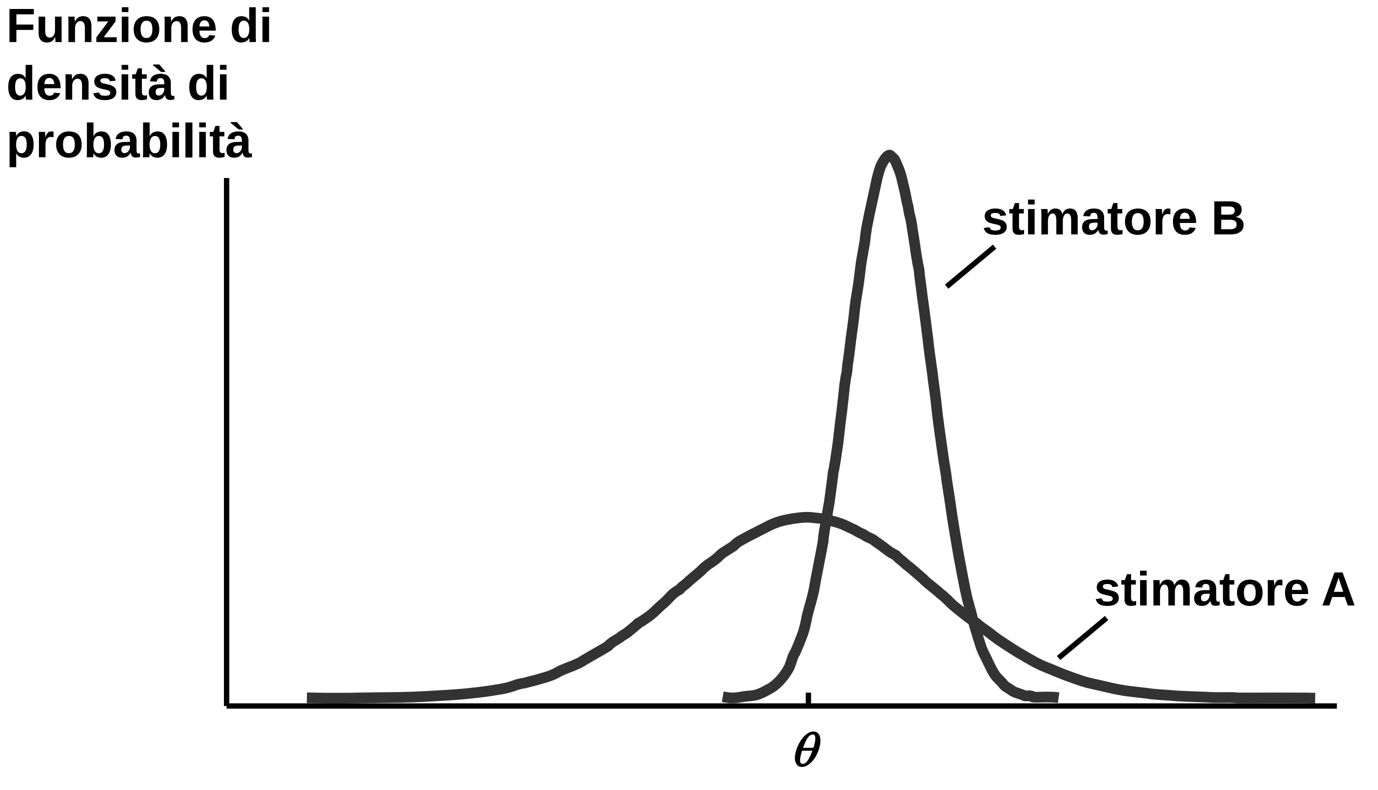
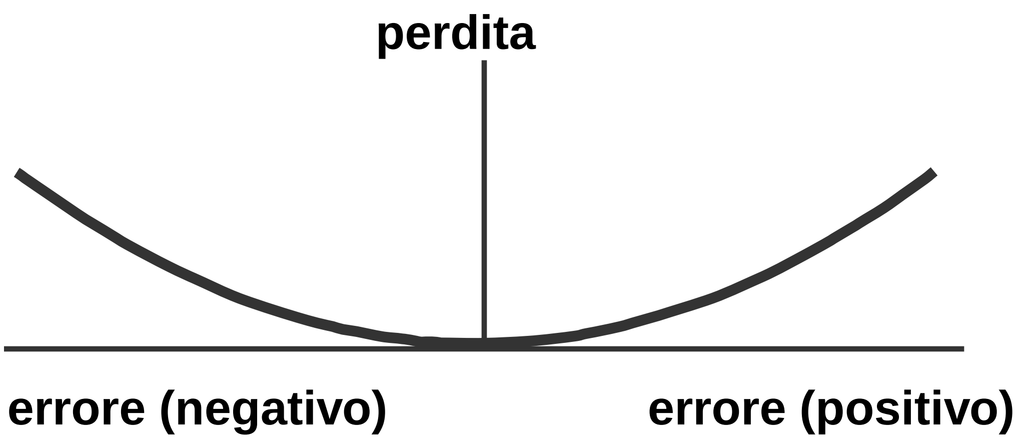
CORRETTEZZA O VARIANZA MINIMA



Supponiamo di avere due stimatori del parametro della popolazione θ, uno corretto, l'altro distorto (non corretto) ma con varianza più bassa. Quale dei due scegliamo?

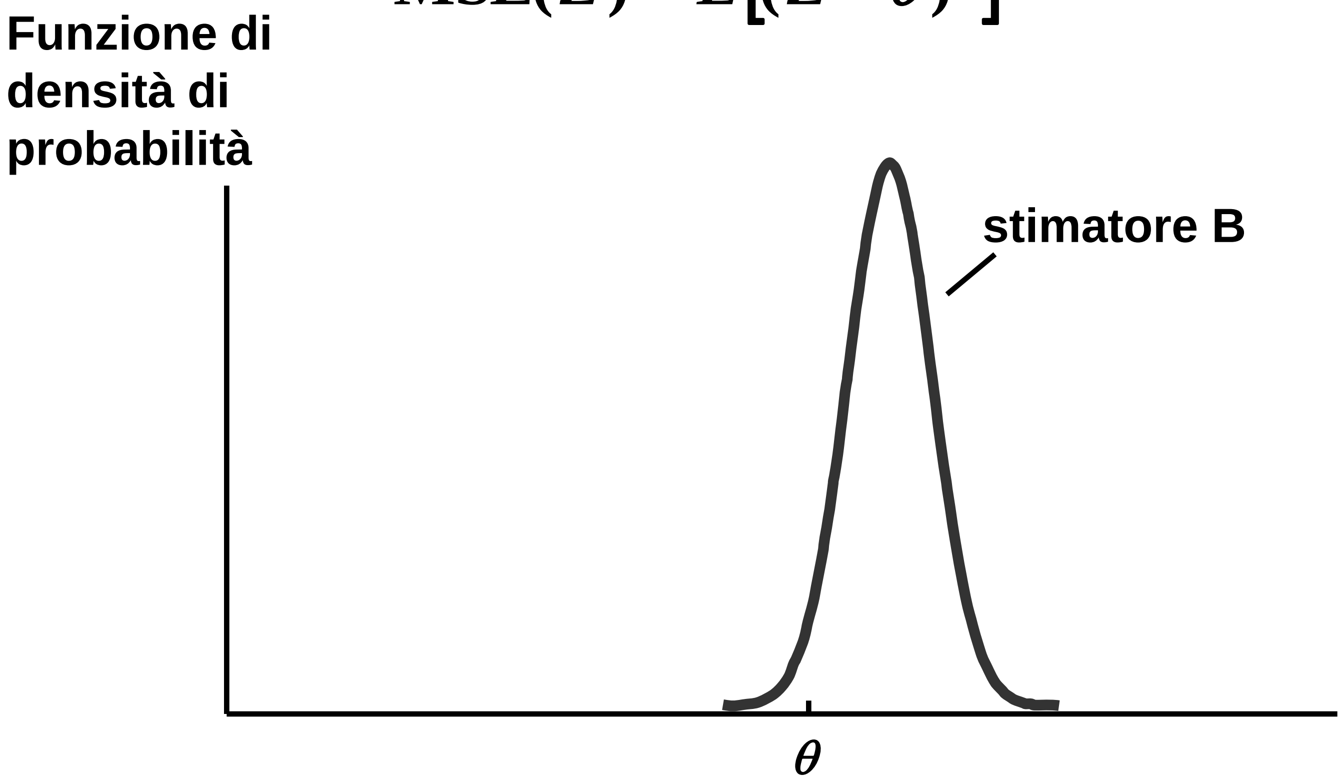
CORRETTEZZA O VARIANZA MINIMA



Un modo è quello di definire una funzione di perdita (loss function) che riflette il costo da pagare per commettere errori, positivi o negativi, di diverse dimensioni.

CORRETTEZZA O VARIANZA MINIMA

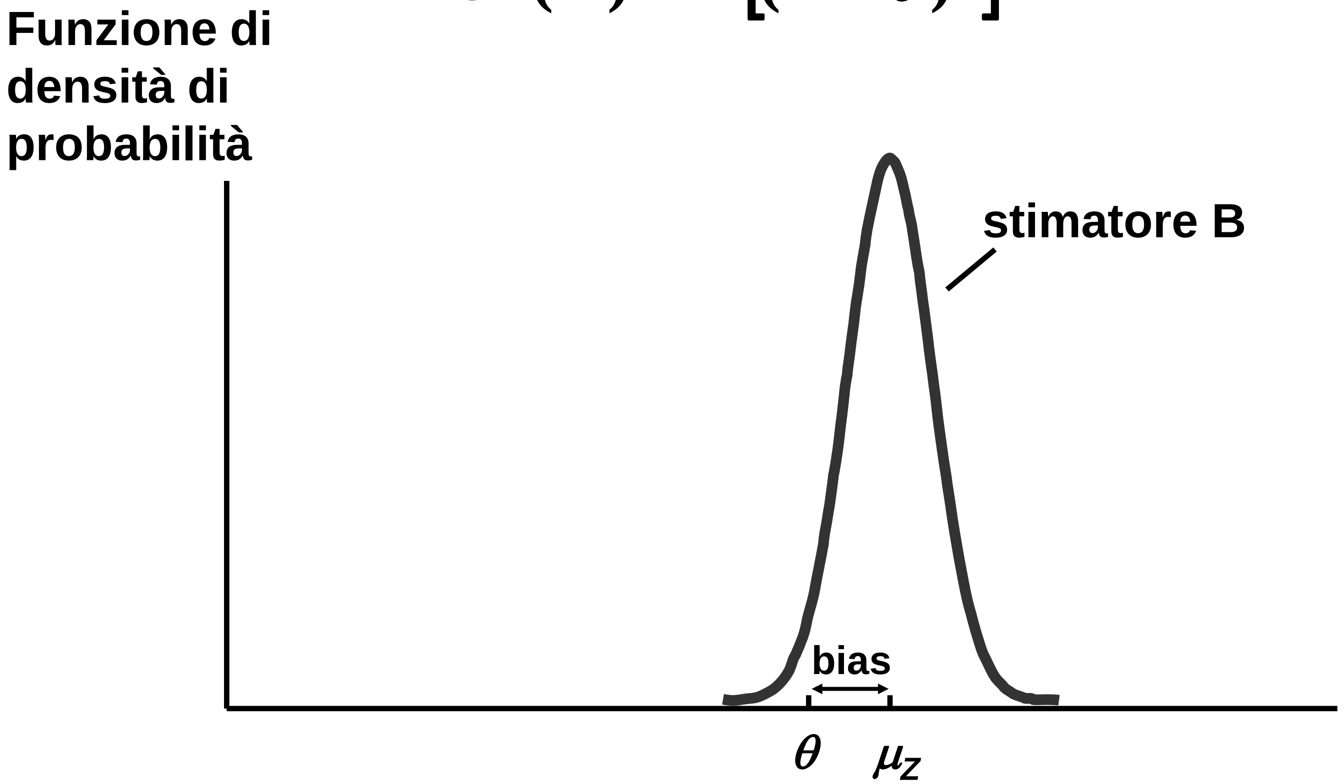
$$\mathrm{MSE}(Z) = E\left[(Z-\theta)^2\right]$$



Una loss function molto usata è il Mean Square Error dello stimatore, definito come il valore atteso delle deviazioni dello stimatore dal vero valore del parametro della popolazione.

CORRETTEZZA O VARIANZA MINIMA

$$\mathrm{MSE}(Z) = E\left[(Z-\theta)^2\right]$$

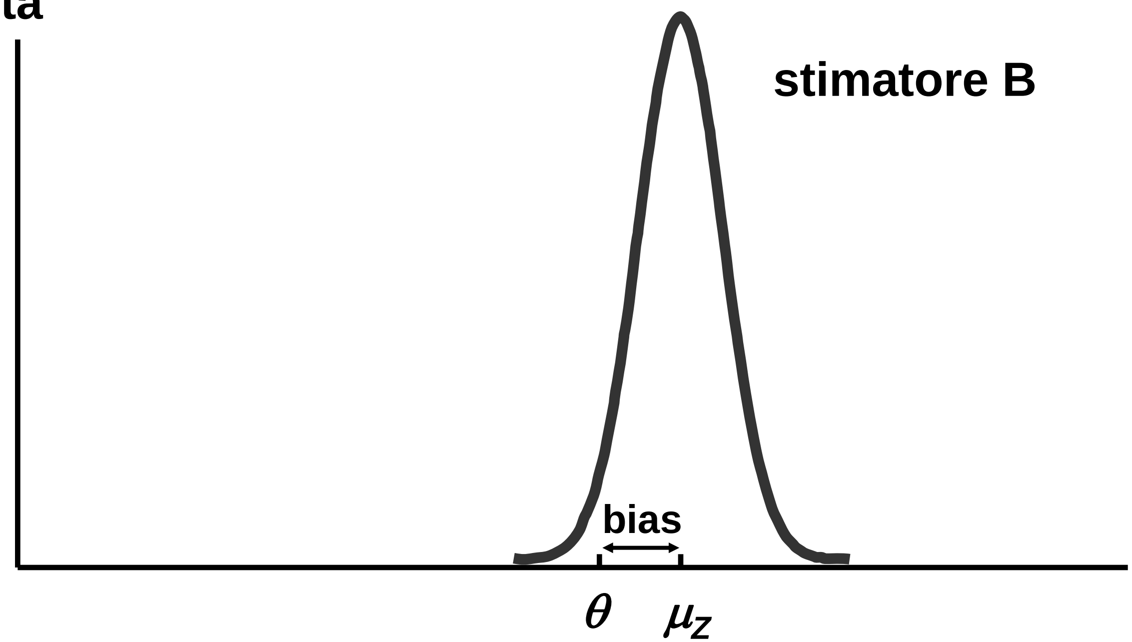


Il Mean Square Error tiene conto del trade-off tra la varianza dello stimatore ed il bias (distorsione). Supponiamo di avere uno stimatore distorto come B, con valore atteso μ_Z.

CORRETTEZZA O VARIANZA MINIMA

$$\mathrm{MSE}(Z) = E\left[(Z-\theta)^2\right] = \sigma_Z^2 + (\mu_Z - \theta)^2$$

Funzione di densità di probabilità



Il Mean Square Error è uguale alla somma della varianza dello stimatore ed il quadrato del bias.

CORRETTEZZA O VARIANZA MINIMA

$$
\begin{aligned}
\mathrm{MSE}(Z) &= E\left[(Z-\theta)^2\right] \\
&= E\left[(Z-\mu_Z+\mu_Z-\theta)^2\right]
\end{aligned}
$$

Per dimostrare ciò, iniziamo con il sottrarre ed aggiungere μ_Z.

CORRETTEZZA O VARIANZA MINIMA

$$
\begin{aligned}
\mathrm{MSE}(Z) &= E\left[(Z-\theta)^2\right] \\
&= E\left[(Z-\mu_Z+\mu_Z-\theta)^2\right] \\
&= E\left[(Z-\mu_Z)^2+(\mu_Z-\theta)^2+2(Z-\mu_Z)(\mu_Z-\theta)\right]
\end{aligned}
$$

Sviluppiamo il quadrato usando la seguente regola: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, dove $a = Z - \mu_Z$ e $b = \mu_Z - \theta$.

CORRETTEZZA O VARIANZA MINIMA

$$
\begin{aligned}
\mathrm{MSE}(Z) &= E\left[(Z-\theta)^2\right] \\
&= E\left[(Z-\mu_Z+\mu_Z-\theta)^2\right] \\
&= E\left[(Z-\mu_Z)^2+(\mu_Z-\theta)^2+2(Z-\mu_Z)(\mu_Z-\theta)\right] \\
&= E\left[(Z-\mu_Z)^2\right]+E\left[(\mu_Z-\theta)^2\right]+E\left[2(Z-\mu_Z)(\mu_Z-\theta)\right]
\end{aligned}
$$

Usiamo la prima regola del valore atteso e dividiamo l'espressione in tre parti.

CORRETTEZZA O VARIANZA MINIMA

$$
\begin{aligned}
\mathrm{MSE}(Z) &= E\left[(Z-\theta)^2\right] \\
&= E\left[(Z-\mu_Z+\mu_Z-\theta)^2\right] \\
&= E\left[(Z-\mu_Z)^2+(\mu_Z-\theta)^2+2(Z-\mu_Z)(\mu_Z-\theta)\right] \\
&= E\left[(Z-\mu_Z)^2\right]+E\left[(\mu_Z-\theta)^2\right]+E\left[2(Z-\mu_Z)(\mu_Z-\theta)\right] \\
&= \sigma_Z^2+(\mu_Z-\theta)^2+2(\mu_Z-\theta)E(Z-\mu_Z)
\end{aligned}
$$

Il primo termine è la varianza di *Z*.

CORRETTEZZA O VARIANZA MINIMA

$$
\begin{aligned}
\mathrm{MSE}(Z) &= E\left[(Z-\theta)^2\right] \\
&= E\left[(Z-\mu_Z+\mu_Z-\theta)^2\right] \\
&= E\left[(Z-\mu_Z)^2+(\mu_Z-\theta)^2+2(Z-\mu_Z)(\mu_Z-\theta)\right] \\
&= E\left[(Z-\mu_Z)^2\right]+E\left[(\mu_Z-\theta)^2\right]+E\left[2(Z-\mu_Z)(\mu_Z-\theta)\right] \\
&= \sigma_Z^2+(\mu_Z-\theta)^2+2(\mu_Z-\theta)E(Z-\mu_Z)
\end{aligned}
$$

($\mu_Z - \theta$) è una costante, quindi il secondo termine è una constante.

CORRETTEZZA O VARIANZA MINIMA

$$
\begin{aligned}
\mathrm{MSE}(Z) &= E\left[(Z-\theta)^2\right] \\
&= E\left[(Z-\mu_Z+\mu_Z-\theta)^2\right] \\
&= E\left[(Z-\mu_Z)^2+(\mu_Z-\theta)^2+2(Z-\mu_Z)(\mu_Z-\theta)\right] \\
&= E\left[(Z-\mu_Z)^2\right]+E\left[(\mu_Z-\theta)^2\right]+E\left[2(Z-\mu_Z)(\mu_Z-\theta)\right] \\
&= \sigma_Z^2+(\mu_Z-\theta)^2+2(\mu_Z-\theta)E(Z-\mu_Z)
\end{aligned}
$$

Nel terzo termine, ($\mu_Z - \theta$) può essere portato fuori perché è una costante, usando la seconda regola del valore atteso.

CORRETTEZZA O VARIANZA MINIMA

$$
\begin{aligned}
\mathrm{MSE}(Z) &= E\left[(Z-\theta)^2\right] \\
&= E\left[(Z-\mu_Z+\mu_Z-\theta)^2\right] \\
&= E\left[(Z-\mu_Z)^2+(\mu_Z-\theta)^2+2(Z-\mu_Z)(\mu_Z-\theta)\right] \\
&= E\left[(Z-\mu_Z)^2\right]+E\left[(\mu_Z-\theta)^2\right]+E\left[2(Z-\mu_Z)(\mu_Z-\theta)\right] \\
&= \sigma_Z^2+(\mu_Z-\theta)^2+2(\mu_Z-\theta)E(Z-\mu_Z) \\
&= \sigma_Z^2+(\mu_Z-\theta)^2+2(\mu_Z-\theta)(\mu_Z-\mu_Z)
\end{aligned}
$$

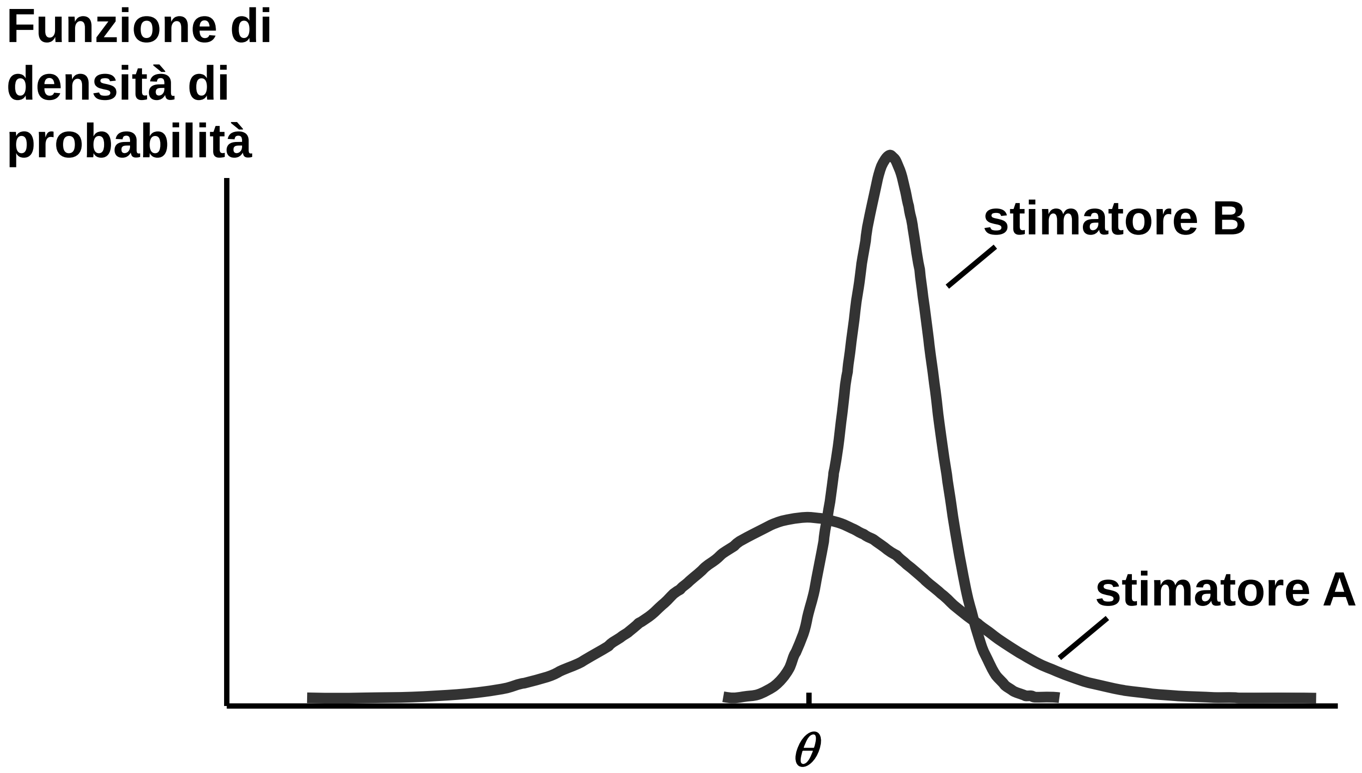
***E*(*Z*) è μ_Z, e *E*(−μ_Z) è −μ_Z.**

CORRETTEZZA O VARIANZA MINIMA

$$
\begin{aligned}
\mathrm{MSE}(Z) &= E\left[(Z-\theta)^2\right] \\
&= E\left[(Z-\mu_Z+\mu_Z-\theta)^2\right] \\
&= E\left[(Z-\mu_Z)^2+(\mu_Z-\theta)^2+2(Z-\mu_Z)(\mu_Z-\theta)\right] \\
&= E\left[(Z-\mu_Z)^2\right]+E\left[(\mu_Z-\theta)^2\right]+E\left[2(Z-\mu_Z)(\mu_Z-\theta)\right] \\
&= \sigma_Z^2+(\mu_Z-\theta)^2+2(\mu_Z-\theta)E(Z-\mu_Z) \\
&= \sigma_Z^2+(\mu_Z-\theta)^2+2(\mu_Z-\theta)(\mu_Z-\mu_Z) \\
&= \sigma_Z^2+(\mu_Z-\theta)^2
\end{aligned}
$$

Quindi il terzo termine è zero e il Mean Square Error di *Z* è pari alla somma della varianza di *Z* e del bias al quadrato.

CORRETTEZZA O VARIANZA MINIMA



Lo stimatore B è probabilmente leggermente migliore dallo stimatore A sulla base del criterio MSE.