Dim.

$CVA_t := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[ \pi(t,T) - \pi^{real}(t,T) \mid \mathcal{H}_t \right]$

Osserviamo che se $T_1 \le T$



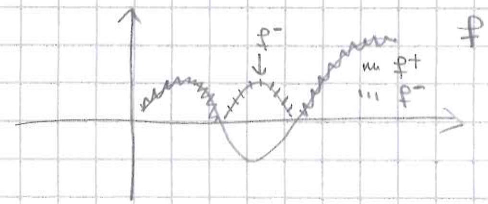

$$\pi(t,T) = \pi(t,T_1) + e^{-r(T_1 - t)} \underbrace{\pi(T_1,T)}_{\text{riportiamo i pagamenti al tempo } T_1 \text{ e poi li scontiamo da } T_1 \text{ a } t}$$

$$\pi(t,T) - \pi^{real}(t,T) = \mathbb{1}_{\{T_1 \le T\}} e^{-r(T_1 - t)} \{ \pi(T_1,T) - \mathbb{1}_{\{\xi = S\}} [ (1-\delta^S) V^+_{T_1} - V^-_{T_1} ] \}$$

Calcoliamo per $t < T_1$:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[ \pi(t,T) - \pi^{real}(t,T) \mid \mathcal{H}_{T_1} \right] = \underbrace{\mathbb{1}_{\{T_1 \le T\}} \mathbb{1}_{\{\xi = S\}} e^{-r(T_1 - t)}}_{\mathcal{G}_{T_1}\text{- misurabile}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[ \pi(T_1,T) - (1-\delta^S) V^+_{T_1} + V^-_{T_1} \mid \mathcal{G} \right.$$

Osserviamo che $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[ \pi(T_1,T) \mid \mathcal{G}_{T_1} \right] = V_{T_1}$




$V_{T_1} = V^+_{T_1} - V^-_{T_1}$

$f = f^+ - f^-$

$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[ \pi(T_1,T) - (1-\delta^S) V^+_{T_1} + V^-_{T_1} \mid \mathcal{G}_{T_1} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[ V_{T_1} - (1-\delta^S) V^+_{T_1} + V^-_{T_1} \mid \mathcal{G}_{T_1} \right] =$

$f^+ = f \, \mathbb{1}_{f > 0}$

$f^- = - f \, \mathbb{1}_{f < 0}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\delta^S V^+_{T_1} \mid \mathcal{G}_{T_1}] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\pi(t,T) - \pi^{real}(t,T) \mid \mathcal{G}_{T_1}]\, e^{-r(T_1-t)}} \cdot \mathbb{1}_{\{T_1 \le T\}} \mathbb{1}_{\{\xi = S\}}$$

$t < T$

$$CVA_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\pi(t,T) - \pi^{real}(t,T) \mid \mathcal{G}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{(t<T_1)}\{\pi(t,T) - \pi^{real}(t,T)\} \mid \mathcal{G}_t] =$$

per la proprietà della torre

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{(t<T_1)}\{\pi(t,T) - \pi^{real}(t,T)\} \mid \mathcal{G}_{T_1}] \mid \mathcal{G}_t] =$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{(t<T_1)}\, \delta^S\, \mathbb{1}_{(T_1 \le T)} \mathbb{1}_{(\xi = S)}\, e^{-r(T_1-t)}\, V^+_{T_1} \mid \mathcal{G}_t]$$

□

## Calcolo semplificato nel caso in cui $\tau^S$, $\tau^R$ e $\tau^B$ sono v.a. indipendenti.

Consideriamo il modello hazard rate

$$\mathbb{Q}(\tau^R > t) = e^{-\int_0^t \gamma^R(s)ds} \qquad \mathbb{Q}(\tau^S > t) = e^{-\int_0^t \gamma^S(u)du}$$

$\tau^R$ e $\tau^S$ indipendenti

Abbiamo visto che il valore di mercato di un CDS è dato da:

$$V_t = \mathbb{1}_{\{\tau^R > t\}}\left[-\sum_{k: t_k > t} e^{-\int_t^{t_k}(r+\gamma^R(s))ds}\, x(t_k - t_{k-1}) + \delta^R \int_t^T \gamma^R(s)\, e^{-\int_t^s (r+\gamma^{\mathbb{Q}}(u))du}\, ds\right]$$

Osserviamo che:

$$\mathbb{1}_{\{T_1 \le T\}} \mathbb{1}_{\{\xi = S\}} = \mathbb{1}_{\{\tau^S \le T\}} \mathbb{1}_{\{\tau^S < \tau^R\}}$$

$$CVA_0 = \mathbb{E}^Q\left[\delta^S \mathbb{1}_{\{\tau^S \le T\}} \mathbb{1}_{\{\tau^S < \tau^R\}} e^{-r\tau^S} V^+_{\tau^S}\right] \Rightarrow$$

Ricordiamo che $\mathbb{E}[f(X,Y)] = \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}[f(X,Y) \mid X]}_{H(X)}] =$

$$= \mathbb{E}[H(X)] = \int_{\mathbb{R}} H(x) f_X(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[f(X,Y) \mid X = x] f_X(x)\,dx$$

se $X \perp Y$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[f(x,Y)] f_X(x)\,dx$$

$$CVA_0^{ind} = \delta^S \int_0^{+\infty} \mathbb{E}^Q\left[\mathbb{1}_{\{t \le T\}} \mathbb{1}_{\{\tau^R > t\}} e^{-rt} V^+_t\right] f_{\tau^S}(t)\,dt$$

Osserviamo che $V_t = 0$ sull'evento $\tau^R \le t \Rightarrow V^+_t \mathbb{1}_{\{\tau^R > t\}} = V^+_t$

$$\boxed{CVA_0^{ind} = \delta^S \int_0^T e^{-rt}\, \mathbb{E}^Q[V^+_t]\, \gamma^S(t) e^{-\int_0^t \gamma^S(u)\,du}\,dt}$$

Se $\tau^S$ e $\tau^R$ non fossero indipendenti rimarrebbe da calcolare $\mathbb{E}^Q[V^+_t \mid \tau^S = t]$.

Infine osserviamo che

$$\mathbb{E}^Q[V^+_t] = \mathbb{E}^Q[V_t \mathbb{1}_{\{V_t > 0\}}] = \mathbb{E}^Q[\mathbb{1}_{\{\tau^R > t\}} \overbrace{v(t)}^{\text{deterministico}} \mathbb{1}_{\{v(t) > 0\}}] =$$

$$= \underbrace{Q(\tau^R > t)}_{e^{-\int_0^t \gamma^R(s)\,ds}} v(t) \mathbb{1}_{\{v(t) > 0\}}$$

$$v(t) := \delta^R \int_t^T \gamma^R(s) e^{-\int_t^s (r + \gamma^R(u))\,du}\,ds - \sum_{k: t_k > t} e^{-\int_t^{t_k} (r + \gamma^R(u))\,du} x(t_k - t$$

$$\Rightarrow CVA_0^{ind} = \delta^S \int_0^T e^{-rt} \gamma^S(t) v(t) \mathbb{1}_{\{v(t) > 0\}} e^{-\int_0^t (\gamma^S(u) + \gamma^R(u))\,du}\,dt$$

$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_t^+]$ si chiama "expected exposure"

L'ipotesi di indipendenza tra $\tau^S$ e $\tau^R$ è molto ~~...~~ irrealistico, in realtà molto spesso il default del "seller" aumenta (effetto contagio) il default dell'entità di riferimento R:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_{\tau^S}^+ \mid \tau^S = t] > \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_t^+]$$

$$\Rightarrow \quad CVA > CVA^{ind}$$

Di solito c'è una condizione di dipendenza tra $\tau^R$ e $\tau^S$ sfavorevole che rende ~~l'esposizione~~ l'attesa condizionata al default della controparte dell'esposizione > dell'attesa dell'esposizione

Questa dipendenza sfavorevole è nota come "wrong-way risk".

Netting* (fornisce la possibilità di compensare contratti di valore positivi e negativi stipulati con la medesima controparte)

Tiene conto di tutte le negoziazioni tra il "buyer" e il "seller".

Se queste sono complessivamente N si deve considerare il valore $\left(\sum_{n=1}^{N} V_{\tau^S,n}\right)^+$

Per $t < T^1$

$$CVA_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{1}_{\{\tau^S \leq T\}} \mathbb{1}_{\{\cancel{\quad} = S\}} e^{-r(\tau^S - t)} \left(\sum_{n=1}^{N} V_{\tau^S,n}\right)^+\right)$$

~~...~~

È da considerare quindi il portafoglio di CDS che detiene il "buyer" in cui la controparte è il "seller". Questi CDS possono essere scritti su unità di riferimento diverse.

$$\Rightarrow \quad \mathbb{1}_{\{\xi = S\}} = \mathbb{1}_{\{\tau^S < \tau^{R_1}\}} \cdot \ldots \cdot \mathbb{1}_{\{\tau^S < \tau^{R_N}\}}$$

Il calcolo in questo caso è ancora più complesso perché tiene conto $N+1$ tempi di "default". In generale il "netting set" può essere costituito da prodotti finanziari diversi, non necessariamente CDS.

Collateralizzazione* (Possibilità di trattenere un certo quantitativo di soldi o di securities a titolo di garanzia)

Analizziamo l'impatto sul CVA di un CDS.

Supponiamo che il collaterale sia rappresentato da una somma in denaro, altri collaterali possono essere dei titoli.

Poniamoci sempre nell'ottica del "buyer" che sarà detentore del collaterale (il "seller" verserà una somma o cederà un titolo azionario al "buyer" nel caso in cui il "seller" diventerà insolvente).

Calcoliamo il CCVA che fornisce il valore delle potenziali perdite da parte del "buyer" in seguito al fallimento del seller prima dell'unità di riferimento

- se $V_{T_1} \geq 0$ e $\xi = S$ il protection buyer ha una perdita pari a $\begin{cases} \delta^S (V_{T_1} - C_{T_1^-}) & \text{se } C_{T_1^-} < V_{T_1} \\ 0 & \text{se } C_{T_1^-} > V_{T_1} \end{cases}$

  $C_{T_1^-}$ è il valore del collaterale subito prima il default $\tau^S$

- se $V_{T_1} \leq 0$ e $\xi = S$ B non ha esposizione nei confronti di S e quindi non incorre in nessuna perdita

Le perdite relative al rischio di controparte sono $\mathbb{1}_{\{T_1 \leq T\}} \mathbb{1}_{\{\xi = S\}} \delta^S (V_{T_1}^+ - C_{T_1^-}^+)^+$

PROPOSIZIONE (Calcolo del CCVA) Collateral Credit Value Adjustment

Per $t < T_1$

$$\boxed{CCVA_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[ \mathbb{1}_{\{T_1 \le T\}} \delta e^{-r(T_1 - t)} \left(V^+_{T_1} - C^+_{T_1^-}\right)^+ \mathbb{1}_{\{\tau = S\}} \,\middle|\, \mathcal{G}_t \right]}$$

Per $C_t \equiv 0$ ritroviamo la formula del $CVA_t$.