VALORE ATTESO DI UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE CASUALE

Definizione di $E[g(X)]$, il valore atteso di una funzione di X:

$$E\left[g(X)\right] = g(x_1)\,p_1 + \ldots + g(x_n)\,p_n = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,p_i$$

Per calcolare il valore atteso di una funzione di una variabile casuale, occorre calcolare tutti i possibili valori della funzione, e poi pesarli per le corrispondenti probabilità e poi sommare i risultati.

VALORE ATTESO DI UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE CASUALE

Definizione di $E[g(X)]$, il valore atteso di una funzione di X:

$$E\left[g(X)\right] = g(x_1)\,p_1 + \ldots + g(x_n)\,p_n = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,p_i$$

Esempio:

$$E(X^2) = x_1^2 p_1 + \ldots + x_n^2 p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$$

Per esempio, il valore atteso di X^2 consiste nel calcolare tutti i possibili valori moltiplicati per le corrispondenti probabilità e poi si effettua la somma.

VALORE ATTESO DI UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE CASUALE

x_i	p_i
x_1	p_1
x_2	p_2
x_3	p_3
$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$
x_n	p_n

Il calcolo del valore atteso di una funzione di una variabile casuale verrà illustrato in generale e poi verrà mostrato un esempio.

VALORE ATTESO DI UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE CASUALE

x_i	p_i
x_1	p_1
x_2	p_2
x_3	p_3
…	…
…	…
…	…
…	…
…	…
…	…
…	…
x_n	p_n

Innanzitutto occorre elencare tutti i possibili valori di *X* e le corrispondenti probabilità.

VALORE ATTESO DI UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE CASUALE

x_i	p_i	$g(x_i)$
x_1	p_1	$g(x_1)$
x_2	p_2	$g(x_2)$
x_3	p_3	$g(x_3)$
...	...	......
...	...	......
...	...	......
...	...	......
...	...	......
...	...	......
...	...	......
x_n	p_n	$g(x_n)$

Poi occorre calcolare la funzione di *X* per ogni possibile valore di *X*.

VALORE ATTESO DI UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE CASUALE

x_i	p_i	$g(x_i)$	$g(x_i)\, p_i$
x_1	p_1	$g(x_1)$	$g(x_1)\, p_1$
x_2	p_2	$g(x_2)$	
x_3	p_3	$g(x_3)$	
...	...	......	
...	...	......	
...	...	......	
...	...	......	
...	...	......	
...	...	......	
...	...	......	
x_n	p_n	$g(x_n)$	

Poi, uno per volta, occorre pesare il valore della funzione per la probabilità corrispondente.

VALORE ATTESO DI UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE CASUALE

x_i	p_i	$g(x_i)$	$g(x_i)\,p_i$
x_1	p_1	$g(x_1)$	$g(x_1)\,p_1$
x_2	p_2	$g(x_2)$	$g(x_2)\,p_2$
x_3	p_3	$g(x_3)$	$g(x_3)\,p_3$
•••	•••	••••••	•••••••••
•••	•••	••••••	•••••••••
•••	•••	••••••	•••••••••
•••	•••	••••••	•••••••••
•••	•••	••••••	•••••••••
•••	•••	••••••	•••••••••
•••	•••	••••••	•••••••••
x_n	p_n	$g(x_n)$	$g(x_n)\,p_n$

Occorre fare ciò per ogni possibile valore di *X*.

VALORE ATTESO DI UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE CASUALE

x_i	p_i	$g(x_i)$	$g(x_i)\, p_i$
x_1	p_1	$g(x_1)$	$g(x_1)\, p_1$
x_2	p_2	$g(x_2)$	$g(x_2)\, p_2$
x_3	p_3	$g(x_3)$	$g(x_3)\, p_3$
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
x_n	p_n	$g(x_n)$	$g(x_n)\, p_n$
			$\Sigma\, g(x_i)\, p_i$

La somma dei valori pesati è il valore atteso della v.c. funzione di X.

VALORE ATTESO DI UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE CASUALE

x_i	p_i	$g(x_i)$	$g(x_i)\, p_i$
x_1	p_1	$g(x_1)$	$g(x_1)\, p_1$
x_2	p_2	$g(x_2)$	$g(x_2)\, p_2$
x_3	p_3	$g(x_3)$	$g(x_3)\, p_3$
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
x_n	p_n	$g(x_n)$	$g(x_n)\, p_n$
			$\Sigma\, g(x_i)\, p_i$

x_i	p_i
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

Per esempio, possiamo prendere X^2, dove X è la variabile casuale definita nella prima sequenza. Gli 11 possibili valori di X e le corrispondenti probabilità vengono mostrate.

VALORE ATTESO DI UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE CASUALE

x_i	p_i	$g(x_i)$	$g(x_i)\,p_i$
x_1	p_1	$g(x_1)$	$g(x_1)\,p_1$
x_2	p_2	$g(x_2)$	$g(x_2)\,p_2$
x_3	p_3	$g(x_3)$	$g(x_3)\,p_3$
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
x_n	p_n	$g(x_n)$	$g(x_n)\,p_n$
			$\Sigma\, g(x_i)\,p_i$

x_i	p_i	x_i^2
2	1/36	4
3	2/36	9
4	3/36	16
5	4/36	25
6	5/36	36
7	6/36	49
8	5/36	64
9	4/36	81
10	3/36	100
11	2/36	121
12	1/36	144

Occorre calcolare i possibili valori di X^2.

VALORE ATTESO DI UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE CASUALE

x_i	p_i	$g(x_i)$	$g(x_i)\,p_i$
x_1	p_1	$g(x_1)$	$g(x_1)\,p_1$
x_2	p_2	$g(x_2)$	$g(x_2)\,p_2$
x_3	p_3	$g(x_3)$	$g(x_3)\,p_3$
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
x_n	p_n	$g(x_n)$	$g(x_n)\,p_n$
			$\Sigma\, g(x_i)\,p_i$

x_i	p_i	x_i^2	$x_i^2\,p_i$
2	1/36	4	0.11
3	2/36	9	
4	3/36	16	
5	4/36	25	
6	5/36	36	
7	6/36	49	
8	5/36	64	
9	4/36	81	
10	3/36	100	
11	2/36	121	
12	1/36	144	

Il primo valore è 4 (quando *X* è uguale a 2). La probabilità che *X* sia uguale a 2 è 1/36, quindi la funzione pesata è 4/36, ovvero 0.11.

VALORE ATTESO DI UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE CASUALE

x_i	p_i	$g(x_i)$	$g(x_i)\,p_i$
x_1	p_1	$g(x_1)$	$g(x_1)\,p_1$
x_2	p_2	$g(x_2)$	$g(x_2)\,p_2$
x_3	p_3	$g(x_3)$	$g(x_3)\,p_3$
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
x_n	p_n	$g(x_n)$	$g(x_n)\,p_n$
			$\Sigma\, g(x_i)\,p_i$

x_i	p_i	x_i^2	$x_i^2\,p_i$
2	1/36	4	0.11
3	2/36	9	0.50
4	3/36	16	1.33
5	4/36	25	2.78
6	5/36	36	5.00
7	6/36	49	8.17
8	5/36	64	8.89
9	4/36	81	9.00
10	3/36	100	8.83
11	2/36	121	6.72
12	1/36	144	4.00

In maniera similare procediamo per tutti i possibili valori di *X*.

VALORE ATTESO DI UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE CASUALE

x_i	p_i	$g(x_i)$	$g(x_i)\,p_i$
x_1	p_1	$g(x_1)$	$g(x_1)\,p_1$
x_2	p_2	$g(x_2)$	$g(x_2)\,p_2$
x_3	p_3	$g(x_3)$	$g(x_3)\,p_3$
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
x_n	p_n	$g(x_n)$	$g(x_n)\,p_n$
			$\Sigma\, g(x_i)\,p_i$

x_i	p_i	x_i^2	$x_i^2\,p_i$
2	1/36	4	0.11
3	2/36	9	0.50
4	3/36	16	1.33
5	4/36	25	2.78
6	5/36	36	5.00
7	6/36	49	8.17
8	5/36	64	8.89
9	4/36	81	9.00
10	3/36	100	8.83
11	2/36	121	6.72
12	1/36	144	4.00
			54.83

Il valore atteso di X^2 è la somma dei valori pesati mostrati nell'ultima colonna. Esso è uguale a 54.83.

VALORE ATTESO DI UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE CASUALE

x_i	p_i	$g(x_i)$	$g(x_i)\, p_i$
x_1	p_1	$g(x_1)$	$g(x_1)\, p_1$
x_2	p_2	$g(x_2)$	$g(x_2)\, p_2$
x_3	p_3	$g(x_3)$	$g(x_3)\, p_3$
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
…	…	……	………
x_n	p_n	$g(x_n)$	$g(x_n)\, p_n$
			$\Sigma\, g(x_i)\, p_i$

x_i	p_i	x_i^2	$x_i^2\, p_i$
2	1/36	4	0.11
3	2/36	9	0.50
4	3/36	16	1.33
5	4/36	25	2.78
6	5/36	36	5.00
7	6/36	49	8.17
8	5/36	64	8.89
9	4/36	81	9.00
10	3/36	100	8.83
11	2/36	121	6.72
12	1/36	144	4.00
			54.83

Nota che $E(X^2)$ non è la stessa cosa di $E(X)^2$. Avevamo visto che $E(X)$ è 7. Il suo quadrato è 49.