Scritto del 14 febbraio 2019
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

1.
Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes, ossia soluzione della EDS

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0,$$

con μ, e $\sigma > 0$ costanti. Si indichi con $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente.
(i) Individuare l'unica misura martingala Q e scrivere la dinamica di S_t rispetto a Q.
(ii) Determinare il prezzo $v(t,x)$ (al tempo $t \in [0,T]$ se $S_t = x$) del derivato di payoff finale $F(S_T) = (S_T - S_0)^2$.
(iii) Verificare che $v(t,x)$ verifica l'equazione di valutazione di Black & Scholes.
(iii) Applicare la formula di Ito per determinare la dinamica del processo $Y_t = (S_t - S_0)^2$ rispetto alla misura Q.

2. Siano $\{S_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1,2$, i prezzi di due azioni descritti rispetto ad una misura martingala Q dalle seguenti EDS:

$$dS_t^1 = S_t^1(rdt + \sigma_{11} dW_t^1 + \sigma_{12} dW_t^2) \quad S_0^1 > 0.$$

$$dS_t^2 = S_t^2(rdt + \sigma_2 dW_t^2), \quad S_0^2 > 0.$$

con $\sigma_{11} > 0$, $\sigma_{12} > 0$ e $\sigma_2 > 0$ costanti e $\{W_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1,2$, moti browniani indipendenti.
(i) Determinare $\sigma_1 > 0$ e $\{B_t\}_{t\geq 0}$ moto browniano tali che $dS_t^1 = S_t^1(rdt + \sigma_1 dB_t)$.
(ii) I moti browniani $\{B_t\}_{t\geq 0}$ e $\{W_t^2\}_{t\geq 0}$ sono correlati? Calcolare il loro coefficiente di correlazione ρ.
(iii) Utilizzando il punto (i) scrivere esplicitamente S_t^1, $t \in [0,T]$.
(iv) Calcolare

$$v(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)} E^Q[S_T^1 S_T^2 | S_t^1 = x_1, S_t^2 = x_2].$$

3.
Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente.
a) Determinare il prezzo $p_{RT}(0,T)$ di un DZCB con recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1-\delta$ di valore nominale x e maturitá T.
b) Sia oggi il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 100 euro, maturitá $T = 1$ anno, pari a $p_0 = 98$ euro e quello di un DZCB, di stesso valore nominale e maturitá, con recovery of treasury del 70% pari a $p_{RT} = 95$ euro. Determinare l'intensitá di default λ dell'istituzione finanziaria.
c) Determinare il prezzo $p_{FV}(0,T)$ di un DZCB con recovery face value (pagato nell'istante di default) pari al 70%, valore nominale 100 euro e maturitá $T = 1$ anno.

Titoli Derivati e Gestione del Rischio II

Scritto del 14/2/19

1) $dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t)$, $S_0 > 0$

$\mathbb{Q}$ è l'unica misura di probabilità equivalente a $\mathbb{P}$ tale che $S_t e^{-rt}$ è una $\mathbb{Q}$-mg

ossia $\forall\, s > t$ $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_s e^{-rs} \mid \mathcal{F}_t] = S_t e^{-rt}$

ossia tale che $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_s \mid \mathcal{F}_t] = S_t e^{-(t-s)t}$

il tasso di rendimento atteso rispetto a $\mathbb{Q}$ è pari ad r.

$\Rightarrow dS_t = S_t(r\, dt + \sigma\, dW_t^{\mathbb{Q}})$ dove $W_t^{\mathbb{Q}} = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$

per il Teorema di Girsanov la misura $\mathbb{Q}$ esiste ed è unica ed è associata al prezzo di mercato del rischio $\frac{\mu - r}{\sigma}$

(ii) $v(t,x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - S_0)^2 \mid S_t = x] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T^2 - 2 S_0 S_T + S_0^2 \mid S_t = x]$

$$= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T^2 \mid S_t = x] - 2 S_0 e^{-r(T-t)} \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T \mid S_t = x]}_{= x e^{r(T-t)}} + e^{-r(T-t)} S_0^2$$

$S_T = S_t\, e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})}$ perché $\mathbb{Q}$ è la misura martingala

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T^2 \mid S_t = x] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[x^2 e^{2(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} e^{2\sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})}\right] = x^2 e^{2(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{2\sigma\sqrt{T-t}\, N}\right]}_{= e^{\frac{4\sigma^2(T-t)}{2}}}$$

$W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}} \sim \mathcal{N}(0, T-t)$ $\quad W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}} \sim \sqrt{T-t}\, N$

$N \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\Rightarrow v(t,x) = x^2 e^{-r(T-t)} e^{2r(T-t)} e^{-\sigma^2(T-t)} e^{2\sigma^2(T-t)} - 2S_0 x + e^{-r(T-t)} S_0^2$$

$$v(t,x) = x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} - 2S_0 x + e^{-r(T-t)} S_0^2$$

(iii) Eq. di valutazione di B&S

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + rx\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rv = 0 \\ v(T,x) = (x-S_0)^2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -(r+\sigma^2)x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} + rS_0 e^{-r(T-t)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x e^{(r+\sigma^2)(T-t)} - 2S_0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$$

$v(T,x) = x^2 - 2S_0 x + S_0^2 = (x-S_0)^2$
la condizione finale è verificata

$$-(r+\sigma^2)x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} + \cancel{rS_0 e^{-r(T-t)}} + 2rx^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} - \cancel{2S_0 rx} + \sigma^2 x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} - rx^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} + \cancel{2S_0 rx} - \cancel{re^{-r(T-t)}} S_0^2 \overset{?}{=} 0$$

(iv) $Y_t = (S_t - S_0)^2 = f(t,x)$

$f(t,x) = (x-S_0)^2 \qquad f'(x) = 2(x-S_0) \qquad f''(x) = 2$

$$df(S_t) = \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f''(S_t)\,dt + f'(S_t)\,dS_t$$

$$dY_t = \frac{1}{\cancel{2}}\sigma^2 S_t^2 \cdot \cancel{2} \cdot dt + 2(S_t - S_0)\{S_t r\,dt + S_t \sigma\, dW_t^{\mathbb{Q}}\}$$

$$dY_t = \sigma^2 S_t^2\,dt + 2S_t(S_t-S_0)r\,dt + 2S_t(S_t-S_0)\sigma\,dW_t^{\mathbb{Q}}$$

$$dY_t = [\sigma^2 S_t^2 + 2S_t(S_t-S_0)r]\,dt + 2S_t(S_t-S_0)\sigma\,dW_t^{\mathbb{Q}}$$

non è un moto browniano geometrico

2)

$$dS_t^1 = S_t^1 (r\,dt + \sigma_{11}\, dW_t^1 + \sigma_{12}\, dW_t^2) \qquad S_0^1 > 0$$

$$dS_t^2 = S_t^2 (r\,dt + \sigma_2\, dW_t^2), \qquad S_0^2 > 0$$

(i) $\sigma_1 B_t = \sigma_{11} W_t^1 + \sigma_{12} W_t^2$ $\qquad$ σ_1 deve essere tale che $\mathbb{E}[B_t^2] = t$

$$B_t = \frac{\sigma_{11}}{\sigma_1} W_t^1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} W_t^2 \qquad W_t^1 \sim \mathcal{N}(0,t) \qquad W_t^2 \sim \mathcal{N}(0,t)$$

$$\Rightarrow \quad B_t \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_1^2} t + \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} t\right) = \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} t\right) = \mathcal{N}(0,t)$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2$$

(ii) I moti browniani $\{B_t\}$ e $\{W_t^2\}$ sono correlati in quanto

$$Cov(B_t, W_t^2) = \mathbb{E}(B_t W_t^2) = \mathbb{E}\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_1} W_t^1 W_t^2 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} (W_t^2)^2\right) =$$

$$= \frac{\sigma_{11}}{\sigma_1} \underbrace{\mathbb{E}(W_t^1)}_{=0} \underbrace{\mathbb{E}(W_t^2)}_{=0} + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} \mathbb{E}((W_t^2)^2) = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} t$$

$$\rho = \frac{Cov(B_t, W_t^2)}{\sqrt{Var(B_t)}\sqrt{Var(W_t^2)}} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} \frac{t}{\sqrt{t}\sqrt{t}} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2}}$$

(iii) $dS_t^1 = S_t^1 (r\,dt + \sigma_1\, dB_t)$

$$S_t^1 = S_0^1 e^{(r - \sigma_1^2/2)t + \sigma_1 B_t}$$

(iv)

$$v(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[S_T^1 \; S_T^2 \mid S_t^1 = x_1, S_t^2 = x_2]$$

$$S_T^1 = S_t^1 e^{(r-\sigma_1^2/2)(T-t) + \sigma_1 (B_T - B_t)} = S_t^1 e^{\left(r - \frac{(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2)}{2}\right)(T-t) + \sigma_{11}(W_T^1 - W_t^1) + \sigma_{12}(W_T^2 - W_t^2)}$$

$$S_T^2 = S_t^2 e^{(r-\sigma_2^2/2)(T-t) + \sigma_2 (W_T^2 - W_t^2)}$$

$$\mathbb{E}^Q\left[S_T^1 S_T^2 \mid S_t^1 = x_1, S_t^2 = x_2 \right] = x_1 e^{(r-\sigma_1^2/2)(T-t)} x_2 e^{(r-\sigma_2^2/2)(T-t)} \mathbb{E}^Q\left[e^{\sigma_1\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_1} W_T^1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} W_T^2 - \frac{\sigma_{11}}{\sigma_1} W_t^1 - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2} W_t^2\right)} e^{\sigma_2 (W_T^2 - W_t^2)} \right]$$

poiché $\{W_t^1\} \perp\!\!\!\perp \{W_t^2\}$

$$= x_1 \cdot x_2 \, e^{(2r - \sigma_1^2/2 - \sigma_2^2/2)(T-t)} \mathbb{E}^Q\left[e^{\sigma_{11}(W_T^1 - W_t^1)} \right] \mathbb{E}^Q\left[e^{(\sigma_{12} + \sigma_2)(W_T^2 - W_t^2)} \right]$$

$$\mathbb{E}^Q\left[e^{\sigma_{11}\sqrt{T-t}\, N} \right] \mathbb{E}^Q\left[e^{(\sigma_{12}+\sigma_2)\sqrt{T-t}\, N} \right]$$

$$= e^{\sigma_{11}^2 \frac{(T-t)}{2}} e^{(\sigma_{12}+\sigma_2)^2 \frac{T-t}{2}}$$

$$= e^{(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{12}\sigma_2)\frac{(T-t)}{2}}$$

$$= x_1 x_2 \, e^{\left(2r - \cancel{\frac{\sigma_{11}^2}{2}} - \cancel{\frac{\sigma_{12}^2}{2}} - \cancel{\frac{\sigma_2^2}{2}} + \cancel{\frac{\sigma_{11}^2}{2}} + \cancel{\frac{\sigma_{12}^2}{2}} + \cancel{\frac{\sigma_2^2}{2}} + \sigma_{12}\sigma_2\right)(T-t)}$$

$$= x_1 x_2 \, e^{(2r + \sigma_{12}\sigma_2)(T-t)} \qquad \sigma_{12} = \rho \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2}$$

$$v(t, x_1, x_2) = x_1 x_2 \, e^{(r + \sigma_{12}\sigma_2)(T-t)}$$

3) $Q(\tau > t) = e^{-\lambda t} \quad \forall t > 0 \qquad Q(\tau \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

a)

$$P_{RT}(0,T) = e^{-rT} \mathbb{E}^{Q}\left[x \mathbb{1}_{(\tau > T)} + x(1-\delta) \mathbb{1}_{(\tau \leq T)} \right]$$

$$= x e^{-rT} \{ Q(\tau > T) + Q(\tau \leq T)(1-\delta) \} = x e^{-rT} \{ e^{-\lambda T} + (1-\delta)(1 - e^{-\lambda T}) \}$$

$$= x e^{-rT} \{ 1-\delta + \delta e^{-\lambda T} \}$$

b) $x = 100 \quad T = 1$ anno $\quad P_0 = 98€ = 100 e^{-rT} \quad \cancel{P_1 = 100 e^{-rT}} \quad 1-\delta = 0.7$

$$P_{RT} = P_0 \{ 0.7 + 0.3 e^{-\lambda} \} \qquad \frac{P_{RT}}{P_0} = 0.7 + 0.3 e^{-\lambda} \qquad e^{-\lambda} = \frac{1}{0.3} \left\{ \frac{P_{RT}}{P_0} - 0.7 \right\}$$

$$\lambda = -\ln\left\{ \frac{P_{RT}}{0.3 P_0} - \frac{0.7}{0.3} \right\} = -\ln\left\{ \frac{95}{0.3 \cdot 98} - \frac{0.7}{0.3} \right\} = 0.1076$$

c) Se il recovery è pagato al tempo τ

$$P_{FV}(0,T) = e^{-rT} x \, \mathbb{E}^{Q}\left[\mathbb{1}_{(\tau > T)} \right] + x(1-\delta) \, \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-r\tau} \mathbb{1}_{(\tau \leq T)} \right]$$

calcoliamo $\mathbb{E}^{Q}\left[e^{-r\tau} \mathbb{1}_{(\tau \leq T)} \right] = \int_0^T e^{-ru} \lambda e^{-\lambda u} \, du = \lambda \int_0^T e^{-(r+\lambda)u} \, du = -\frac{\lambda}{r+\lambda} e^{-(r+\lambda)u} \Big|_0^T$

$\tau \sim \exp(\lambda)$ ha densità $f_\tau(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{(t > 0)}$ $\qquad = \frac{-\lambda}{r+\lambda} \{ e^{-(r+\lambda)T} - 1 \}$

$$P_{FV}(0,T) = x e^{-(r+\lambda)T} + x(1-\delta) \frac{\lambda}{r+\lambda} \left(1 - e^{-(r+\lambda)T} \right)$$