COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Covarianza

$$\text{cov}(X,Y) = \sigma_{XY} = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$$

La covarianza tra due variabili casuali *X* e *Y*, indicata con σ_{XY}, viene definita come il valore atteso del prodotto degli scarti dalle loro medie.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Covarianza

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \sigma_{XY} = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$$

$$E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] = \left[E(X-\mu_X)\right]\left[E(Y-\mu_Y)\right]$$

Se due variabili sono indipendenti la loro covarianza è zero. Per verificare ciò iniziamo con il riscrivere la covarianza come il prodotto tra i valori attesi dei due fattori.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Covarianza

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \sigma_{XY} = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$$

$$E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] = \left[E(X-\mu_X)\right]\left[E(Y-\mu_Y)\right]$$

Possiamo fare ciò perché (e solo perché) *X* e *Y* sono indipendenti (vedere le sequenze sulla indipendenza).

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Covarianza

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \sigma_{XY} = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$$

$$\begin{aligned} E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] &= \left[E(X-\mu_X)\right]\left[E(Y-\mu_Y)\right] \\ &= \left[E(X)-E(\mu_X)\right]\left[E(Y)-E(\mu_Y)\right] \\ &= \left[\mu_X-\mu_X\right]\left[\mu_Y-\mu_Y\right] = 0\times 0 = 0 \end{aligned}$$

Il valore atteso di entrambi i fattori è zero perché $E(X) = \mu_X$ e $E(Y) = \mu_Y$. $E(\mu_X) = \mu_X$ e $E(\mu_Y) = \mu_Y$ perché μ_X e μ_Y sono costanti. Quindi la covarianza è zero.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Regole della covarianza

1. Se $Y = V + W$,
   $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, V) + \text{cov}(X, W)$.

Vediamo le regole della covarianza. Prima regola, la regola dell'addizione.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Regole della covarianza

1. Se $Y = V + W$,
   $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{cov}(X, V) + \mathrm{cov}(X, W)$.

2. Se $Y = \beta Z$, dove β è una costante
   $\mathrm{cov}(X, Y) = \beta\,\mathrm{cov}(X, Z)$

Poi, la regola della moltiplicazione per casi dove una variabile è moltiplicata per una costante.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Regole della covarianza

1. Se $Y = V + W$,
   $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{cov}(X, V) + \mathrm{cov}(X, W)$.

2. Se $Y = \beta Z$, dove β è una costante
   $\mathrm{cov}(X, Y) = \beta\, \mathrm{cov}(X, Z)$

3. Se $Y = \beta$, dove β è una costante,
   $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$

Infine, una regola primitiva che spesso viene usata.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Regole della covarianza

1. Se $Y = V + W$,
$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, V) + \text{cov}(X, W)$.

***Dim.*:**

Dal momento che $Y = V + W$, $\mu_Y = \mu_V + \mu_W$

$$\text{cov}(X, Y) = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\}$$

Dimostriamo la prima regola. Partiamo dalla definizione di cov(*X*, *Y*).

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Regole della covarianza

1. Se $Y = V + W$,
   $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, V) + \text{cov}(X,W)$.

Dim.:

Dal momento che $Y = V + W$, $\mu_Y = \mu_V + \mu_W$

$$\text{cov}(X,Y) = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}$$

$$= E\{(X-\mu_X)([V+W]-[\mu_V+\mu_W])\}$$

$$= E\{(X-\mu_X)(V-\mu_V)+(X-\mu_X)(W-\mu_W)\}$$

Sostituiamo *Y* e riordiniamo.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Regole della covarianza

1. Se $Y = V + W$,
$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, V) + \text{cov}(X, W)$.

***Dim.*:**

Dal momento che $Y = V + W$, $\mu_Y = \mu_V + \mu_W$

$$\begin{aligned}
\text{cov}(X,Y) &= E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} \\
&= E\{(X-\mu_X)([V+W]-[\mu_V+\mu_W])\} \\
&= E\{(X-\mu_X)(V-\mu_V)+(X-\mu_X)(W-\mu_W)\} \\
&= \text{cov}(X,V)+\text{cov}(X,W).
\end{aligned}$$

Otteniamo questo risultato.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Regole della covarianza

2. Se $Y = \beta Z$,
$\text{cov}(X, Y) = \beta\, \text{cov}(X, Z)$.

Dim.:

Dal momento che $Y = \beta Z$, $\mu_Y = \beta \mu_Z$

$$\text{cov}(X, Y) = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\}$$
$$= E\{(X - \mu_X)\;(\beta Z - \beta \mu_Z)\}$$

Vediamo la regola della moltiplicazione dove una variabile viene moltiplicata per una costante. La variabile *Y* è stata sostituita da βZ.

Regole della covarianza

2. Se $Y = \beta Z$,
$\mathrm{cov}(X, Y) = \beta\, \mathrm{cov}(X, Z)$.

Dim.:

Dal momento che $Y = \beta Z$, $\mu_Y = \beta \mu_Z$

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X,Y) &= E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}\\ &= E\{(X-\mu_X)\ (\beta Z - \beta \mu_Z)\ \}\\ &= \beta E\{(X-\mu_X)(Z-\mu_Z)\}\\ &= \beta\, \mathrm{cov}(X,Z).\end{aligned}$$

β è un fattore comune e può essere spostato fuori dall'espressione, e otteniamo il risultato voluto.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Regole della covarianza

3. **Se $Y = \beta$,**
$\text{cov}(X, Y) = 0$.

***Dim.*:**

Dal momento che $Y = \beta$, $\mu_Y = \beta$

$$\begin{aligned}\text{cov}(X,Y) &= E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}\\ &= E\{(X-\mu_X)\ (\beta-\beta)\ \}\\ &= E\{0\}\\ &= 0.\end{aligned}$$

La dimostrazione della terza regola è scontata.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Esempio dell'utilizzo delle regole della covarianza

Supponiamo $Y = \beta_1 + \beta_2 Z$

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X, Y) &= \mathrm{cov}(X, [\beta_1 + \beta_2 Z]) \\ &= \mathrm{cov}(X, \beta_1) + \mathrm{cov}(X, \beta_2 Z)\end{aligned}$$

Riportiamo un esempio dell'utilizzo delle regole della covarianza. Supponiamo che Y è una funzione lineare di Z e che vogliamo calcolare la cov(X, Y). Sostituiamo ad Y (prima linea) e poi usiamo la regola 1 della covarianza (seconda linea).

Esempio dell'utilizzo delle regole della covarianza

Supponiamo $Y = \beta_1 + \beta_2 Z$

$$\begin{aligned}
\text{cov}(X, Y) &= \text{cov}(X, [\beta_1 + \beta_2 Z]) \\
&= \text{cov}(X, \beta_1) + \text{cov}(X, \beta_2 Z) \\
&= 0 + \text{cov}(X, \beta_2 Z) \\
&= \beta_2 \text{cov}(X, Z)
\end{aligned}$$

Poi usiamo la regola 3 (terza linea), ed infine la regola 2 (quarta linea).

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Regole della varianza

1. Se $Y = V + W$,
   $\text{var}(Y) = \text{var}(V) + \text{var}(W) + 2\text{cov}(V, W)$.

Vediamo adesso le regole della varianza. Prima regola, la regola dell'addizione.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Regole della varianza

1. **Se $Y = V + W$,**
   $\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(V) + \mathrm{var}(W) + 2\mathrm{cov}(V, W)$.

2. **Se $Y = \beta Z$, dove β è una costante,**
   $\mathrm{var}(Y) = \beta^2 \mathrm{var}(Z)$.

Poi, la regola della moltiplicazione per casi dove una variabile è moltiplicata per una costante.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Regole della varianza

1. **Se $Y = V + W$,**
   $\text{var}(Y) = \text{var}(V) + \text{var}(W) + 2\text{cov}(V, W)$.

2. **Se $Y = \beta Z$, dove β è una costante,**
   $\text{var}(Y) = \beta^2\text{var}(Z)$.

3. **Se $Y = \beta$, dove β è una costante,**
   $\text{var}(Y) = 0$.

Una terza regola riguarda il caso in cui *Y* è una costante.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Regole della varianza

1. **Se $Y = V + W$,**
   $\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(V) + \mathrm{var}(W) + 2\mathrm{cov}(V, W)$.

2. **Se $Y = \beta Z$, doveb è una costante,**
   $\mathrm{var}(Y) = \beta^2\mathrm{var}(Z)$.

3. **Se $Y = \beta$, dove β è una costante,**
   $\mathrm{var}(Y) = 0$.

4. **Se $Y = V + \beta$, dove β è una costante,**
   $\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(V)$.

Infine, consideriamo una quarta regola. Essa dipende dalle prime tre.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Regole della varianza

1. Se $Y = V + W$,
$\text{var}(Y) = \text{var}(V) + \text{var}(W) + 2\text{cov}(V, W)$.

***Dim.*:**

$$\text{var}(Y) = \text{cov}(Y, Y)$$

$$\begin{aligned}\text{var}(X) &= E\left\{(X-\mu_X)^2\right\} \\ &= E\left\{(X-\mu_X)(X-\mu_X)\right\} \\ &= \text{cov}(X, X).\end{aligned}$$

Possiamo applicare le stesse regole della covarianza, in quanto la varianza è la covarianza tra una variabile e se stessa.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Regole della varianza

1. Se $Y = V + W$,
   $\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(V) + \mathrm{var}(W) + 2\mathrm{cov}(V, W)$.

***Dim.*:**

$$\mathrm{var}(Y) = \mathrm{cov}(Y, Y) = \mathrm{cov}([V + W], Y)$$

Iniziamo con il sostituire *Y* con *V* + *W*.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Regole della varianza

1. Se $Y = V + W$,
   $\text{var}(Y) = \text{var}(V) + \text{var}(W) + 2\text{cov}(V, W)$.

***Dim.*:**

$$\begin{aligned}\text{var}(Y) &= \text{cov}(Y, Y) = \text{cov}([V + W], Y) \\ &= \text{cov}(V, Y) + \text{cov}(W, Y)\end{aligned}$$

Usiamo la regola 1 della covarianza.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Regole della varianza

1. Se $Y = V + W$,
   $\text{var}(Y) = \text{var}(V) + \text{var}(W) + 2\text{cov}(V, W)$.

***Dim.*:**

$$\begin{aligned}
\text{var}(Y) &= \text{cov}(Y, Y) = \text{cov}([V + W], Y) \\
&= \text{cov}(V, Y) + \text{cov}(W, Y) \\
&= \text{cov}(V, [V + W]) + \text{cov}(W, [V + W]) \\
&= \text{cov}(V, V) + \text{cov}(V,W) + \text{cov}(W, V) + \text{cov}(W, W)
\end{aligned}$$

Adesso sostituiamo l'espressione di Y ad entrambi i membri ed usiamo la regola 1 della covarianza.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Regole della varianza

1. Se $Y = V + W$,

$$\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(V) + \mathrm{var}(W) + 2\mathrm{cov}(V, W).$$

***Dim.*:**

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(Y) &= \mathrm{cov}(Y, Y) = \mathrm{cov}([V + W], Y) \\
&= \mathrm{cov}(V, Y) + \mathrm{cov}(W, Y) \\
&= \mathrm{cov}(V, [V + W]) + \mathrm{cov}(W, [V + W]) \\
&= \mathrm{cov}(V, V) + \mathrm{cov}(V, W) + \mathrm{cov}(W, V) + \mathrm{cov}(W, W) \\
&= \mathrm{var}(V) + 2\mathrm{cov}(V, W) + \mathrm{var}(W)
\end{aligned}$$

Alla fine otteniamo il risultato voluto.

Nota che cov(W, V) è uguale a cov(V, W).

Regole della varianza

2. Se $Y = \beta Z$, doveb è una costante,
$\mathrm{var}(Y) = \beta^2 \mathrm{var}(Z)$.

Dim.:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(Y) &= \mathrm{cov}(Y, Y) = \mathrm{cov}(bZ, bZ)\\ &= \beta^2 \mathrm{cov}(Z, Z)\\ &= \beta^2 \mathrm{var}(Z).\end{aligned}$$

Questa dimostrazione è immediata. Iniziamo con lo scrivere var(*Y*) come cov(*Y*, *Y*). Poi sostituiamo Y e portiamo il termine β fuori come fattore comune.

Regole della varianza

3. Se $Y = \beta$, dove β è una costante, $\mathrm{var}(Y) = 0$.

Dim.:

$$\mathrm{var}(Y) = \mathrm{cov}(\beta, \beta) = 0.$$

La terza regola è immediata. Usiamo la terza regola della covarianza. Ovviamente se una variabile è constante la sua varianza è zero.

Regole della varianza

4. **Se $Y = V + \beta$, dove β è una costante,**
$\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(V)$.

***Dim.*:**

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(Y) &= \mathrm{var}(V) + 2\mathrm{cov}(V, \beta) + \mathrm{var}(\beta) \\ &= \mathrm{var}(V)\end{aligned}$$

La quarta regola della varianza viene dimostrata sfruttando la prima regola. Il secondo termine nella parte destra è zero sfruttando la terza regola della covarianza. Anche il terzo termine è zero per la regola numero 3.

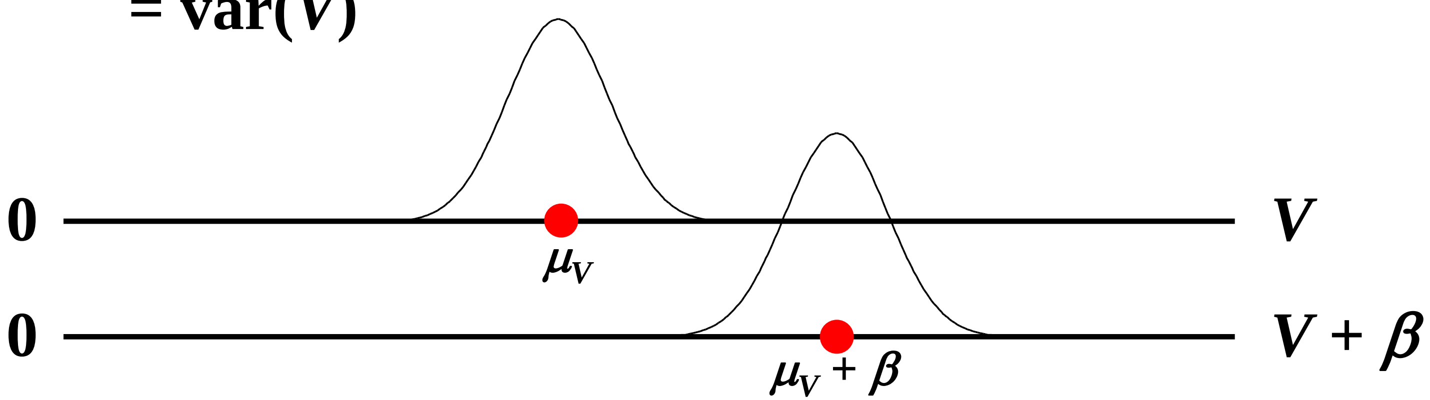
Regole della varianza

4. Se $Y = V + \beta$, dove β è una costante, $\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(V)$.

***Dim.*:**

$$\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(V) + 2\mathrm{cov}(V, \beta) + \mathrm{var}(\beta)$$

$$= \mathrm{var}(V)$$



Il perchè di questo motivo è abbastanza intuitivo. Se aggiungiamo una costante ad una variabile, spostiamo l'intera distribuzione di una costante. La deviazione standard rimane invariata mentre la media varia di μ_V.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Correlazione

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}}$$

La cov(*X*, *Y*) non è una misura soddisfacente dell'associazione tra due variabili *X* e *Y* perchè essa dipende dall'unità di misura di *X* e *Y*.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Correlazione

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}}$$

Una misura migliore dell'associazione è il coefficiente di correlazione perché è un numero puro, ovvero non risente dell'unità di misura. Il numeratore risente delle unità di misura di *X* e *Y*.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Correlazione

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}}$$

La radice delle varianze di *X* e *Y* nel denominatore consente di avere nel denominatore un indice espresso nell'unità di misura di *X* e *Y* . Quindi l'indice è privo di unità di misura.

Correlazione

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}}$$

Se *X* e *Y* sono indipendenti, ρ_{XY} sarà uguale a zero perché σ_{XY} sarà zero.

COVARIANZA, REGOLE DELLA COVARIANZA E VARIANZA, E CORRELAZIONE

Correlazione

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}}$$

Se c'è un'associazione positiva tra le variabili, σ_{XY}, e quindi ρ_{XY}, sarà positivo. Se c'è un'associazione lineare perfetta positiva allora ρ_{XY} assumerà il suo valore massimo 1. In maniera simile se c'è un'associazione lineare perfetta negativa allora ρ_{XY} assumerà il suo valore minimo –1. Se c'è un'associazione negativa tra le variabili, σ_{XY}, e quindi ρ_{XY}, sarà negativo