PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: SIMULAZIONE E TLC

Consistenza

Perchè siamo interessati alla consistenza quando in pratica disponiamo di campioni finiti?

Consistenza

Perchè siamo interessati alla consistenza quando in pratica disponiamo di campioni finiti?

Se possiamo dimostrare che uno stimatore è consistente possiamo essere ottimisti circa le sue proprietà finite, mentre se lo stimatore è inconsistente allora sicuramente sarà distorto per campioni finiti.

Consistenza

Comunque, occorre essere cauti nel preferire uno stimatore consistente ad uno inconsistente.

Primo, uno stimatore consistente può essere distorto per campioni finiti

Consistenza

Comunque, occorre essere cauti nel preferire uno stimatore consistente ad uno inconsistente.

Primo, uno stimatore consistente può essere distorto per campioni finiti

Secondo, di solito siamo interessati alla varianza dello stimatore. Se uno stimatore consistente ha una varianza più grande di quello inconsistente, il secondo potrebbe essere preferibile se giudicato sulla base del mean square error che tiene conto del trade-off tra bias e varianza.

Consistenza

Comunque, occorre essere cauti nel preferire uno stimatore consistente ad uno inconsistente.

Primo, uno stimatore consistente può essere distorto per campioni finiti

Secondo, di solito siamo interessati alla varianza dello stimatore. Se uno stimatore consistente ha una varianza più grande di quello inconsistente, il secondo potrebbe essre preferibile se giudicato sulla base del mean square error che tiene conto del trade-off tra bias e varianza .

Come possiamo risolvere questi problemi? matematicamente sono intrattabili.

Simulazione

la risposta è di condurre un esperimento simulativo, investigando direttamente le distribuzioni degli stimatori sotto alcune condizioni.

Facciamo ciò per l'esempio che avevamo visto nelle sequenze precedenti. Generiamo *Z* da una variabile casuale con media 1 e varianza 0.25.

Simulazione

la risposta è di condurre un esperimento simulativo, investigando direttamente le distribuzioni degli stimatori sotto alcune condizioni.

Facciamo ciò per l'esempio che avevamo visto nelle sequenze precedenti. Generiamo Z da una variabile casuale con media 1 e varianza 0.25.

Fissiamo λ uguale a 5, e quindi il valore di Y per ogni osservazione è 5 volte il valore di Z: $Y = 5Z$.

Generiamo gli errori da una variabile casuale normale con media zero e varianza unitaria. Il valore di X per ogni osservazione è uguale al valore di Z più l'errore: $X = Z + w$.

Poi usiamo $\Sigma Y / \Sigma X$ come uno stimatore di λ.

Simulazione

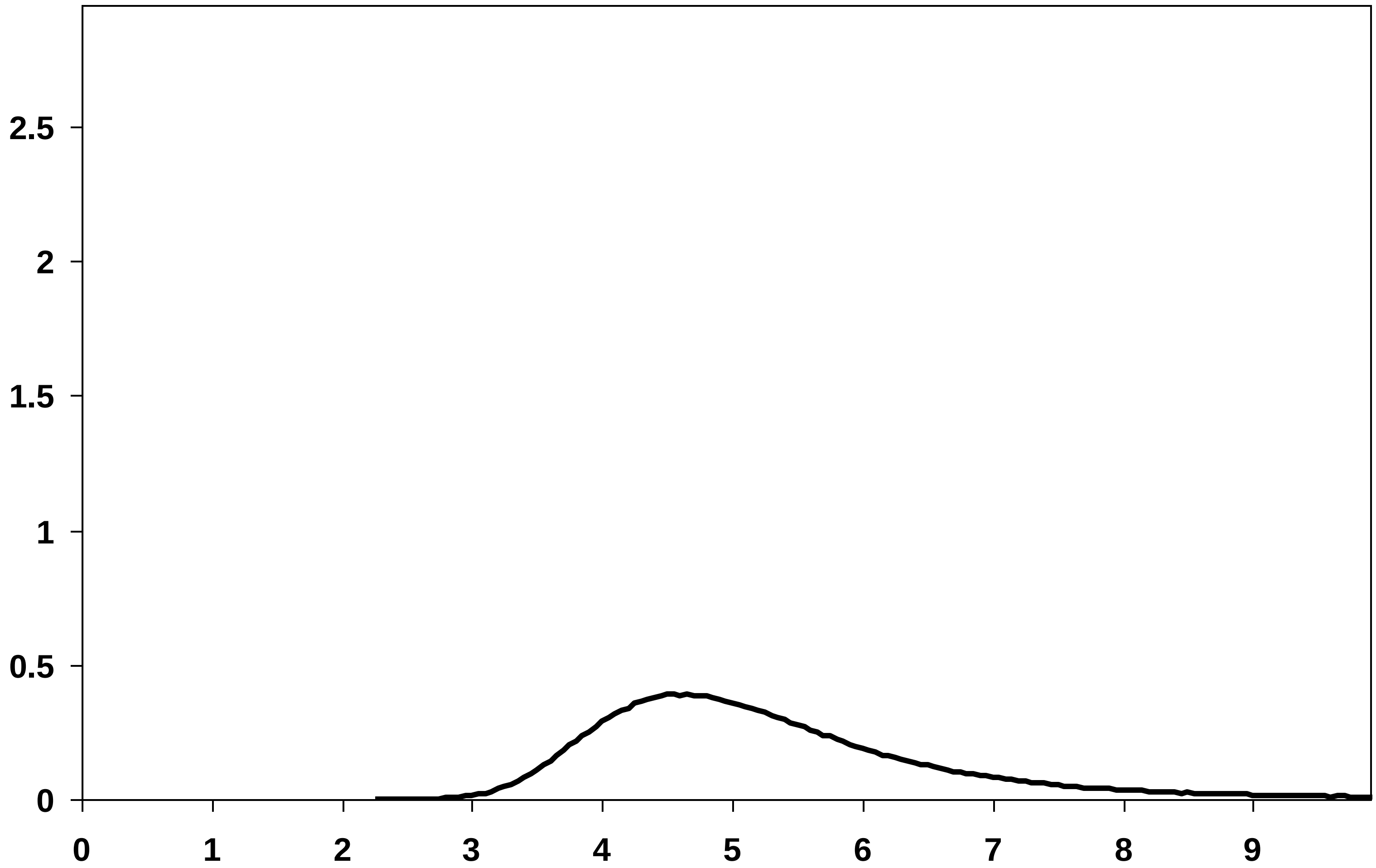
Poi usiamo $\dfrac{\sum Y_i}{\sum X_i}$ **come uno stimatore di** λ**.**

Abbiamo già visto che è uno stimatore consistente.

$$\operatorname{plim}\left\{\frac{\sum Y_i}{\sum X_i}\right\} = \lambda - \lambda\,\frac{\operatorname{plim}\,\overline{w}}{\operatorname{plim}\,\overline{Z} + \operatorname{plim}\,\overline{w}} = \lambda - \frac{0}{\mu_Z + 0} = \lambda$$

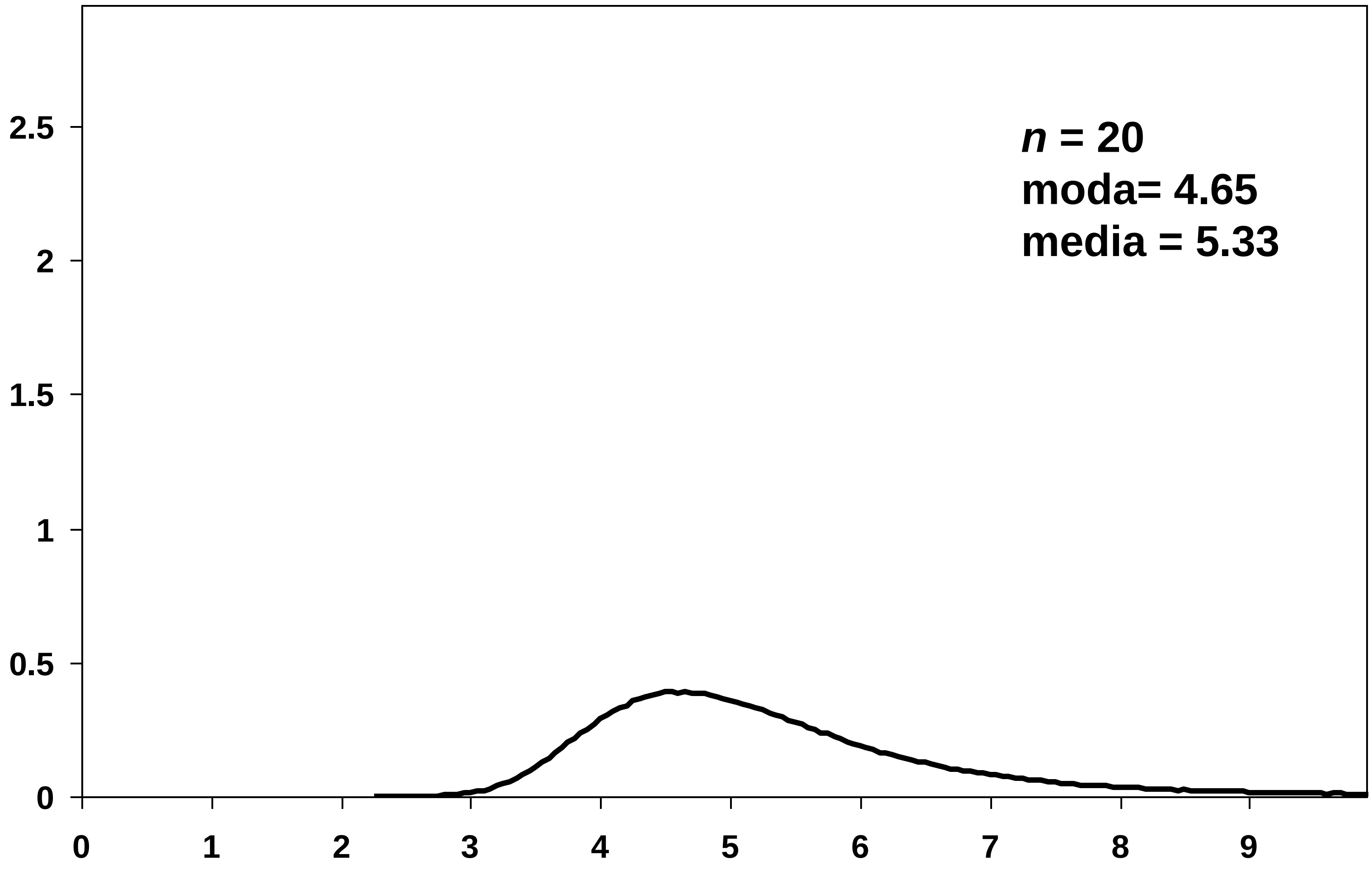
La domanda è: come si comporta per campioni finiti?

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: SIMULAZIONE E TLC



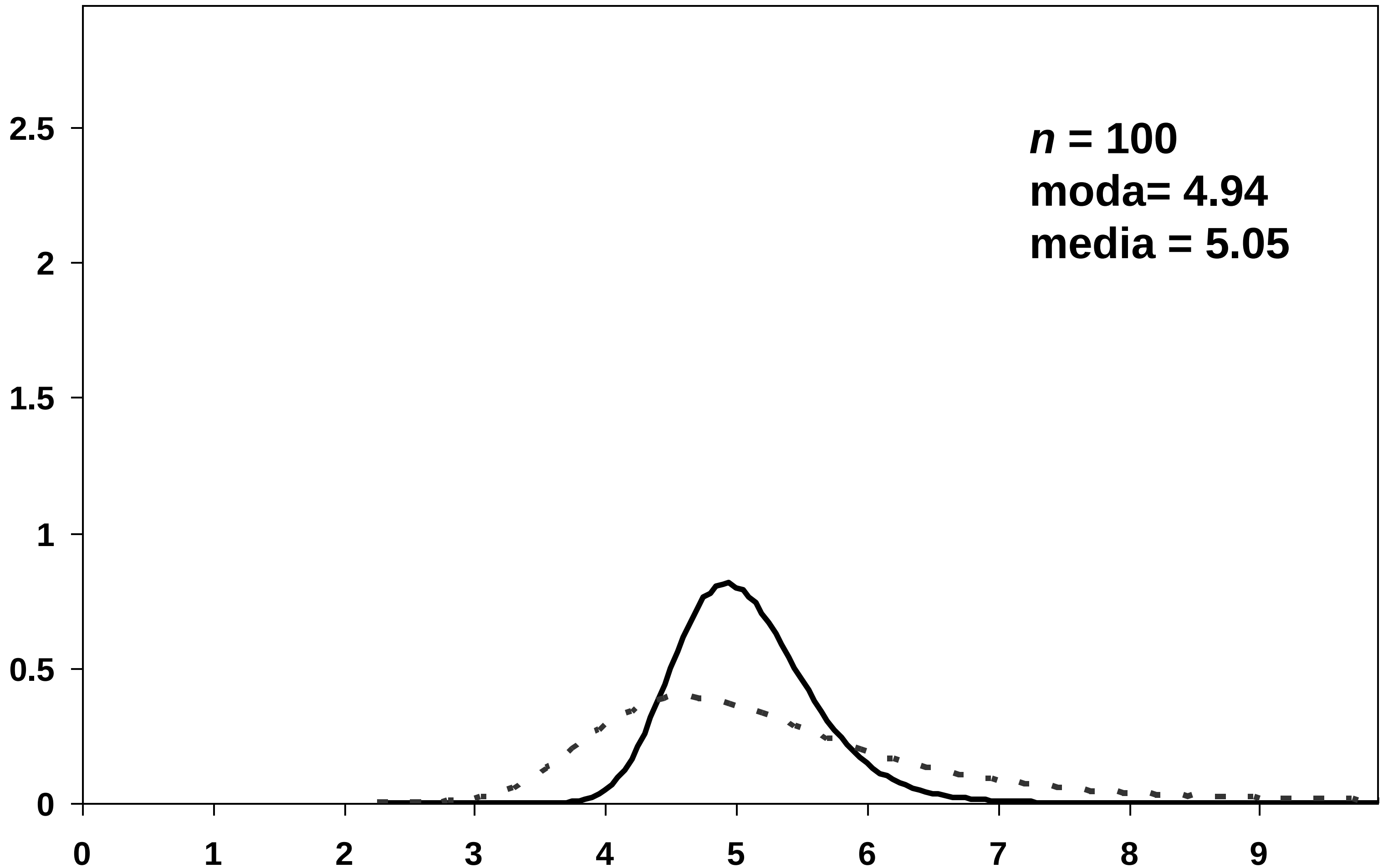
Iniziamo con il campione di dimensione pari a 20. La figura mostra la distribuzione di *l*, lo stimatore di λ, per un milione di campioni.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: SIMULAZIONE E TLC



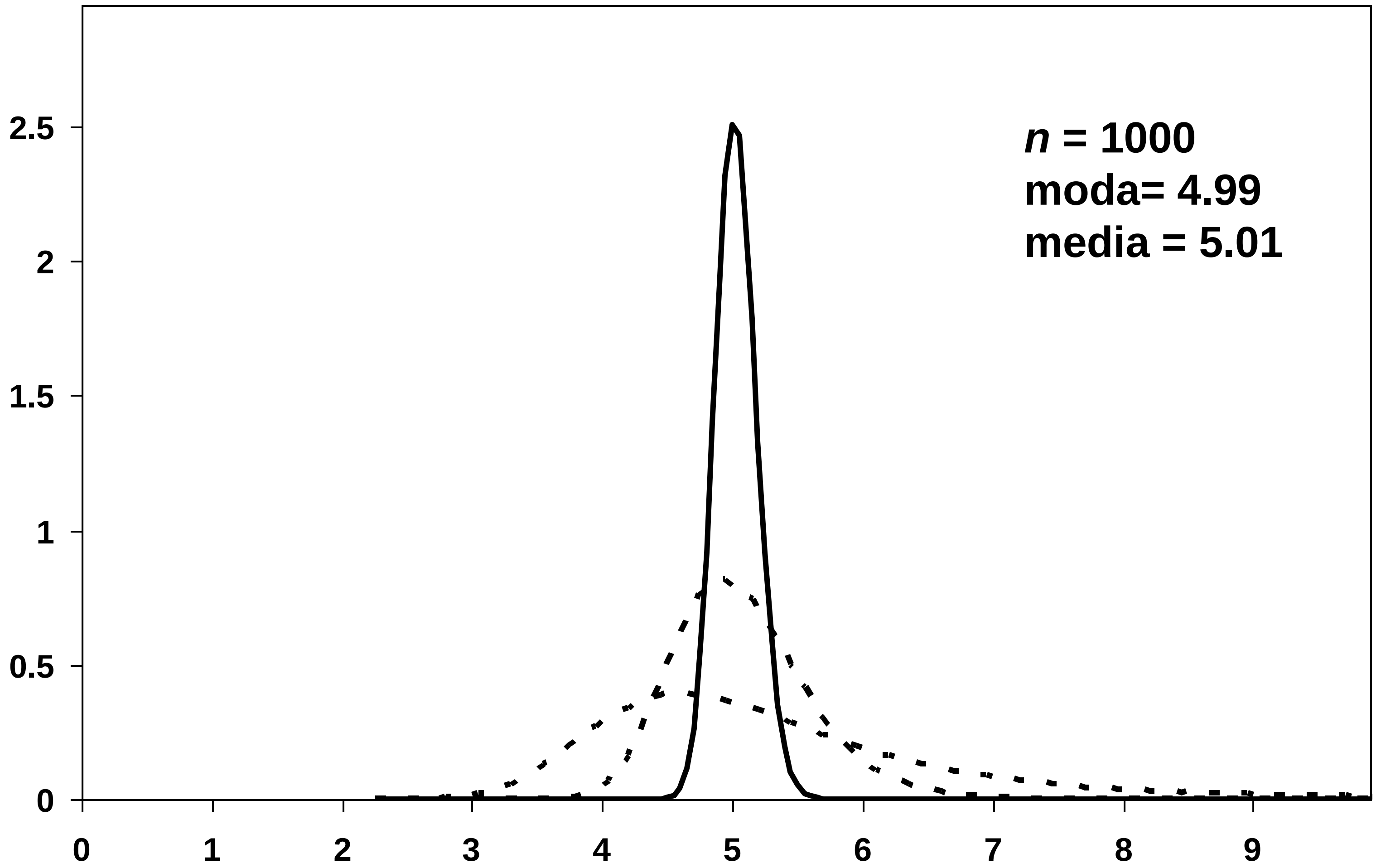
Nonostante la moda della distribuzione, 4.65, sia più bassa del vero valore, lo stimatore ha una distorsione positiva, la stima della media su un milione di campioni è 5.33.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: SIMULAZIONE E TLC



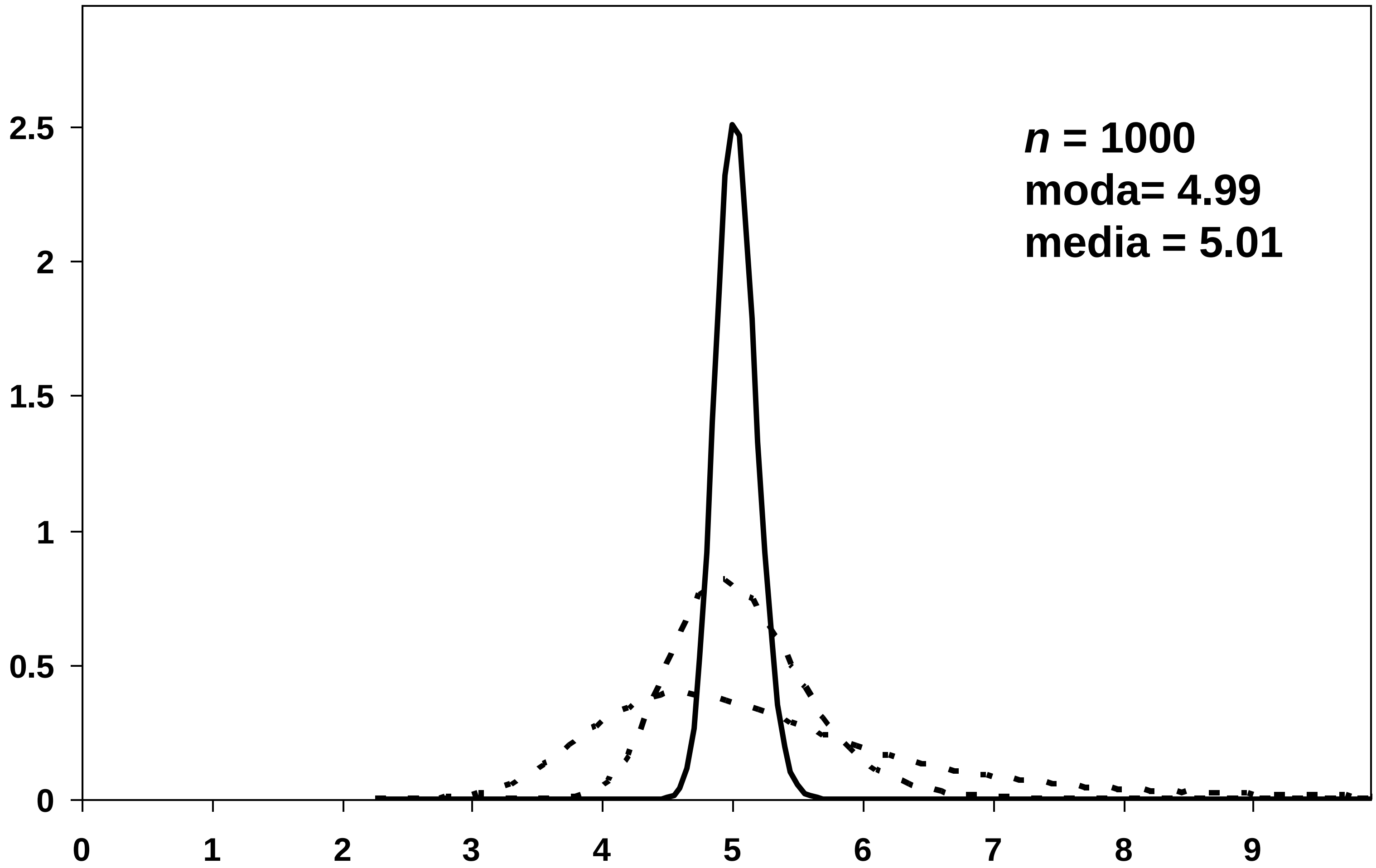
Se incrementiamo la dimensione campionaria a 100, la distribuzione delle stime ottenute su un milione di campioni è meno asimmetrica. La moda è 4.94 e la media è 5.05.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: SIMULAZIONE E TLC



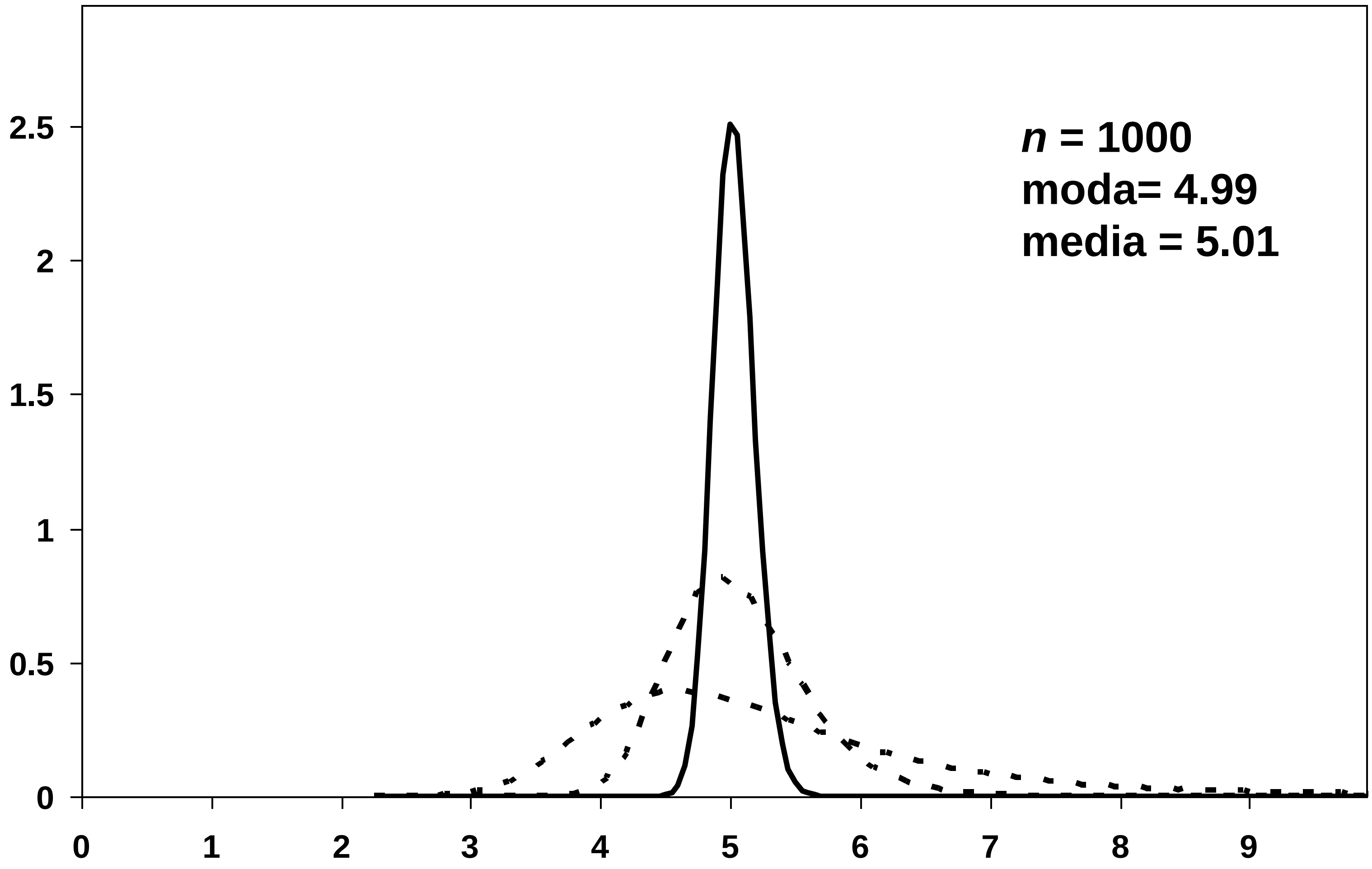
Se la dimensione campionaria è 1000, la distribuzione delle stime è quasi simmetrica. La moda è 4.99 e la media è 5.01.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: SIMULAZIONE E TLC



Abbiamo dimostrato che analiticamente che lo stimatore è consistente, ma questa è una proprietà teorica relativa a campioni di dimensione infinita.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: SIMULAZIONE E TLC



La simulzione mostra che per un campione di 1000 unità, lo stimatore è (all'incirca) corretto. Comunque per campioni di piccole dimensioni lo stimatore è distorto, in particolare quando la dimensione campionaria è piccola (circa 20).

Teorema del limite centrale

Se una variabile casuale *X* ha una distribuzione normale, la sua media campionaria avrà una distribuzione normale. Ciò è utile in quanto ci permette di costruire la statistica test *t* e gli intervalli di confidenza se utilizziamo $\bar{X}$ come uno stimatore della media della popolazione.

Cosa succede se non possiamo assumere che *X* si distribuisca normalmente?

Teorema del limite centrale

Il Teorema del limite centrale ci viene in aiuto. Se X_i sono variabili casuali estratte indipendentemente dalla stessa distribuzione (la distribuzione di X), con media finita e varianza finita, la distribuzione di $\bar{X}$ converge ad una variabile casuale normale.

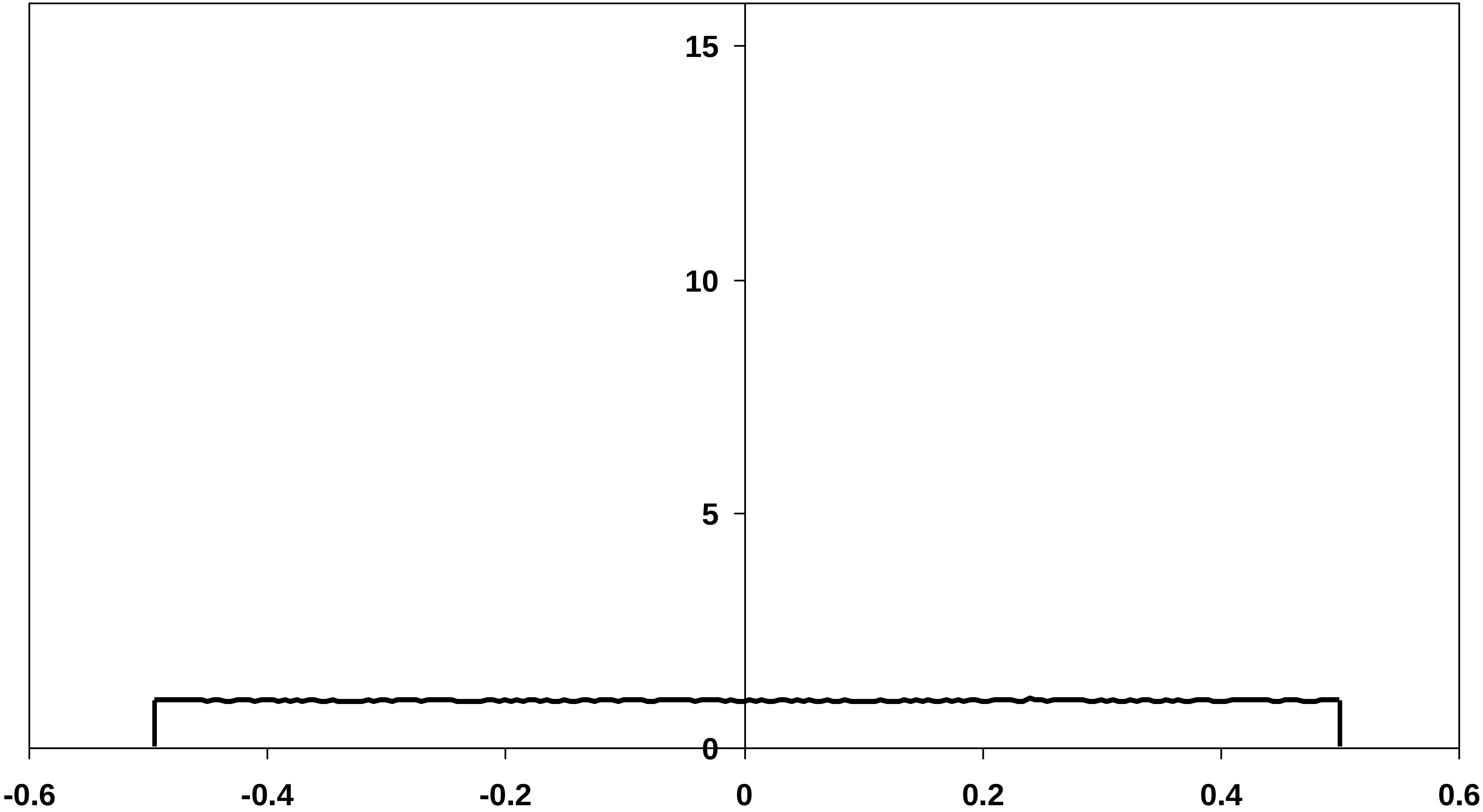
Teorema del limite centrale

Il Teorema del limite centrale ci viene in aiuto. Se X_i sono variabili casuali estratte indipendentemente dalla stessa distribuzione (la distribuzione di X), con media finita e varianza finita, la distribuzione di $\bar{X}$ converge ad una variabile casuale normale.

Allora possiamo applicare la statistica *t* e costruire gli intervalli di confidenza, se la dimensione campionaria è molto grande.

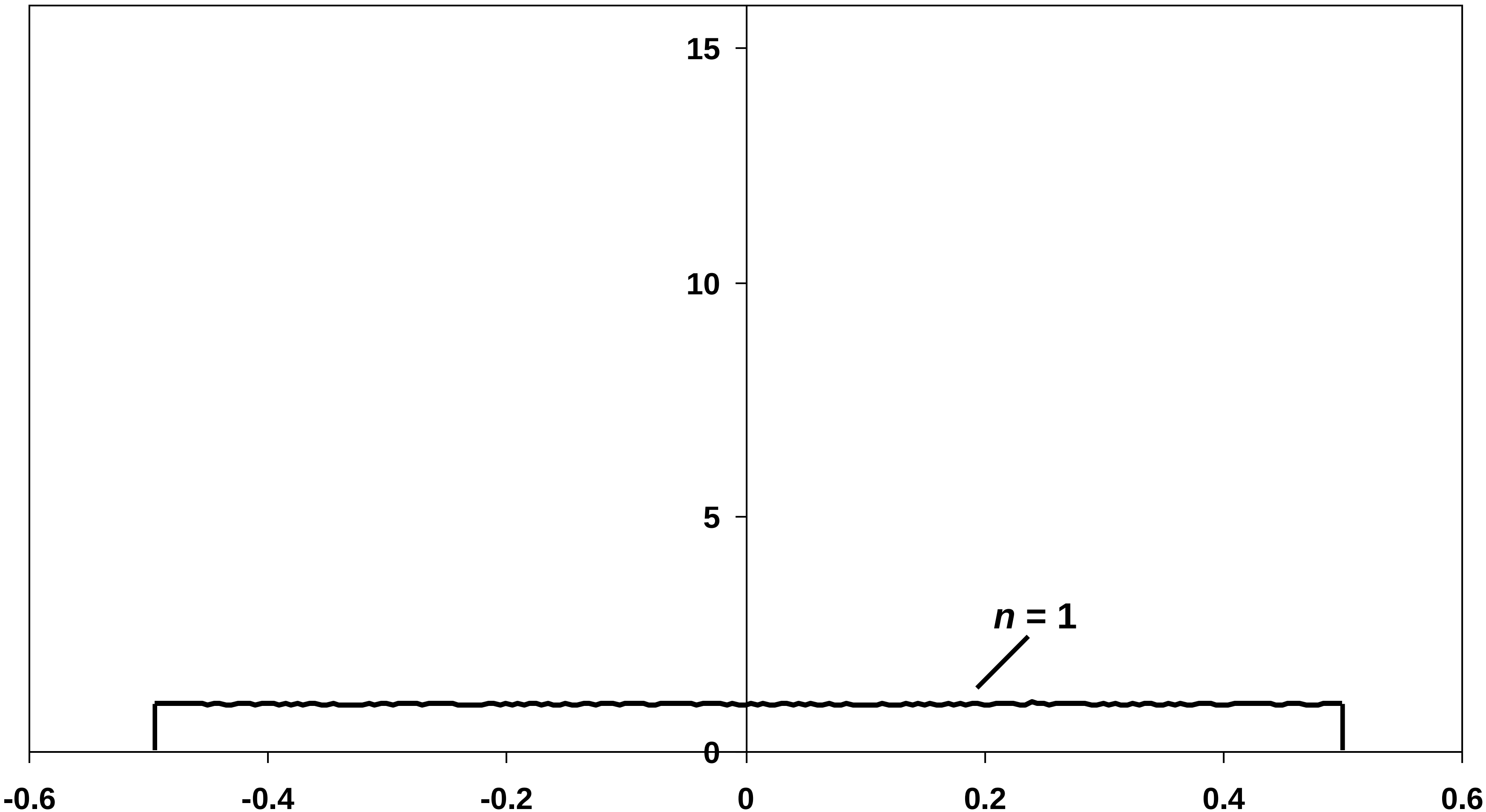
Quanto deve essere grande la dimensione campionaria affinché l'approssimazione ad una normale sia buona? Dipende dalla distribuzione di X e di solito può essere stabilito attraverso una simulazione.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: SIMULAZIONE E TLC



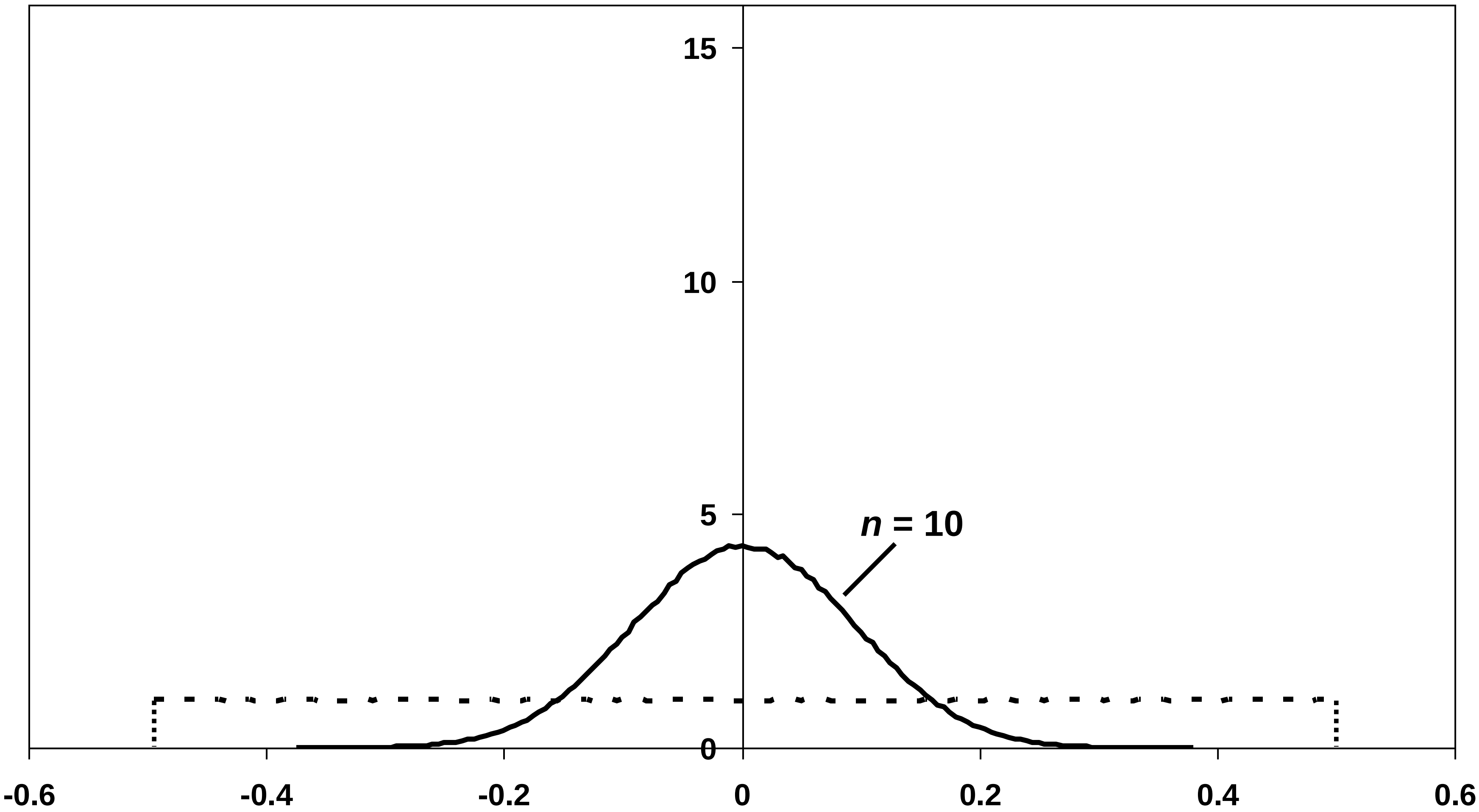
La figura mostra la distribuzione di una variabile casuale *X* di tipo uniforme che può assumere valori compresi tra –0.5 e 0.5, per un milione di campioni. La distribuzione uniforme assegna a ciascun valore all'interno del campo di variazione la stessa funzione di densità di probabilità.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: SIMULAZIONE E TLC



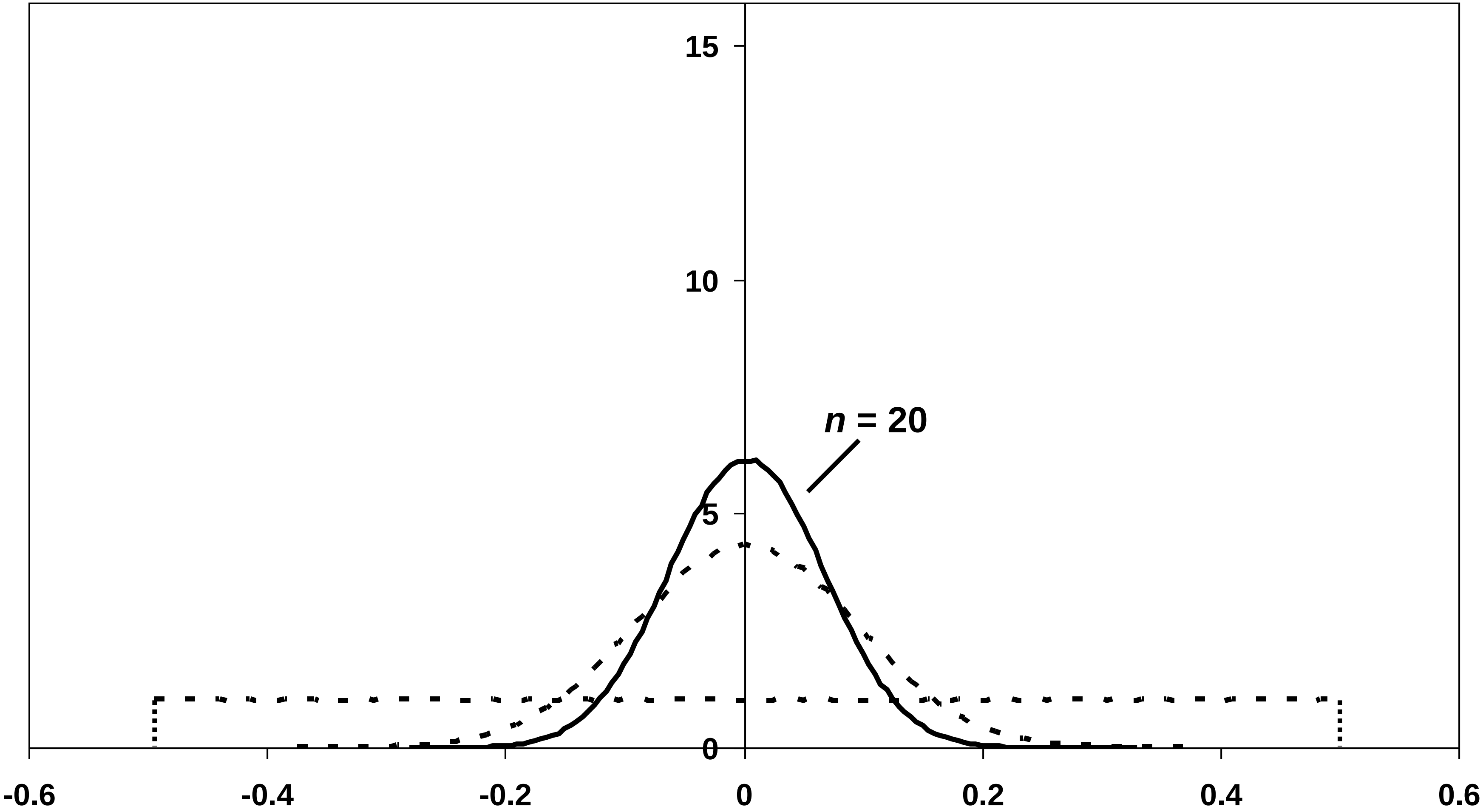
Per un campione di dimensione 1, la distribuzione di $\bar{X}$ è sempre uniforme

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: SIMULAZIONE E TLC



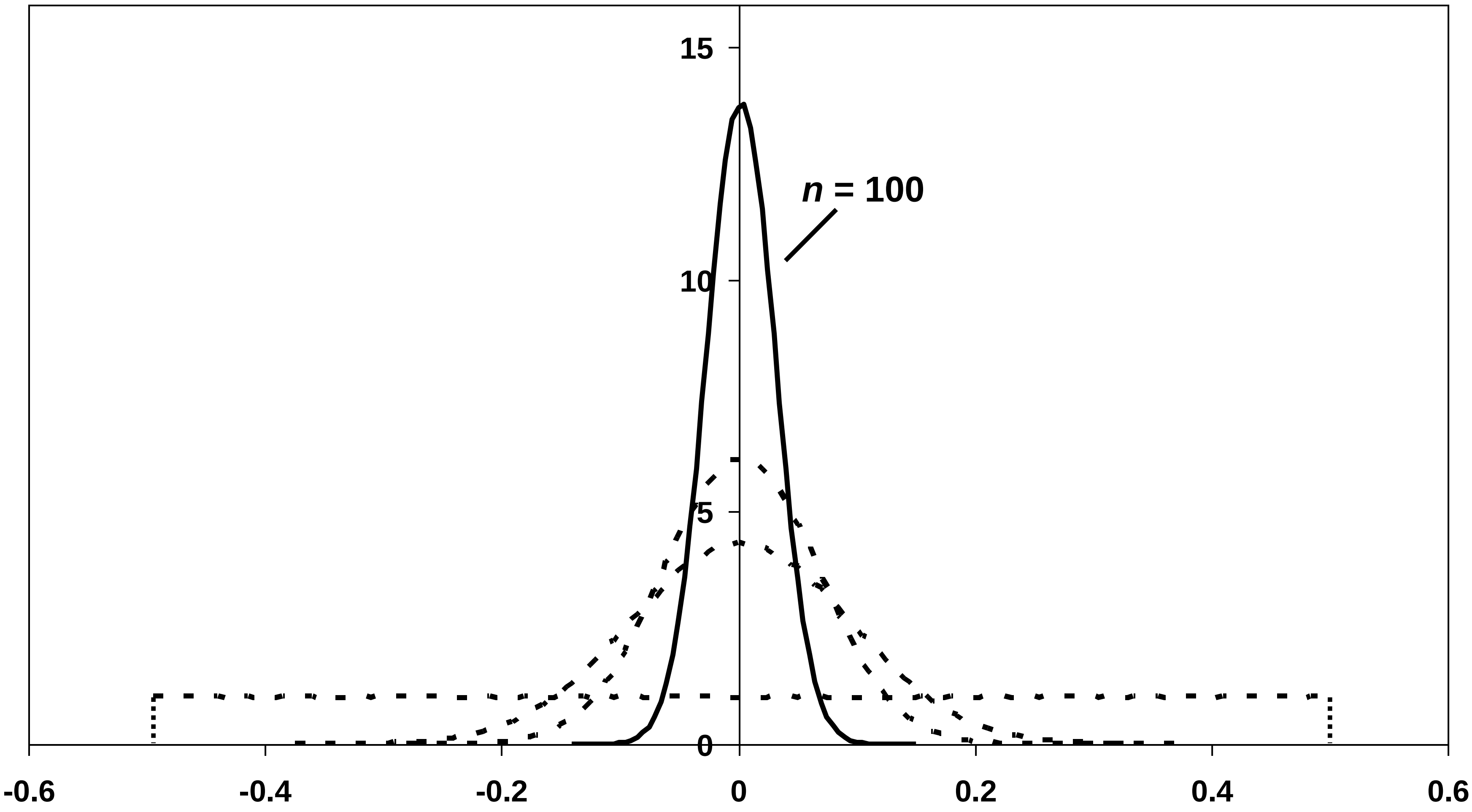
Mostriamo la distribuzione di $\bar{X}$ per una dimensione campionaria pari a 10, per un milione di campioni. Si può vedere che $\bar{X}$ ha una distribuzione molto simile a quella normale anche quando il campione è di piccole dimensioni.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: SIMULAZIONE E TLC



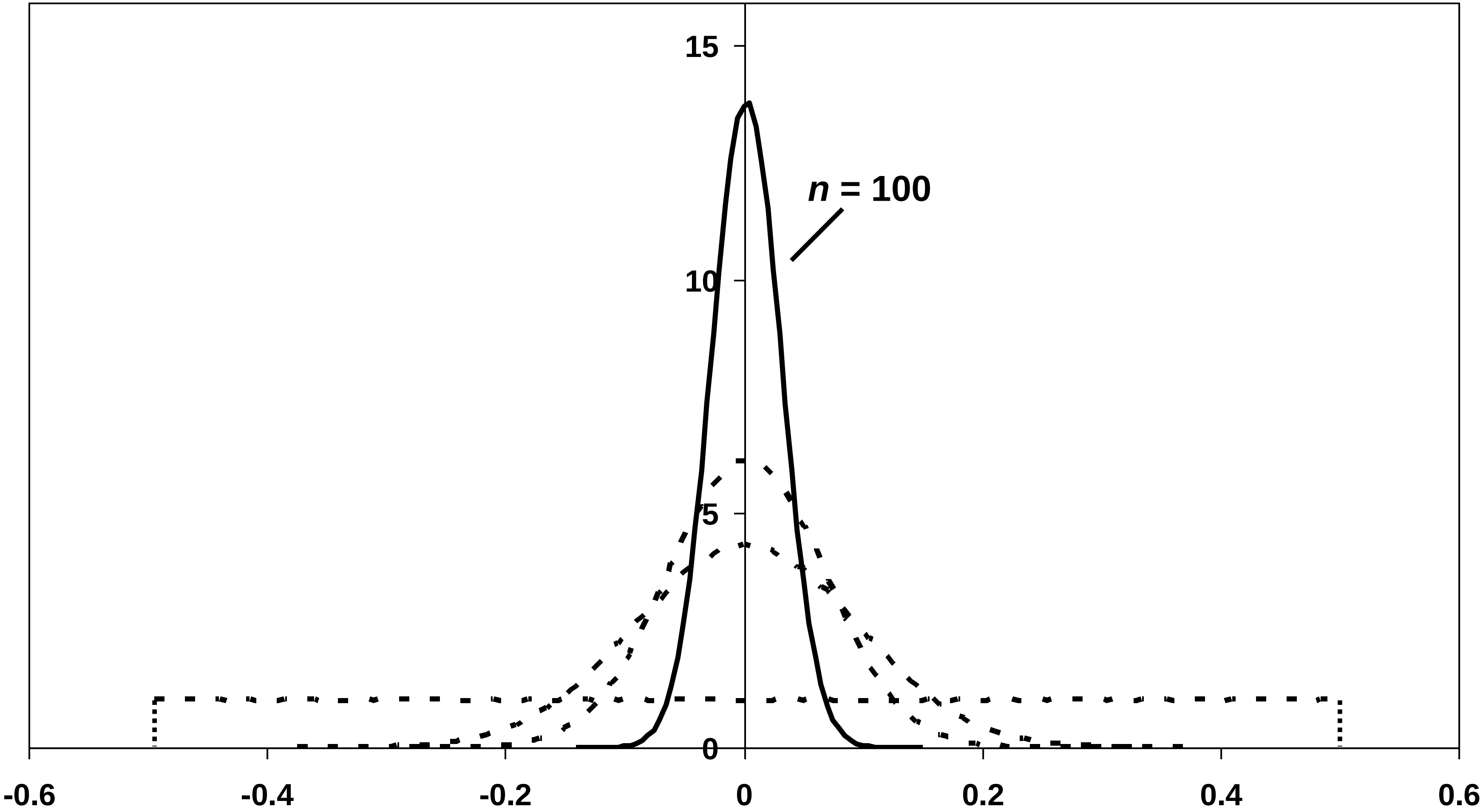
Qui riportiamo la distribuzione di $\bar{X}$ per un milione di campioni, ognuno di dimensione pari a e 20. È sempre più simile ad una normale.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: SIMULAZIONE E TLC



Qui riportiamo la distribuzione di $\bar{X}$ per un milione di campioni, ognuno di dimensione pari a e 100. La distribuzione è praticamente una normale.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: SIMULAZIONE E TLC



Se *X* avesse un'altra distribuzione, la dimensione campionaria richiesta per una buona approssimazione sarebbe differente. In genere per distribuzioni estreme la distribuzione della media campionaria tende a convergere rapidamente ad una normale e ciò ci consente di costruire i test e gli intervalli di confidenza.