PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA

Le proprietà asintotiche degli stimatori si riferiscono alle situazioni in cui il numero di osservazioni nel campione è molto elevato e tende all'infinito.

Ci concentreremo sui concetti di Convergenza in probabilità, consistenza, e teorema del limite centrale.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA

Le proprietà asintotiche degli stimatori si riferiscono alle situazioni in cui il numero di osservazioni nel campione è molto elevato e tende all'infinito.

Ci concentreremo sui concetti di Convergenza in probabilità, consistenza, e teorema del limite centrale.

Questi argomenti non vengono trattati in maniera approfondita nei libri di statistica, e di solito senza spiegare perché sono importanti.

Comunque, le proprietà asintotiche sono al centro delle analisi econometriche e quindi per gli studenti di econometria queste proprietà sono importanti.

Convergenza in probabilità

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - a\right| > \varepsilon\right) \to 0$$

Iniziamo con la definizione di convergenza in probabilità e poi faremo un esempio.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA

Convergenza in probabilità

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - a\right| > \varepsilon\right) \to 0$$

Una successione di variabili casuali X_n converge in probabilità ad una costante a se, dato un qualsiasi ε, piccolo a piacere, la probabilità di X_n - a in valore assoluto sia maggiore di ε tende a zero per n che tende ad infinito.

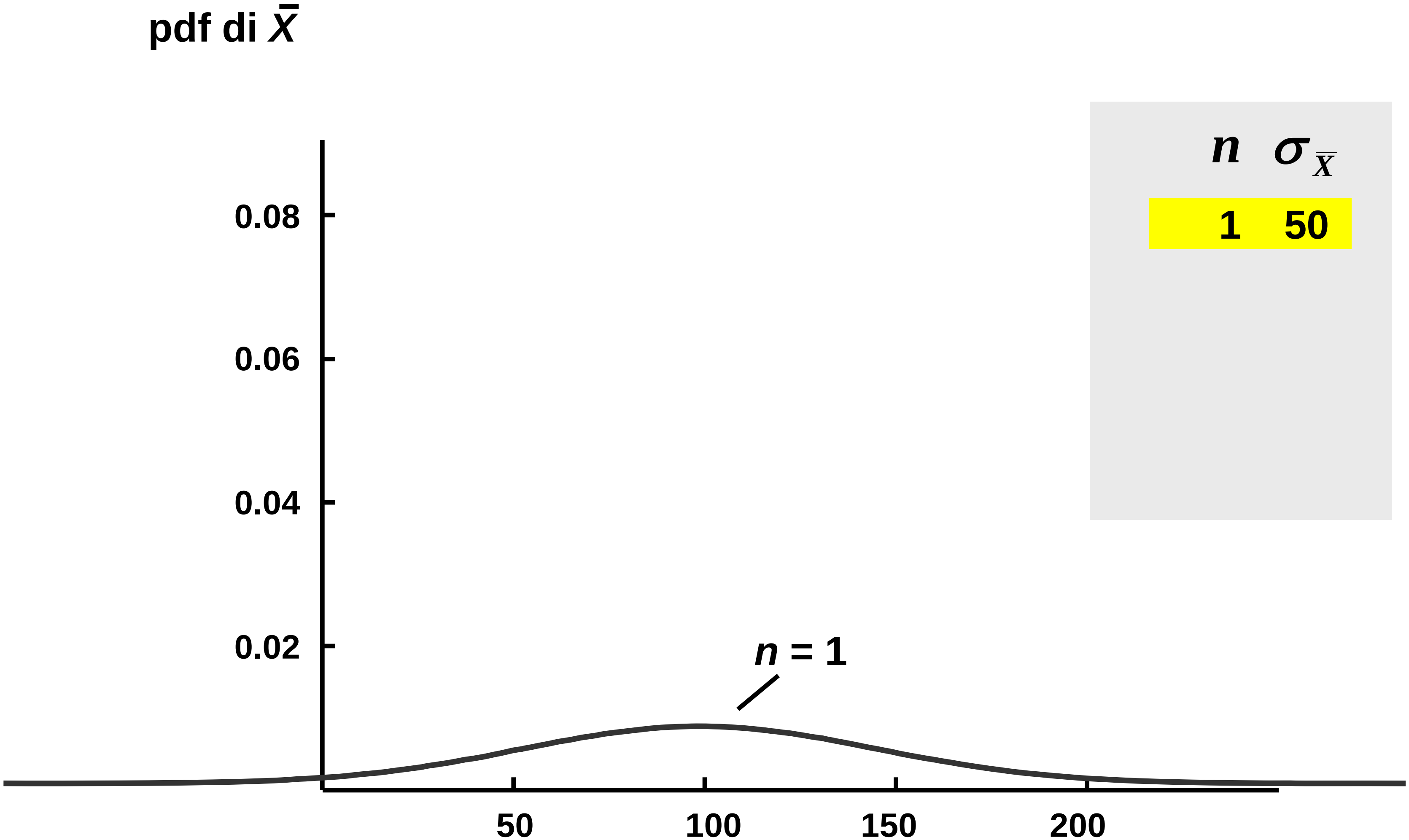
Convergenza in probabilità

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - a\right| > \varepsilon\right) \to 0$$

$$\text{plim}\ X_n = a$$

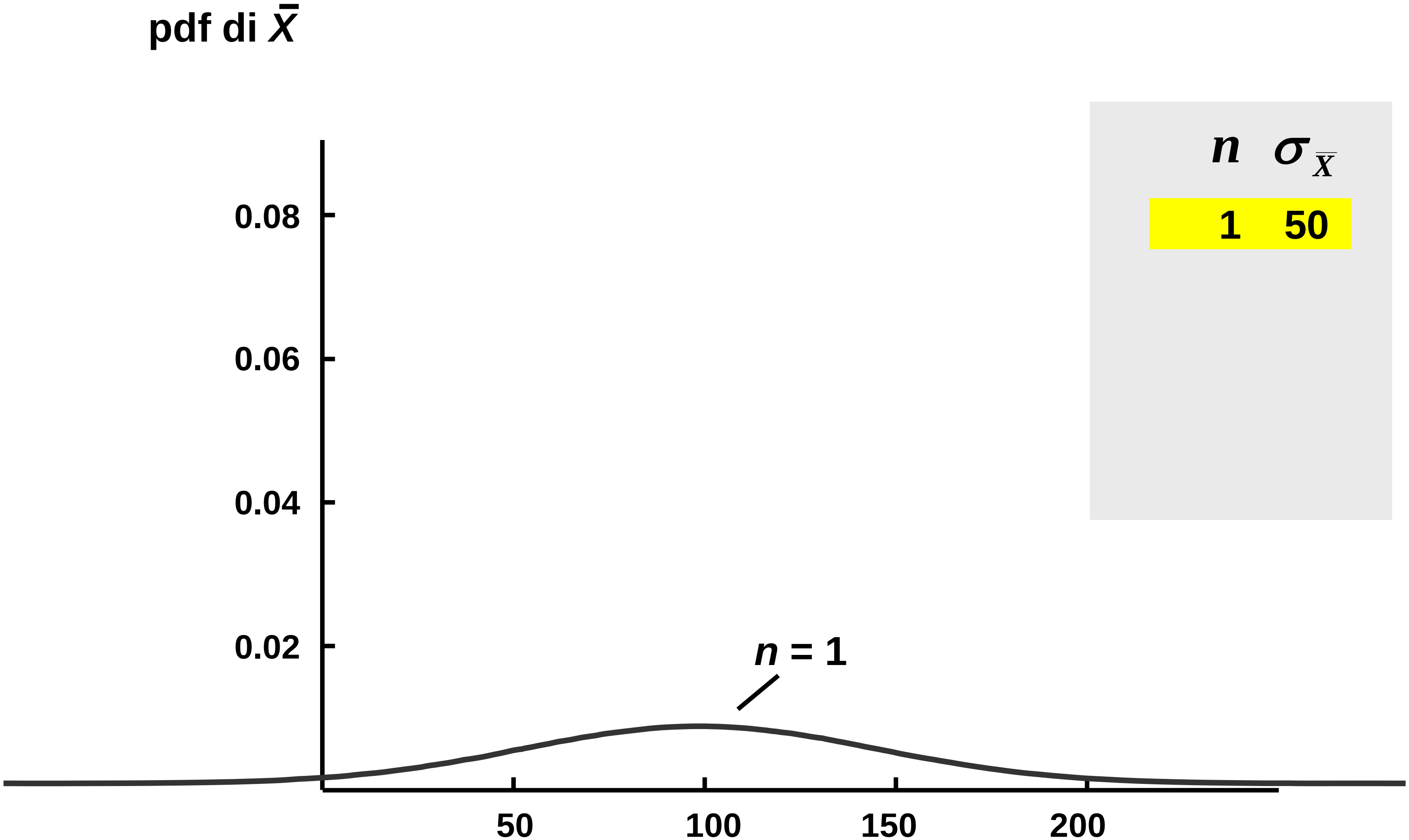
La convergenza in probabilità di una successione di variabili casuali viene abbreviata come plim (vedi sopra).

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA



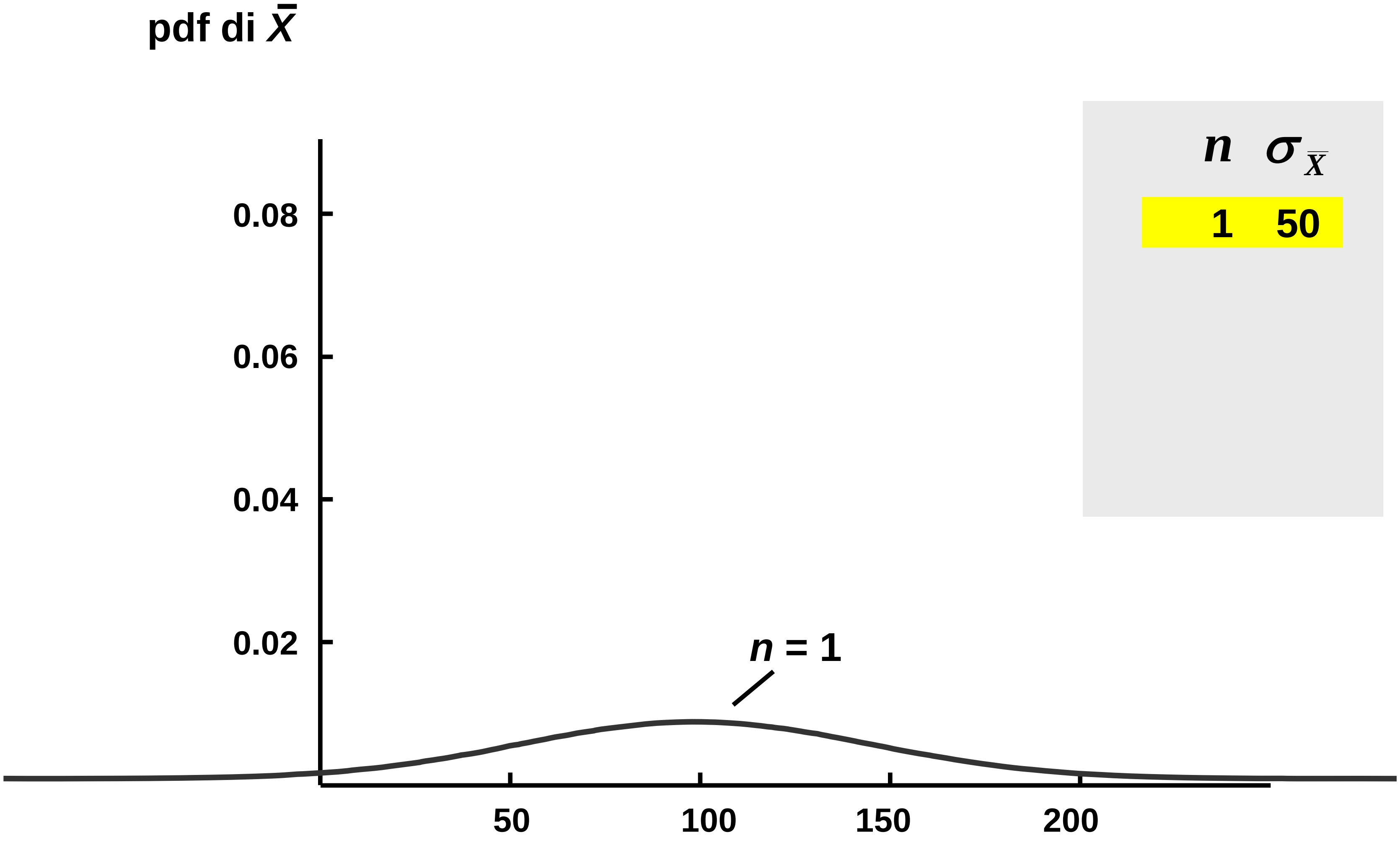
n	$\sigma_{\bar{X}}$
1	50

Prendiamo come esempio la media campionaria relativamente ad un campione di *n* osservazioni , $\bar{X}$, generati da una variabile casuale *X* con media della popolazione μ_X e varianza σ^2_X. Vedremo come $\bar{X}$ si comporta all'aumentare della dimensione campionaria *n*.



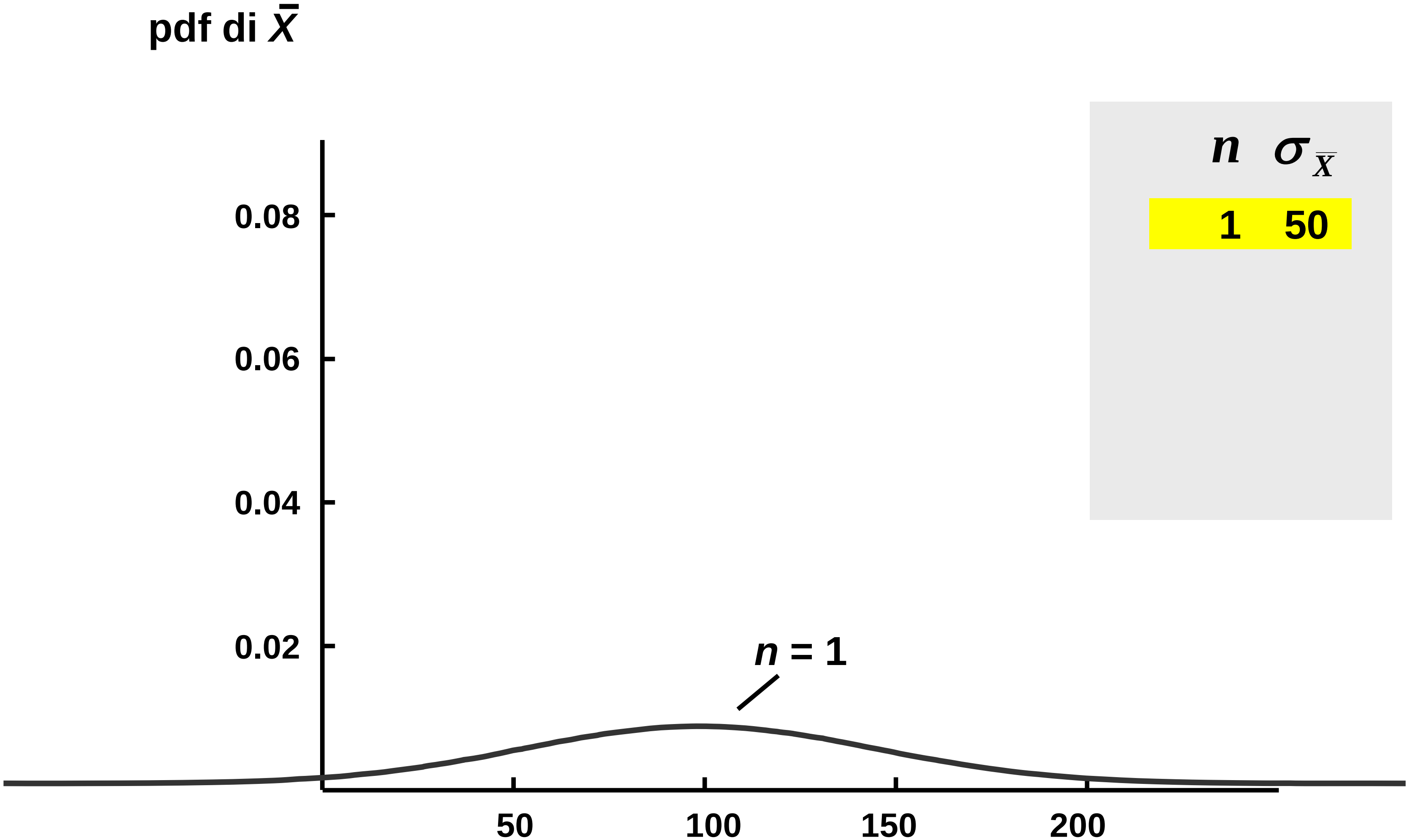
Per semplicità assumiamo che X abbia una distribuzione normale (quest'ipotesi non condiziona l'analisi). Se X ha una distribuzione normale con media μ_X e varianza σ^2_X, $\bar{X}$ avrà una distribuzione normale con media μ_X e varianza σ^2_X / n.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA



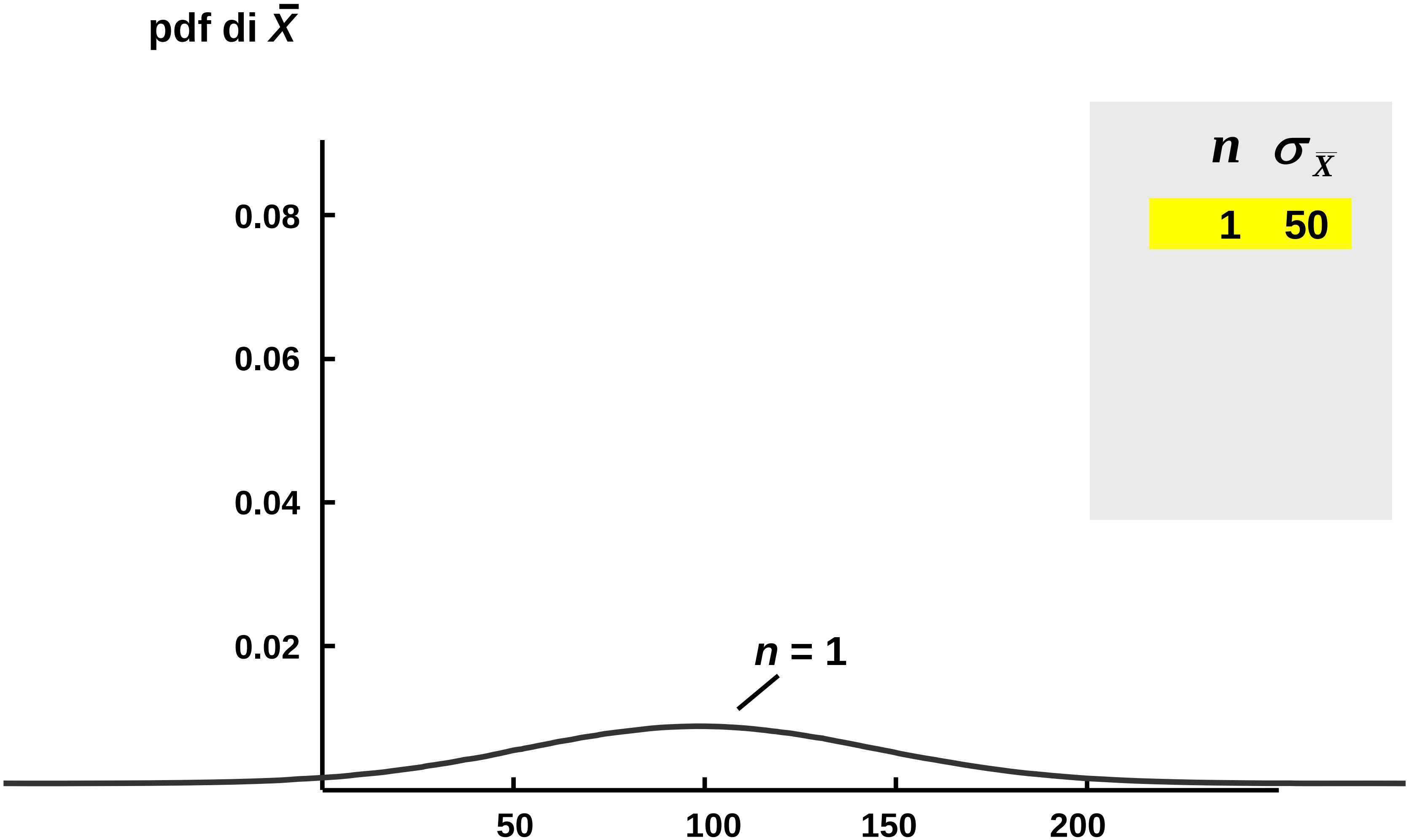
Supponiamo, inoltre, che X abbia media 100 e standard deviation 50, come mostrato nel diagramma.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA



La media campionaria avrà la stessa media di *X*, ma una deviazione standard pari a $50/\sqrt{n}$, dove *n* è il numero di osservazioni del campione.

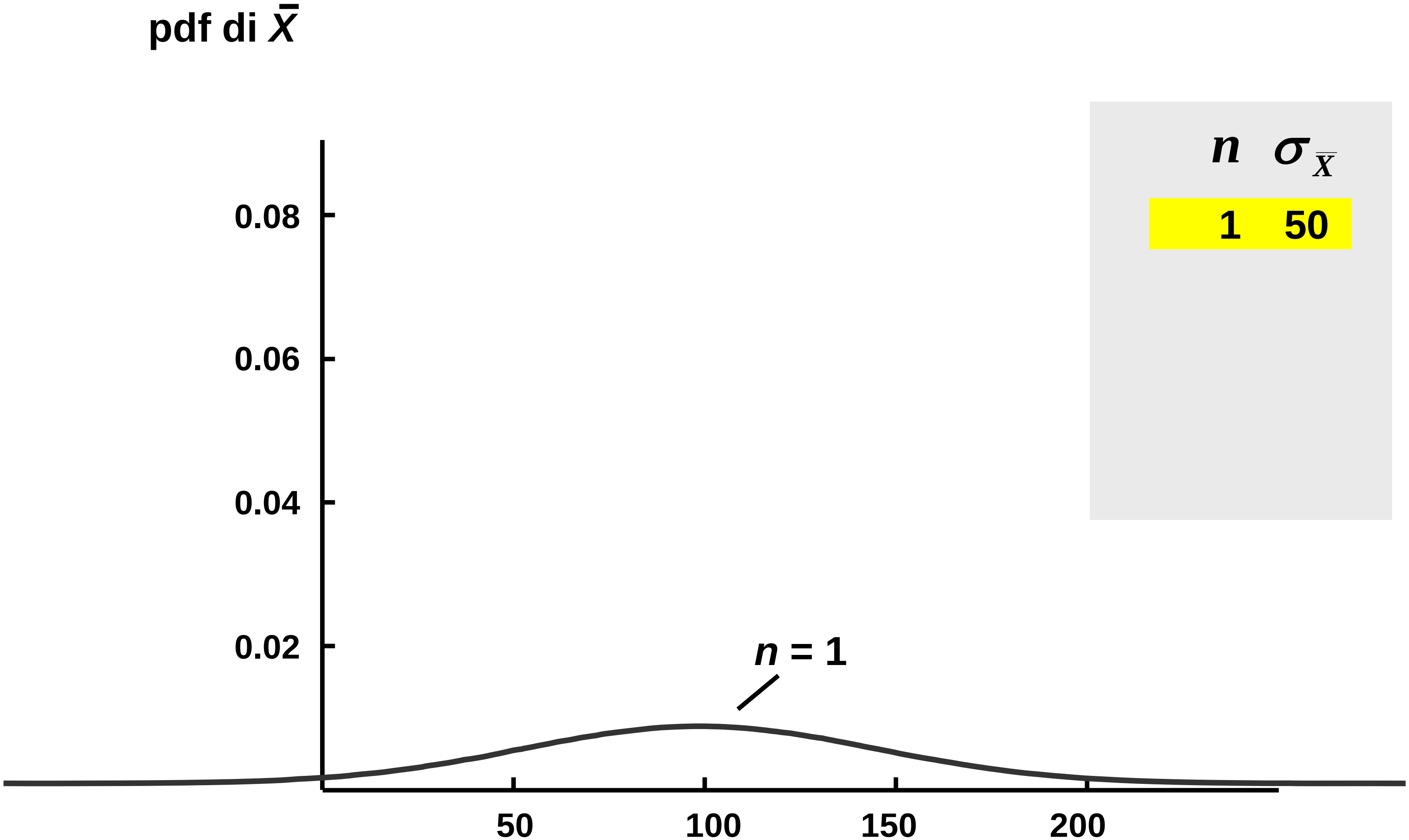
PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA



n	$\sigma_{\bar{X}}$
1	50

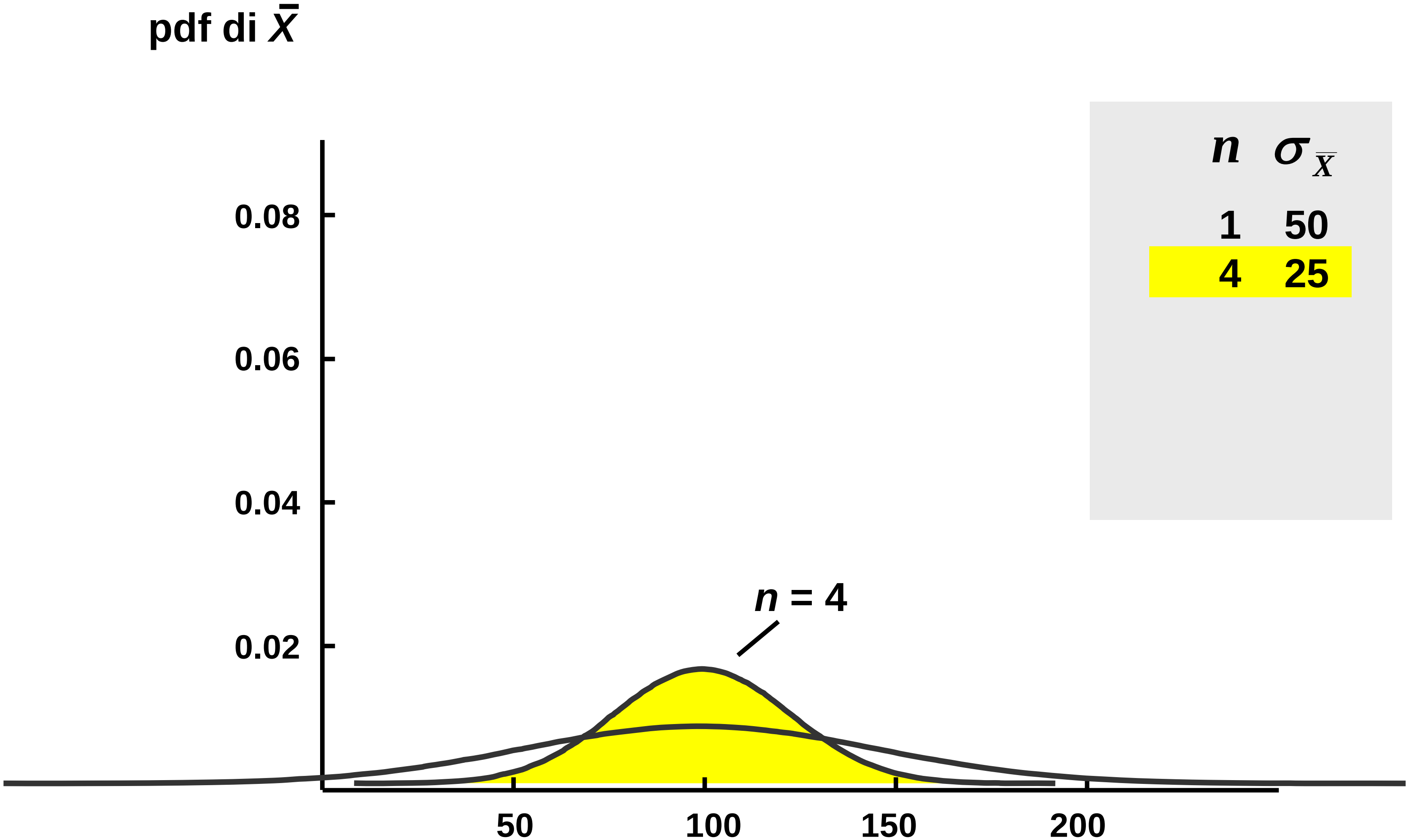
Più grande è il campione, più piccola sarà la deviazione standard della media campionaria.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA



Se n è uguale a 1, il campione consiste di una singola osservazione. X è identico a $\bar{X}$ e la sua standard deviation è 50.

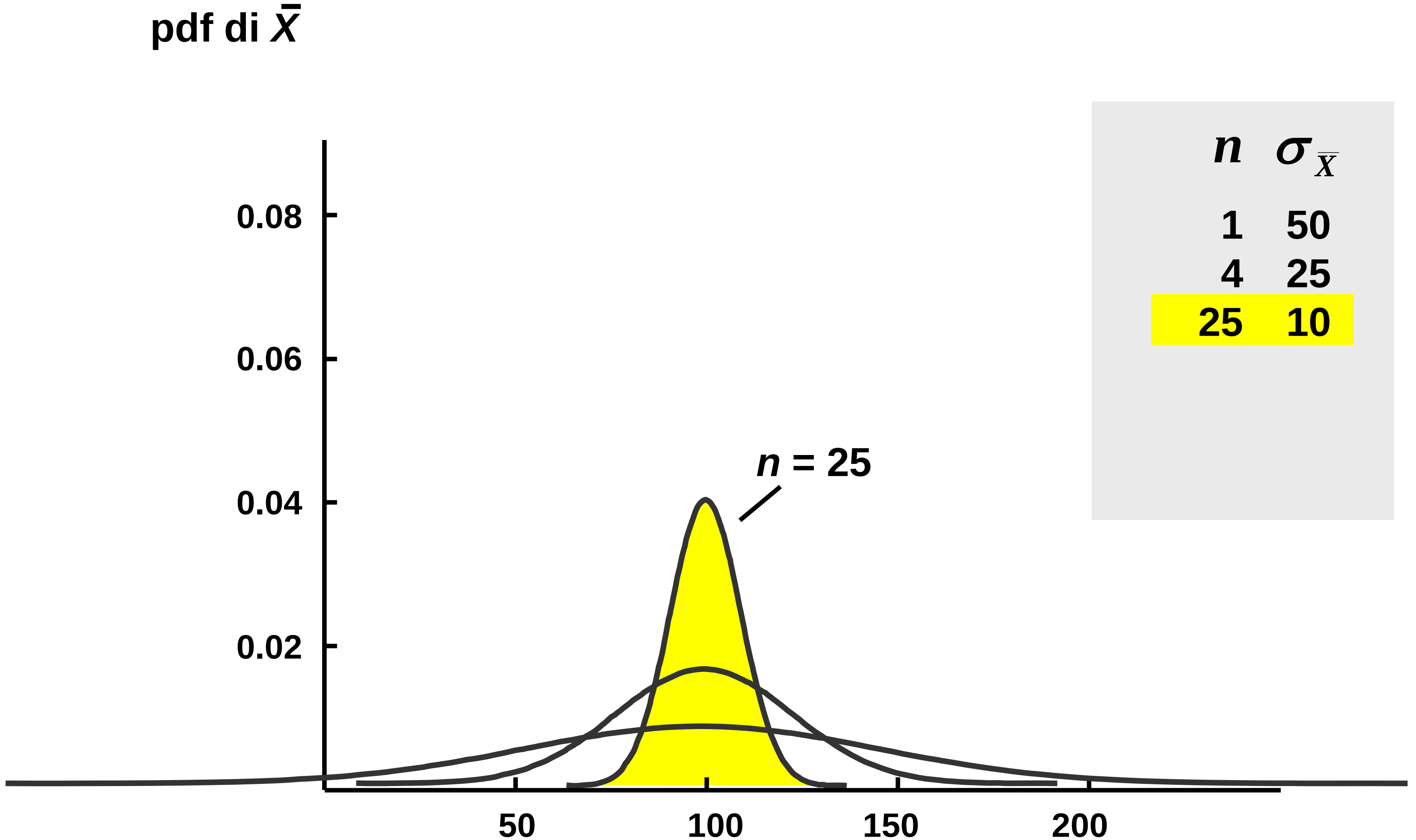
PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA



n	$\sigma_{\bar{X}}$
1	50
4	25

Vediamo come la forma della distribuzione cambia all'aumentare della dimensione campionaria.

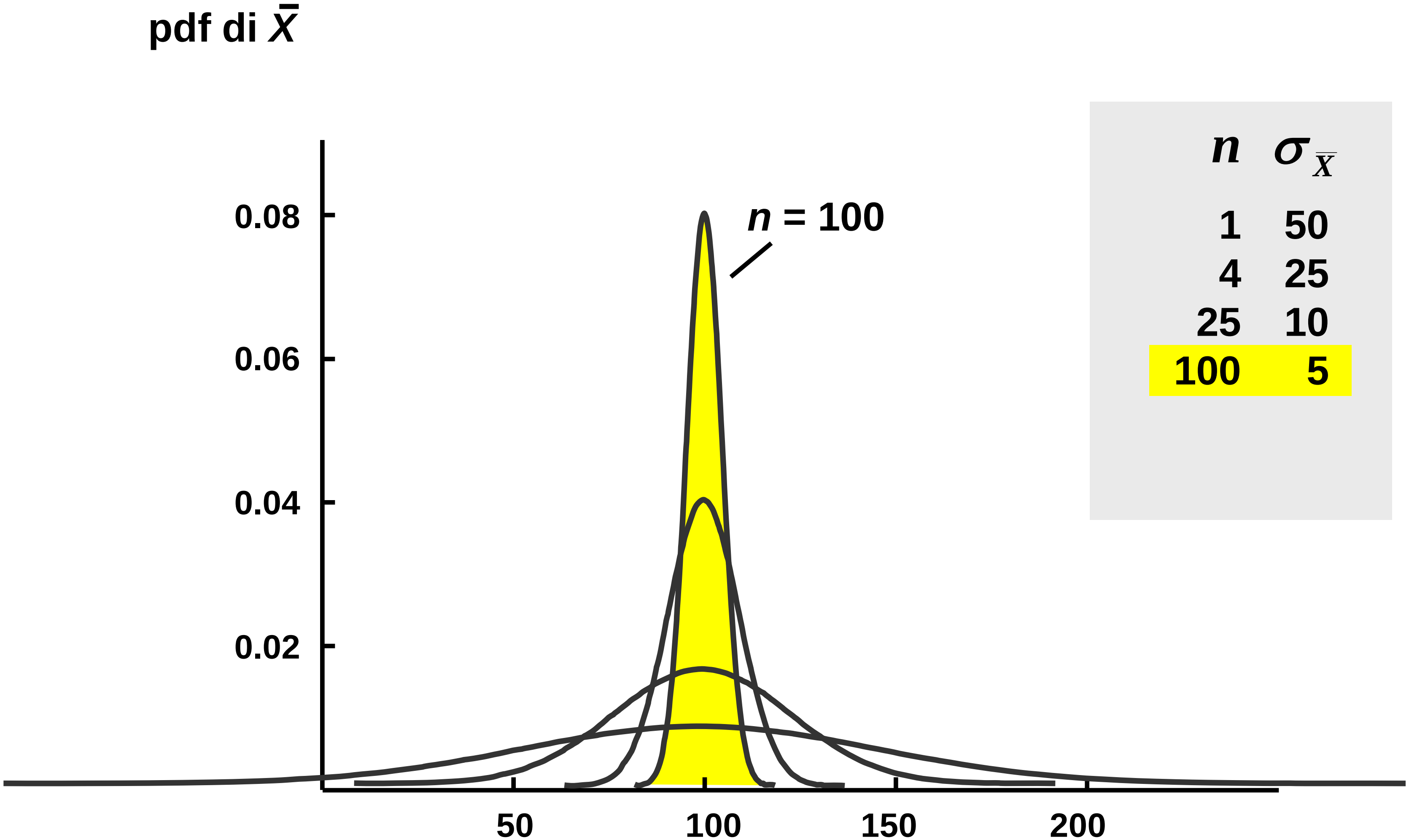
PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA



n	$\sigma_{\bar{X}}$
1	50
4	25
25	10

La distribuzione diventa sempre più concentrata attorno alla media della popolazione.

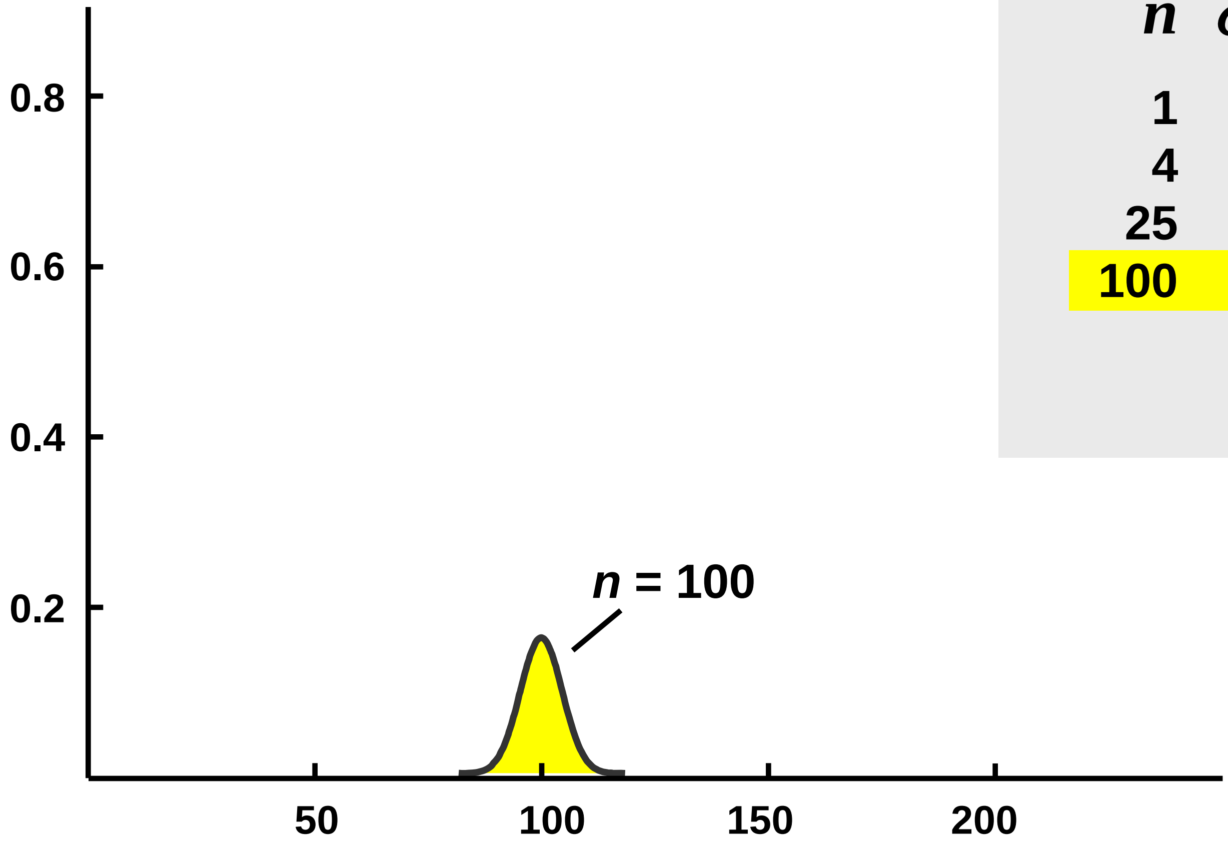
PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA



Per vedere cosa succede per n maggiore di 100 occorre cambiare la scala verticale.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA

pdf di $\bar{X}$

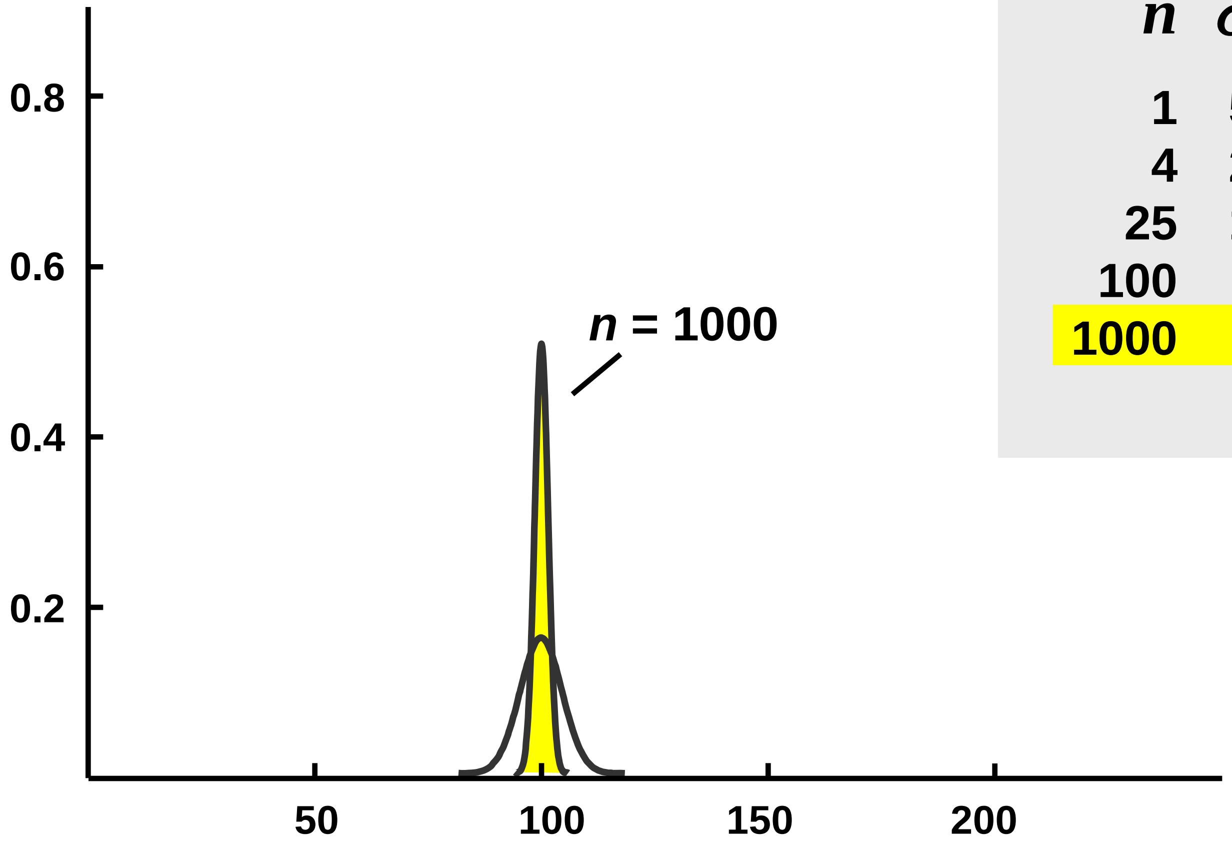


n	$\sigma_{\bar{X}}$
1	50
4	25
25	10
100	5

Abbiamo incrementato la scala verticale moltiplicato per 10.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA

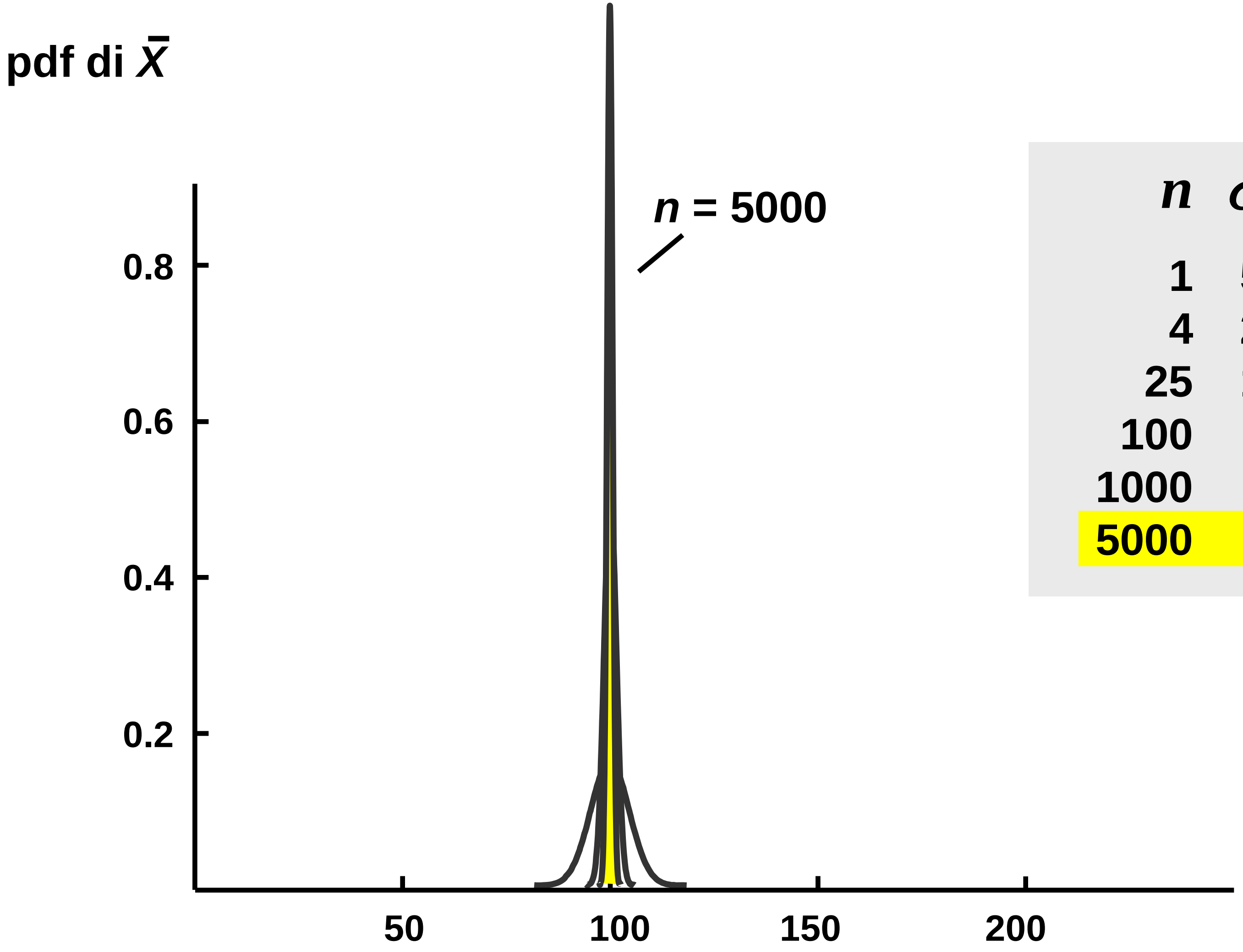
pdf di $\bar{X}$



n	$\sigma_{\bar{X}}$
1	50
4	25
25	10
100	5
1000	1.6

La distribuzione tende sempre di più a concentrarsi attorno alla media della popolazione.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA



n	$\sigma_{\bar{X}}$
1	50
4	25
25	10
100	5
1000	1.6
5000	0.7

Per *n* molto elevato, la varianza della distribuzione tende a zero. La distribuzione diventa uno "spike" presso il valore vero del parametro. Il plim della media campionaria è quindi la media della popolazione.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X} - \mu_X\right| > \varepsilon\right) \to 0$$

Formalmente, la probabilità di $\overline{X}$ differisca da μ_X per una quantità molto piccola tende a zero al crescere di *n*.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\overline{X} - \mu_X\right| > \varepsilon\right) \to 0$$

$$\text{plim } \overline{X} = \mu_X$$

Quindi possiamo dire che plim $\overline{X} = \mu_X$.

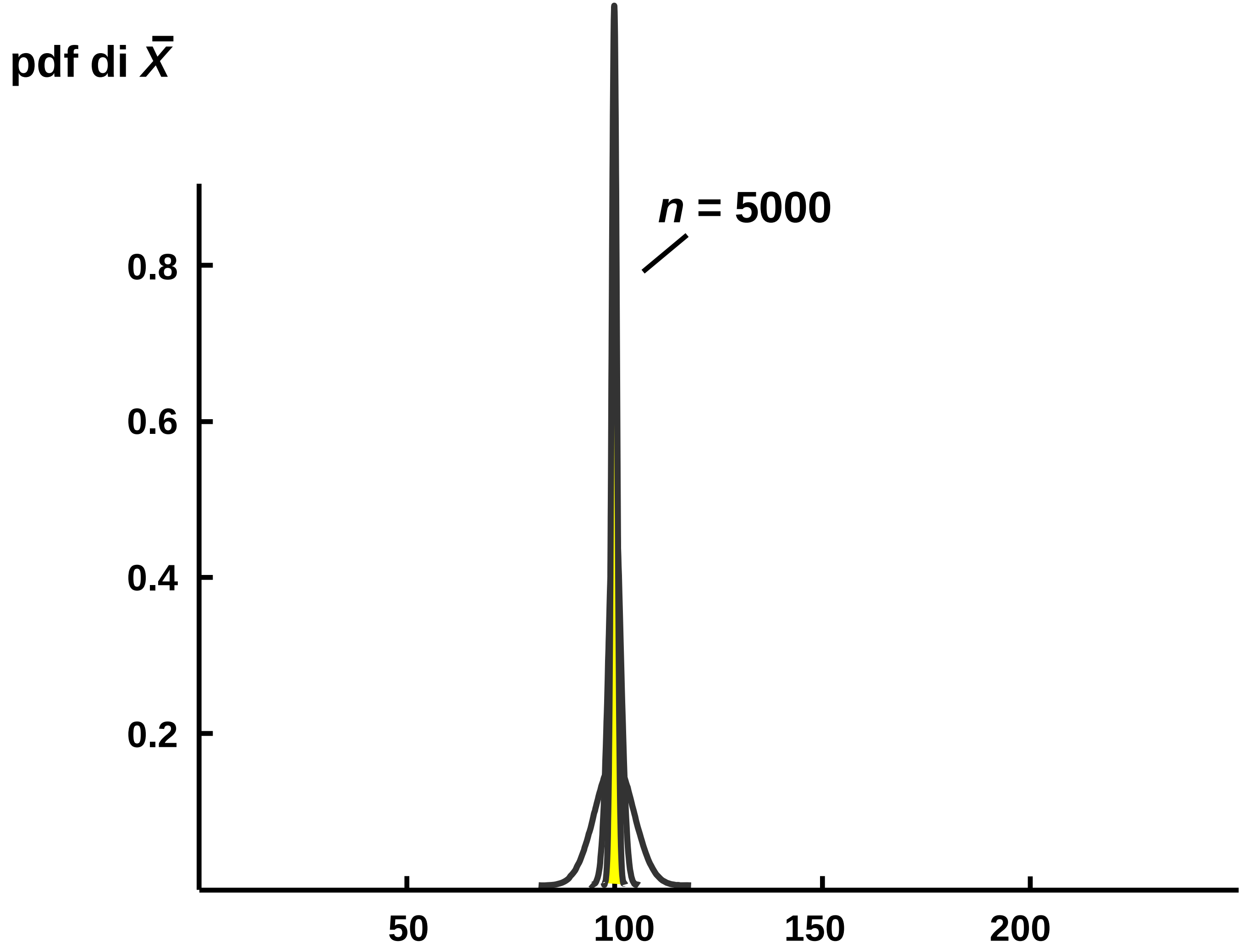
Consistenza

Uno stimatore di un parametro della popolazione è consistente se soddisfa due condizioni:

(1) Esso converge in probabilità, e quindi la sua distribuzione presenta uno spike all'aumentare della dimensione campionaria, e

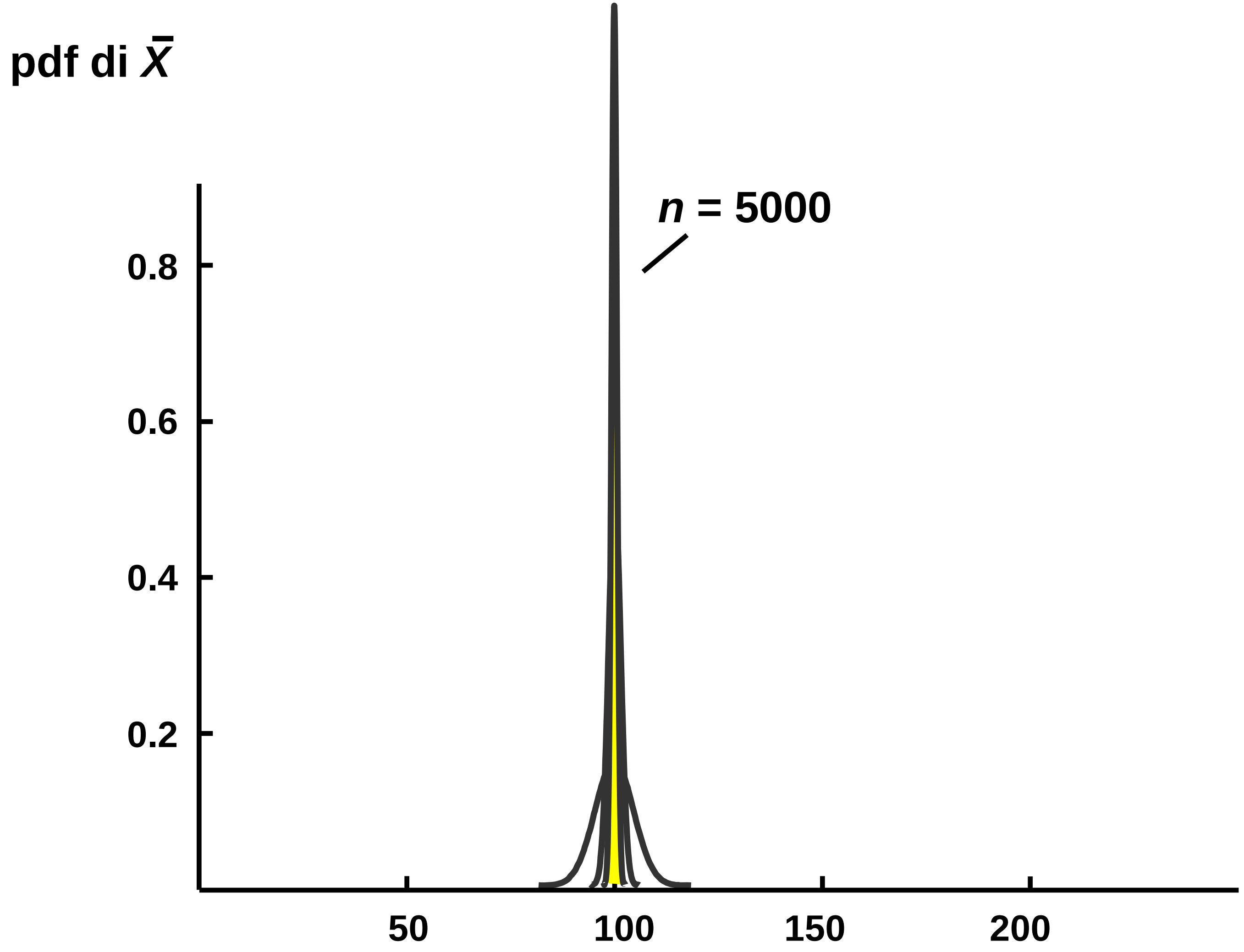
(2) Lo spike è localizzato presso il vero valore del parametro della popolazione.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA



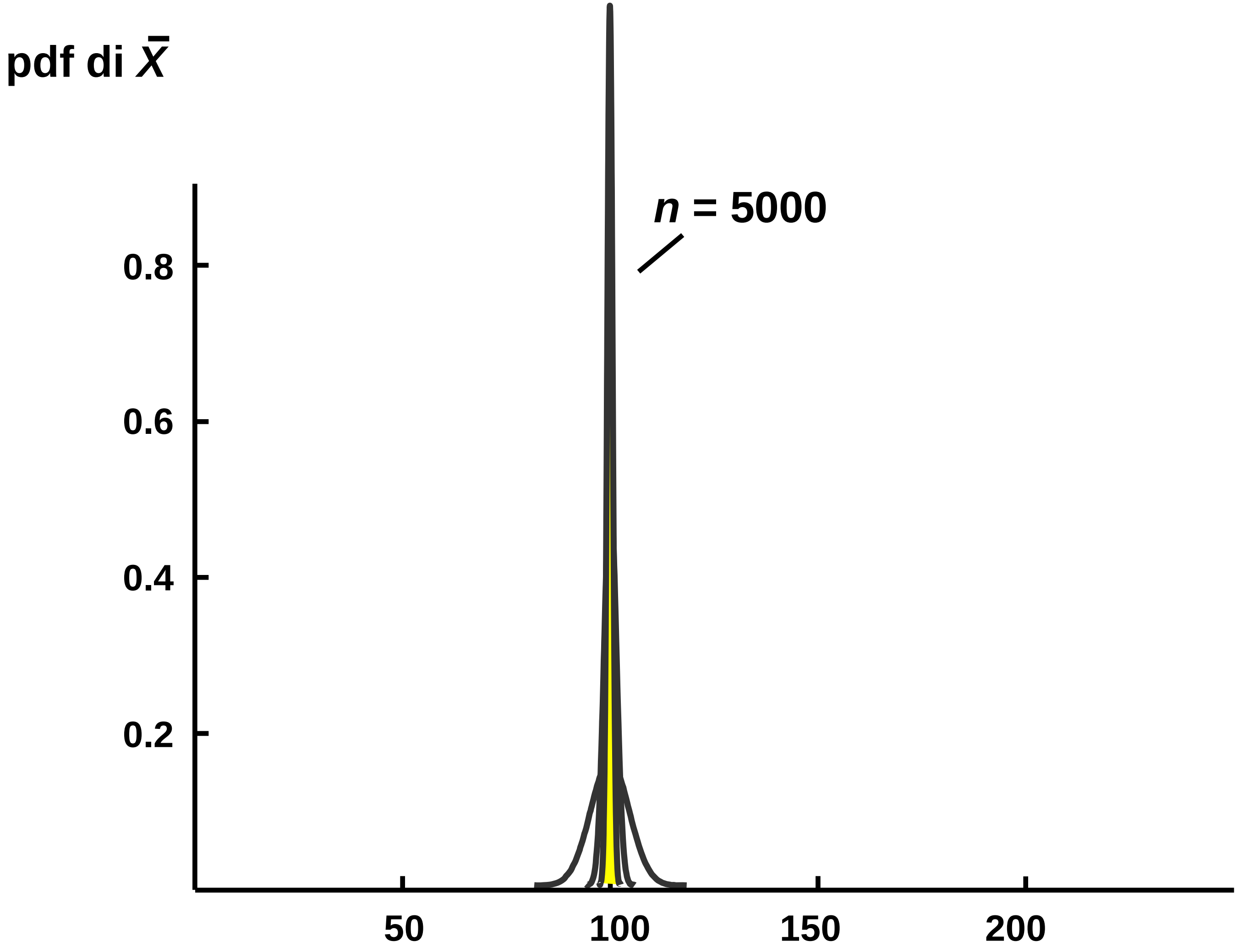
La media campionaria nel nostro esempio soddisfa entrambe le condizioni e quindi è uno stimatore consistente di μ_X. Molti stimatori standard soddisfano la prima condizione perchè la loro varianza tende a zero all'aumentare della dimensione campionaria.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA



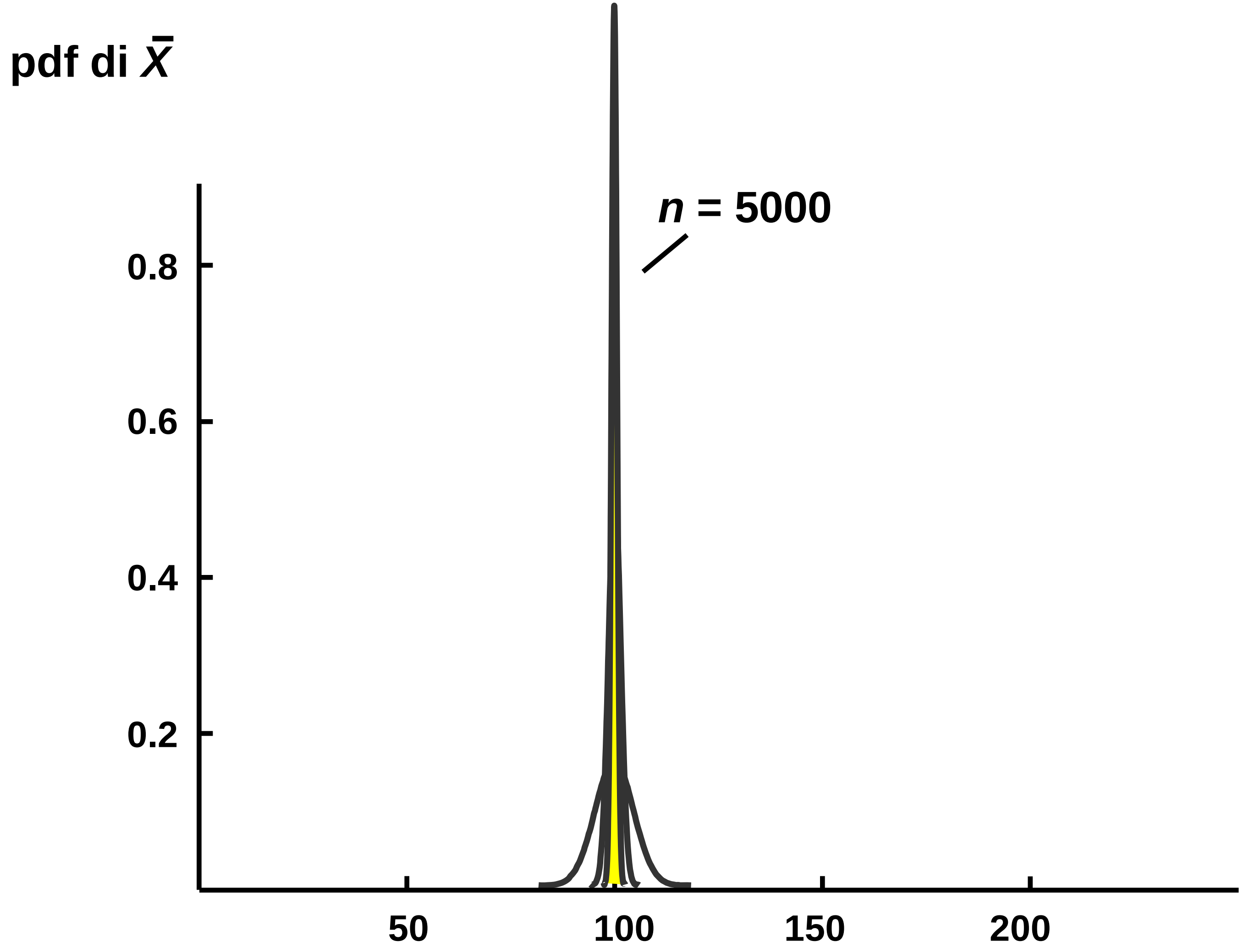
Il problema vero è se la distribuzione tende a concentrarsi attorno al vero parametro della popolazione. Una condizione sufficiente per la consistenza è che lo stimatore deve essere corretto (o asintoticamente corretto) e la sua varianza tende a zero all'aumentare di *n* (n tende all'infinito).

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA



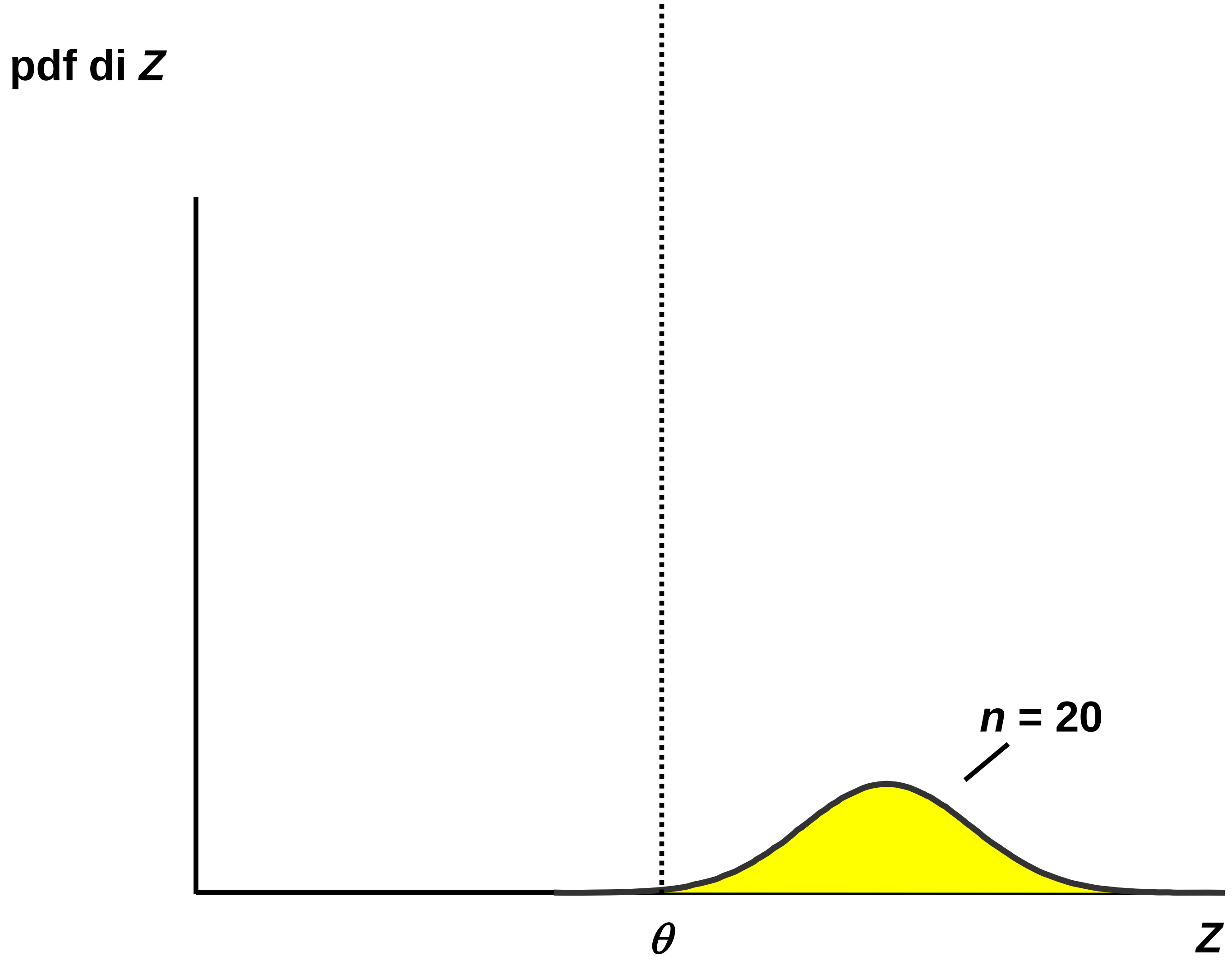
É facile capire perché questa condizione è soltanto sufficiente. Se uno stimatore è corretto per un campione finito lo sarà anche al crescere della numerosità campionaria.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA



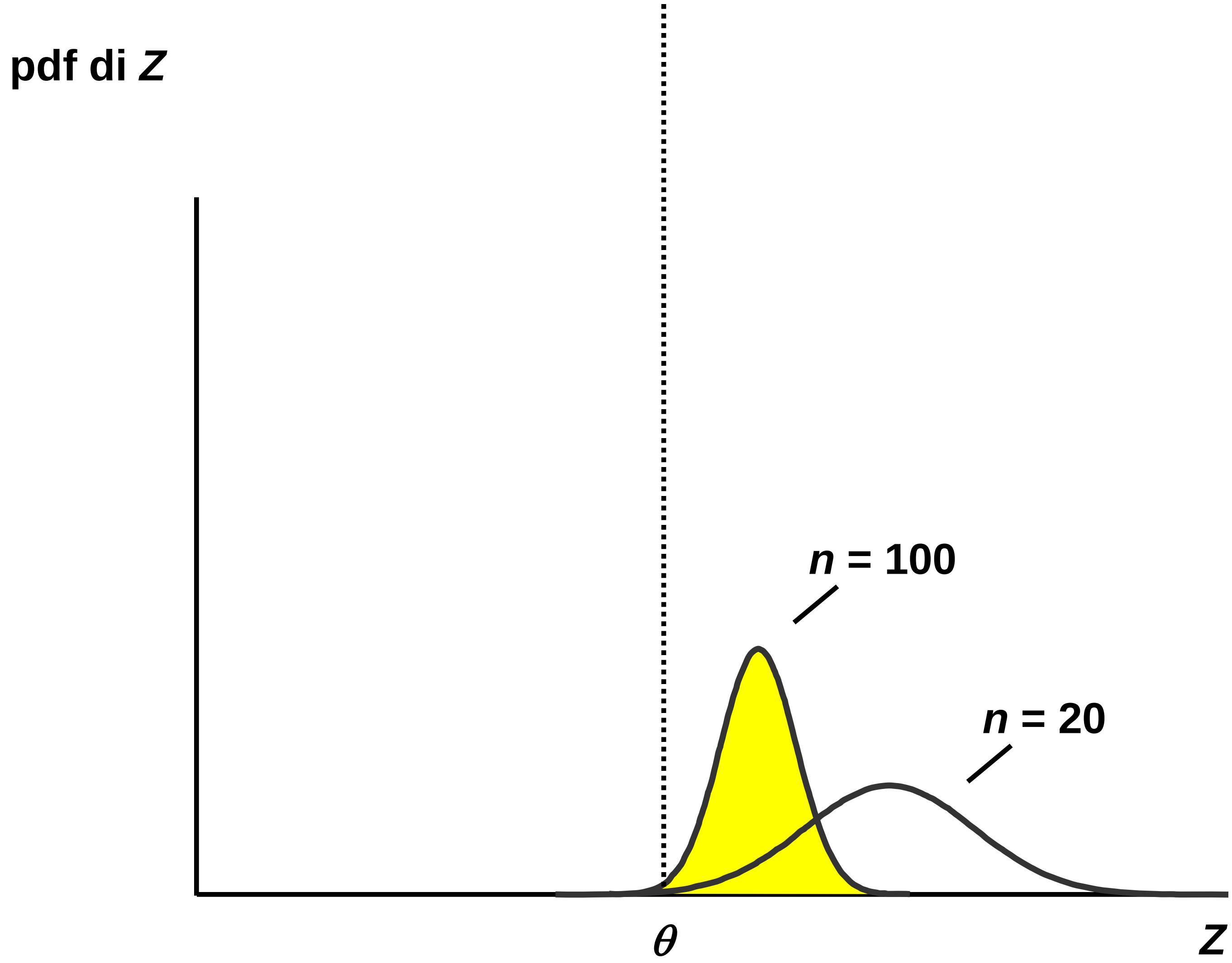
Se la varianza della sua distribuzione è decrescente allora la sua distribuzione tende a divenire uno spike. Dal momento che lo stimatore rimane corretto, questo spike deve essere localizzato presso il parametro della popolazione. La media campionaria è un esempio di uno stimatore che soddisfa questa condizione sufficiente.

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA



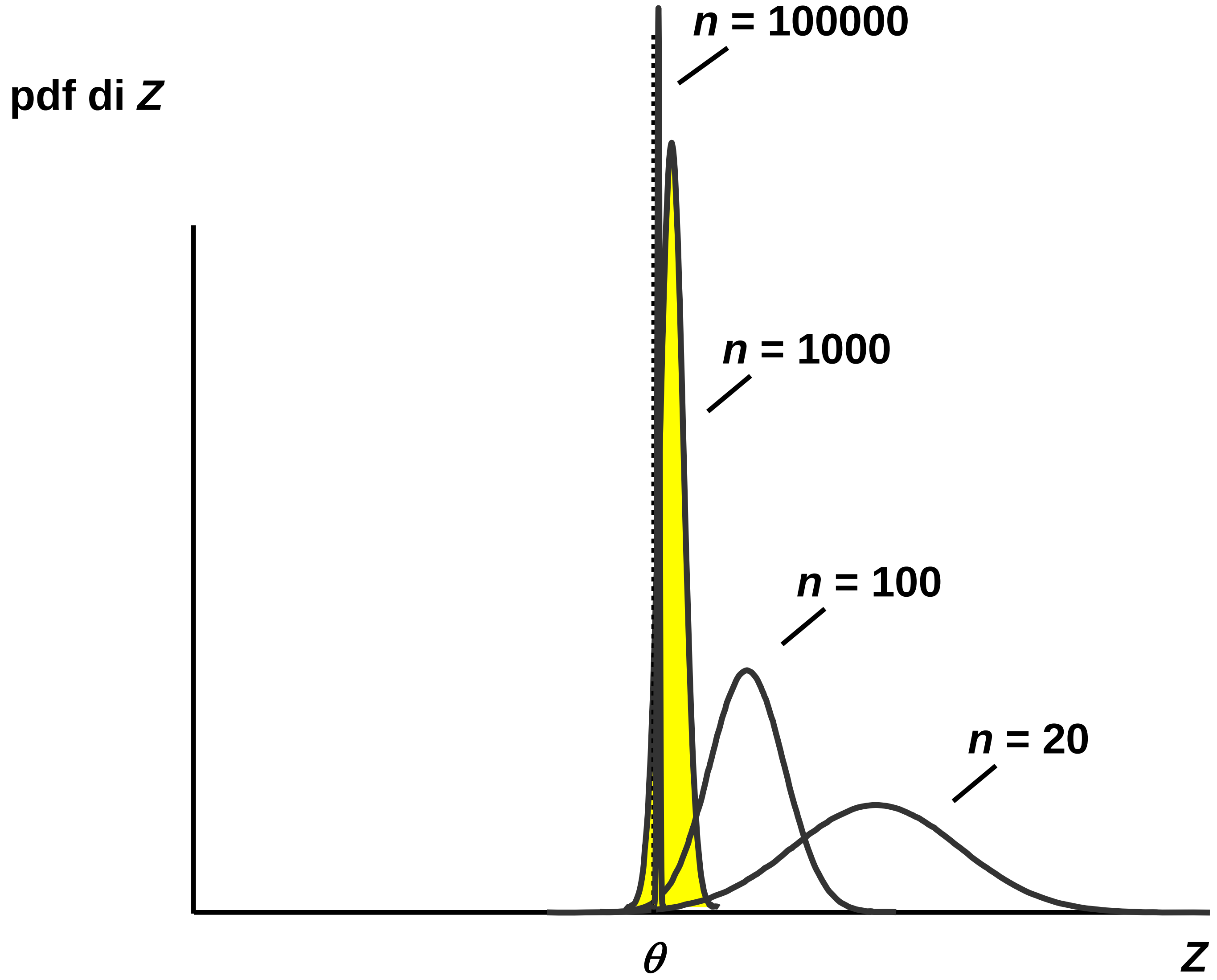
Comunque la condizione è solo sufficiente, non necessaria. É possibile che uno stimatore sia distorto in un campione finito …

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA



… ma la distorsione diventa più piccola all'incrementare della dimesnione campionaria…

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEGLI STIMATORI: PLIM E CONSISTENZA



… fino al punto in cui la distorsione scompare quando *n* tende all'infinito. Tale stimatore è distorto per un campione finito, ma è consistente perchè la sua distribuzione tende ad avere uno spike presso il vero valore del parametro.

Consistenza

$$Z = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Un esempio di uno stimatore distorto per campioni finiti, ma consistente. Supponiamo che X sia una variabile casuale con media della popolazione μ_X e che il nostro obiettivo sia quello di stimare μ_X.

Consistenza

$$Z = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i .$$

$$E(Z) = \frac{n}{n+1}\mu_X .$$

Lo stimatore è distorto per campioni finiti, perché il suo valore atteso è $n\mu_X/(n+1)$. Ma quando n tende all'infinito, $n/(n+1)$ tende a 1 e lo stimatore diventa asintoticamente corretto.

Consistenza

$$Z = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i .$$

$$E(Z) = \frac{n}{n+1}\mu_X .$$

$$\mathrm{var}(Z) = \frac{n}{(n+1)^2}\sigma_X^2$$

La varianza dello stimatore è riportata sopra. Essa tende a zero quando *n* tende all'infinito. Quindi *Z* è consistente perchè la sua varianza tende a zero.

Consistenza

In pratica noi lavoriamo con campioni finiti e mai con quelli infiniti. Quindi perché siamo interessati nel vedere se uno stimatore è consistente?

Consistenza

In pratica noi lavoriamo con campioni finiti e mai con quelli infiniti. Quindi perché siamo interessati nel vedere se uno stimatore è consistente?

Una ragione è che a volte è impossibile definire uno stimatore che sia coretto per campioni finiti. Se si trova uno stimatore che è almeno consistente ciò è meglio di non produrre nessuna stima.

Consistenza

In pratica noi lavoriamo con campioni finiti e mai con quelli infiniti. Quindi perché siamo interessati nel vedere se uno stimatore è consistente?

Una ragione è che a volte è impossibile definire uno stimatore che sia coretto per campioni finiti. Se si trova uno stimatore che è almeno consistente ciò è meglio di non produrre nessuna stima.

Una seconda ragione è che non siamo in grado di calcolare il valore atteso dello stimatore. Il valore atteso è uno strumento analitico “debole” che può essere applicato in contesti relativamente semplici.

Consistenza

In pratica noi lavoriamo con campioni finiti e mai con quelli infiniti. Quindi perché siamo interessati nel vedere se uno stimatore è consistente?

Una ragione è che a volte è impossibile definire uno stimatore che sia coretto per campioni finiti. Se si trova uno stimatore che è almeno consistente ciò è meglio di non produrre nessuna stima.

Una seconda ragione è che non siamo in grado di calcolare il valore atteso dello stimatore. Il valore atteso è uno strumento analitico "debole" che può essere applicato in contesti relativamente semplici.

In particolare, la regola moltiplicativa $E\{g(X)h(Y)\} = E\{g(X)\}\, E\{h(Y)\}$ si può applicare solo quando X e Y sono indipendenti, e in molte situazioni ciò non avviene.

Regole del Plim

Plim reg. 1 **Il plim della somma di un certo numero di variabili è uguale alla somma dei loro plim. Per esempio se ci sono tre variabili casuali X, Y, e Z, ognuna di esse possiede il plim,**

$$\text{plim}\,(X + Y + Z) = \text{plim}\,X + \text{plim}\,Y + \text{plim}\,Z$$

Regole del Plim

Plim reg. 1 Il plim della somma di un certo numero di variabili è uguale alla somma dei loro plim. Per esempio se ci sono tre variabili casuali X, Y, e Z, ognuna di esse possiede il plim,

$$\text{plim}\,(X + Y + Z) = \text{plim}\,X + \text{plim}\,Y + \text{plim}\,Z$$

Plim reg. 2 Se si moltiplica una variabile casuale che possiede il plim per una costante, allora occorre moltiplicare il suo plim per la costante stessa.
Se X è una variabile casuale e b è una costante,

$$\text{plim}\,bX = b\,\text{plim}\,X$$

Regole del Plim

Plim reg. 1 **Il plim della somma di un certo numero di variabili è uguale alla somma dei loro plim. Per esempio se ci sono tre variabili casuali X, Y, e Z, ognuna di esse possiede il plim,**

$$\text{plim}\,(X + Y + Z) = \text{plim}\,X + \text{plim}\,Y + \text{plim}\,Z$$

Plim reg. 2 **Se si moltiplica una variabile casuale che possiede il plim per una costante, allora occorre moltiplicare il suo plim per la costante stessa.**
Se X è una variabile casuale e b è una costante,

$$\text{plim}\,bX = b\,\text{plim}\,X$$

Plim reg. 3 **Il plim di una costante è la costante stessa. Per esempio,**
se b è una costante,

$$\text{plim}\,b = b$$

Regole del Plim

Plim reg. 4 **Il plim di un prodotto è il prodotto dei plim, se esistono. Per esempio, se $Z = XY$, e se X e Y entrambi posseggono i plim,**

$$\text{plim } Z = (\text{plim } X)(\text{plim } Y)$$

Regole del Plim

Plim reg. 4 **Il plim di un prodotto è il prodotto dei plim, se esistono. Per esempio, se $Z = XY$, e se X e Y entrambi posseggono i plim,**

$$\text{plim } Z = (\text{plim } X)(\text{plim } Y)$$

Plim reg. 5 **Il plim di un rapporto è il rapporto dei plim, se esistono. Per esempio, se $Z = X/Y$, e se X e Y entrambi posseggono i plim, e plim Y non è uguale a zero,**

$$\text{plim } Z = \frac{\text{plim } X}{\text{plim } Y}$$

Regole del Plim

Plim reg. 6 **Il plim di una funzione di una variabile è uguale alla funzione dei plim della variable, supposto che la variabile possiede il plim e che la funzione sia continua nel punto in questione.**

$$\text{plim}\, f(X) = f(\text{plim}\, X)$$

Esempio dell'utilizzo delle proprietà asintotiche

$$Y = \lambda Z$$

Supponiamo che una variabile *Y* sia una costante moltiplicata per un'altra variabile *Z*

Esempio dell'utilizzo delle proprietà asintotiche

$$Y = \lambda Z$$

Z **viene generata casualmente da una distribuzione con media μ_Z e varianza σ^2_Z. λ non è nota e noi vogliamo stimarla. Abbiamo un campione di *n* osservazioni.**

Esempio dell'utilizzo delle proprietà asintotiche

$$Y = \lambda Z$$

$$X = Z + w$$

Nel campione abbiamo osservazioni su *X*, dove *X* = *Z* + *w*, e *w* è un errore casuale con media zero e varianza costante σ^2_w.

Esempio dell'utilizzo delle proprietà asintotiche

$$Y = \lambda Z$$

$$X = Z + w$$

$$\frac{\sum Y_i}{\sum X_i}$$

Uno stimatore di λ (non necessariamente il migliore) è ΣY_i / ΣX_i

Esempio dell'utilizzo delle proprietà asintotiche

$$Y = \lambda Z$$

$$X = Z + w$$

$$\frac{\sum Y_i}{\sum X_i} = \frac{\sum \lambda Z_i}{\sum (Z_i + w_i)}$$

Lo stimatore può essere riscritto come sopra.

Esempio dell'utilizzo delle proprietà asintotiche

$$Y = \lambda Z$$

$$X = Z + w$$

$$\frac{\sum Y_i}{\sum X_i} = \frac{\sum \lambda Z_i}{\sum (Z_i + w_i)} = \frac{\lambda \sum Z_i}{\sum Z_i + \sum w_i}$$

$$= \lambda - \lambda \frac{\sum w_i}{\sum Z_i + \sum w_i} = \lambda - \lambda \frac{\overline{w}}{\overline{Z} + \overline{w}}$$

L'espressione può essere semplificata. Quindi abbiamo decomposto lo stimatore nel vero valore, λ, e un termine d'errore. Per vedere se lo stimatore è corretto o meno, occorre considerare il valore atteso del termine di errore.

Esempio dell'utilizzo delle proprietà asintotiche

$$Y = \lambda Z$$

$$X = Z + w$$

$$\frac{\sum Y_i}{\sum X_i} = \frac{\sum \lambda Z_i}{\sum (Z_i + w_i)} = \frac{\lambda \sum Z_i}{\sum Z_i + \sum w_i}$$

$$= \lambda - \lambda \frac{\sum w_i}{\sum Z_i + \sum w_i} = \lambda - \lambda \frac{\overline{w}}{\overline{Z} + \overline{w}}$$

Ma ciò non è possibile. La quantità casuale, $\overline{w}$, compare sia al numeratore che al denominatore. Quindi non è semplice calcolare il valore atteso.

Esempio dell'utilizzo delle proprietà asintotiche

$$Y = \lambda Z$$

$$X = Z + w$$

$$\frac{\sum Y_i}{\sum X_i} = \frac{\sum \lambda Z_i}{\sum (Z_i + w_i)} = \frac{\lambda \sum Z_i}{\sum Z_i + \sum w_i}$$

$$= \lambda - \lambda \frac{\sum w_i}{\sum Z_i + \sum w_i} = \lambda - \lambda \frac{\overline{w}}{\overline{Z} + \overline{w}}$$

Comunque sappiamo che la media campionaria tende alla media della popolazione al crescere della numerosità campionaria, e quindi plim $\overline{w}$ = 0 e plim $\overline{Z}$ = μ_Z.

Esempio dell'utilizzo delle proprietà asintotiche

$$Y = \lambda Z$$

$$X = Z + w$$

$$\text{plim}\left\{\frac{\sum Y_i}{\sum X_i}\right\} = \lambda - \lambda \frac{\text{plim}\ \overline{w}}{\text{plim}\ \overline{Z} + \text{plim}\ \overline{w}} = \lambda - \frac{0}{\mu_Z + 0} = \lambda$$

Quindi siamo in grado di dimostrare che lo stimatore è consistente, nonostante non sappiamo nulla delle sue proprietà per campioni finiti.