# CAMPIONAMENTO E STIMATORI

**Supponiamo di avere una variabile casuale *X* e di voler stimare il parametro ignoto della media della popolaz. $\mu_X$.**

***Pianificazione (concetti di base)***

**Il primo passo è di prendere un campione di *n* osservazioni $\{X_1, \ldots, X_n\}$.**

**Supponiamo di avere una variabile casuale *X* e di voler stimare il parametro ignoto della media della popolaz. $\mu_X$.**

## *Pianificazione (concetti di base)*

**Il primo passo è di prendere un campione di *n* osservazioni $\{X_1, \ldots, X_n\}$.**

**Prima di selezionare il campione, quando siamo ancora alla fase di pianificazione, le variabili $X_i$ sono delle quantità casuali. Sappiamo che esse saranno generate dalla distribuzione di *X*, ma noi non conosciamo i loro valori in anticipo.**

**Supponiamo di avere una variabile casuale *X* e di voler stimare il parametro ignoto della media della popolaz. $\mu_X$.**

***Pianificazione (concetti di base)***

**Il primo passo è di prendere un campione di *n* osservazioni $\{X_1, \ldots, X_n\}$.**

**Prima di selezionare il campione, quando siamo ancora alla fase di pianificazione, le variabili $X_i$ sono delle quantità casuali. Sappiamo che esse saranno generate dalla distribuzione di *X*, ma noi non conosciamo i loro valori in anticipo.**

**Quindi stiamo considerando le variabili casuali a due livelli: la variabile casuale *X*, ed il suo campione casuale.**

**Supponiamo di avere una variabile casuale *X* e di voler stimare il parametro ignoto della media della popolaz. $\mu_X$.**

***Realizzazione***

**Una volta che abbiamo estratto il campione avremo un insieme di numeri $\{x_1, \ldots, x_n\}$.**

**Ciò viene chiamato dagli statistici una realizzazione. Abbiamo numeri e non variabili**

**Supponiamo di avere una variabile casuale *X* e di voler stimare il parametro ignoto della media della popolaz. $\mu_X$.**

***Pianificazione (concetti di base)***

**Torniamo alla pianificazione. Una volta generato il campione di n osservazioni $\{X_1, \ldots, X_n\}$, possiamo usarli per applicarli all'interno di una formula per stimare il parametro ignoto della media della popolazione $\mu_X$.**

**Supponiamo di avere una variabile casuale $X$ e di voler stimare il parametro ignoto della media della popolaz. $\mu_X$.**

***Pianificazione (concetti di base)***

**Torniamo alla pianificazione. Una volta generato il campione di n osservazioni $\{X_1, \ldots, X_n\}$, possiamo usarli per applicarli all'interno di una formula per stimare il parametro ignoto della media della popolazione $\mu_X$.**

**Questa formula è nota come stimatore. In questo contesto, lo stimatore standard è la media campionaria**

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\left(X_1 + \ldots + X_n\right)$$

**Uno stimatore è una variabile casuale perché essa dipende da quantità casuali $\{X_1, \ldots, X_n\}$.**

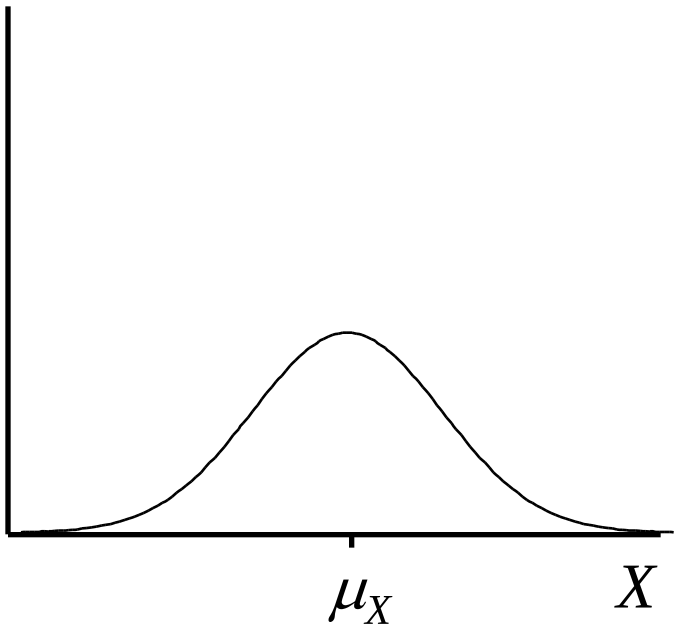
**Supponiamo di avere una variabile casuale *X* e di voler stimare il parametro ignoto della media della popolaz. $\mu_X$.**

***Realizzazione***

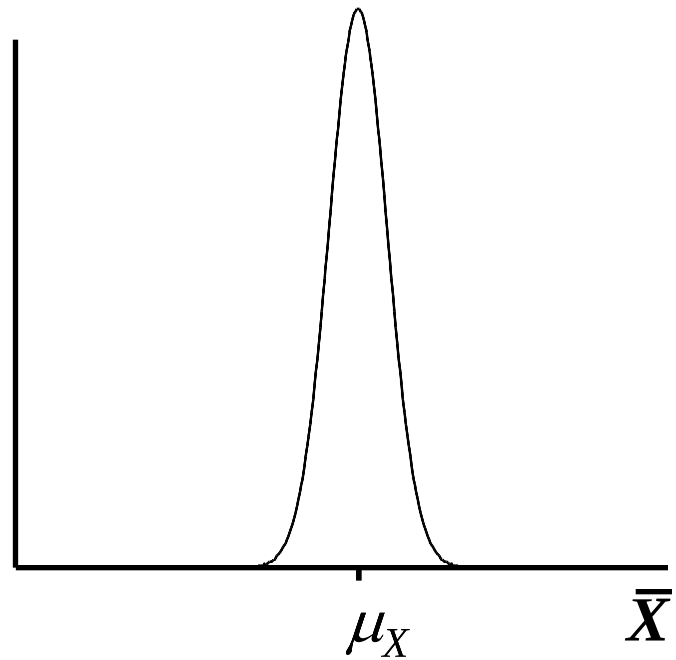
**Il numero che ricaviamo, data la realizzazione $\{x_1, \ldots, x_n\}$, è noto come stima**

# CAMPIONAMENTO E STIMATORI

**Funzione di probabilità di densità di $X$**




**Funzione di probabilità di densità di $\bar{X}$**




**Vedremo perché queste distinzioni sono utili ed importanti in un confronto delle distribuzioni di $X$ e $\bar{X}$. Inizieremo con il mostrare che $X$ ha la stessa media di $\bar{X}$.**

# CAMPIONAMENTO E STIMATORI

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)\right)$$

$$= \frac{1}{n} E(X_1 + ... + X_n)$$

**Sostituiamo a $\bar{X}$ la sua definizione e poi usiamo la seconda regola del valore atteso e portiamo 1/*n* fuori dall'espressione come fattore comune.**

$$E\left(\overline{X}\right)=E\left(\frac{1}{n}\left(X_1+\ldots+X_n\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n}E\left(X_1+\ldots+X_n\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(E\left(X_1\right)+\ldots+E\left(X_n\right)\right)$$

**Poi usiamo la regola 1 del valore atteso e riscriviamo il valore atteso della somma come somma dei valori attesi.**

## CAMPIONAMENTO E STIMATORI

$$E\left(\overline{X}\right) = E\left(\frac{1}{n}\left(X_1 + \ldots + X_n\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n} E\left(X_1 + \ldots + X_n\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(E\left(X_1\right) + \ldots + E\left(X_n\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\mu_X + \ldots + \mu_X\right)$$

**Iniziamo con $X_1$. $X_1$ è una variabile casuale e nella fase di pianificazione non sappiamo quali valori assumerà.**

$$E\left(\overline{X}\right)=E\left(\frac{1}{n}\left(X_1+\ldots+X_n\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n}E\left(X_1+\ldots+X_n\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(E\left(X_1\right)+\ldots+E\left(X_n\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\mu_X+\ldots+\mu_X\right)$$

**Ma sappiamo che è generata casualmente dalla distribuzione di $X$. Il valore atteso di $X_1$ sarà $\mu_X$. La stessa cosa sarà vera per tutte le componenti del campione. Qundi abbiamo il risultato di cui sopra.**

$$E\left(\overline{X}\right) = E\left(\frac{1}{n}\left(X_1 + \ldots + X_n\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n} E\left(X_1 + \ldots + X_n\right)$$

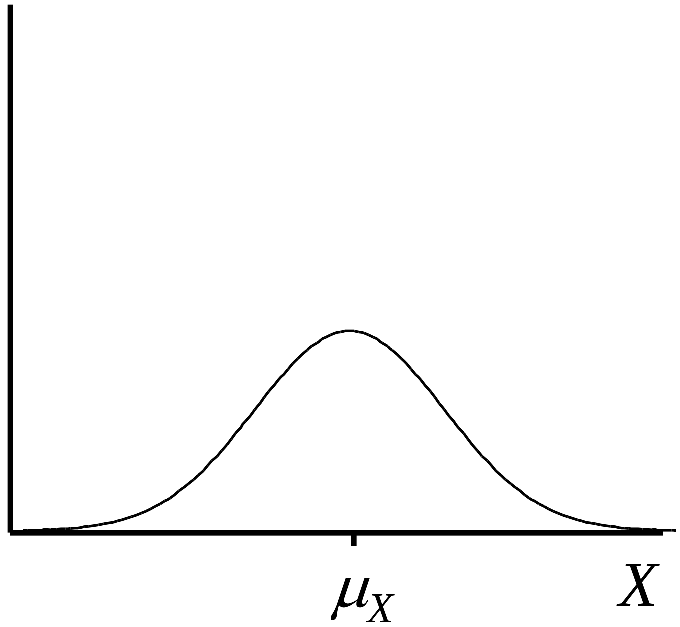
$$= \frac{1}{n}\left(E\left(X_1\right) + \ldots + E\left(X_n\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\mu_X + \ldots + \mu_X\right) = \mu_X$$

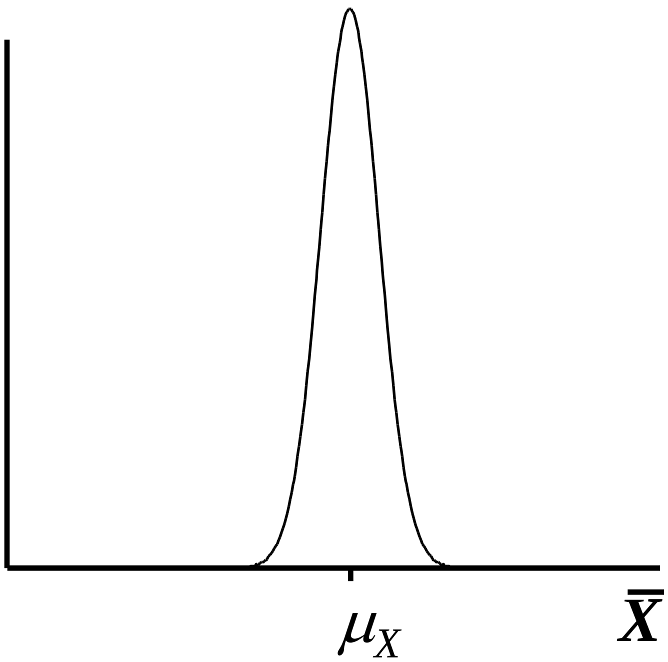
**Quindi abbiamo dimostrato che la media della distribuzione di $\overline{X}$ è $\mu_X$.**

# CAMPIONAMENTO E STIMATORI

**Funzione di probabilità di densità di $X$**




**Funzione di probabilità di densità di $\bar{X}$**




**Dimostreremo che la varianza della distribuzione di $\bar{X}$ è più piccola di quella di $X$, come illustrato nel grafico.**

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \mathrm{var}\left\{\frac{1}{n}\left(X_1 + \ldots + X_n\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\mathrm{var}\left(X_1 + \ldots + X_n\right)$$

**Sostituiamo a $\bar{X}$ la sua definizione ed usando la regola 2 portiamo fuori dall'espressione 1/*n* come fattore comune.**

$$\sigma_{\bar{X}}^{2} = \mathrm{var}\left\{\frac{1}{n}\left(X_1 + ... + X_n\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\mathrm{var}\left(X_1 + ... + X_n\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left\{\mathrm{var}\left(X_1\right) + ... + \mathrm{var}\left(X_n\right)\right\}$$

**Poi usiamo la regola 1 della varianza, ovvero riscriviamo la varianza di una somma come la somma di varianze. Ciò è possibile in quanto le variabili sono indipendenti**

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \mathrm{var}\left\{\frac{1}{n}\left(X_1 + \ldots + X_n\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\mathrm{var}\left(X_1 + \ldots + X_n\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left\{\mathrm{var}\left(X_1\right) + \ldots + \mathrm{var}\left(X_n\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sigma^2_X + \ldots + \sigma^2_X\right)$$

**Iniziamo con $X_1$. $X_1$ è una variabile casuale e nella fase di pianificazione non sappiamo quali valori assumerà.**

# CAMPIONAMENTO E STIMATORI

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \mathrm{var}\left\{\frac{1}{n}\left(X_1 + \ldots + X_n\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\mathrm{var}\left(X_1 + \ldots + X_n\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left\{\mathrm{var}\left(X_1\right) + \ldots + \mathrm{var}\left(X_n\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sigma_X^2 + \ldots + \sigma_X^2\right)$$

**Ma sappiamo che è generata casualmente dalla distribuzione di $X$. La varianza di $X_1$, sarà $\sigma_X^2$. Lo stesso sarà vero per tutte le componenti del campione. Quindi otteniamo il risultato di cui sopra.**

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \mathrm{var}\left\{\frac{1}{n}\left(X_1 + \ldots + X_n\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\mathrm{var}\left(X_1 + \ldots + X_n\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left\{\mathrm{var}\left(X_1\right) + \ldots + \mathrm{var}\left(X_n\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sigma_X^2 + \ldots + \sigma_X^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n\sigma_X^2\right) = \frac{\sigma_X^2}{n}.$$

**Quindi abbiamo dimostrato che la varianza della media campionaria è uguale alla varianza di *X* diviso per *n*, un risultato che dovrebbe essere familiare per chi ha frequentato un corso di statistica.**